

## Duffing방정식을 이용한 비선형회로의 고조파해석 기법

(A Harmonics Analysis Technique of Nonlinear Circuit Using Duffing's Equation)

신중린\* · 황현준\*\* · 조기선\*\*\*

(Joong-Rin Shin · Hyun-Jun Hwang · Ki-Seon Cho)

### 요 약

송변전설비의 비선형영역 운전으로 인하여 발생하는 고조파는 잘 알려져 있지 않으며 이에 대한 연구도 많지 않다. 비선형회로에서 고조파원, 특히 송변전설비의 비선형 운전에 의한 고조파는 근사적으로 비선형 기계진동문제를 기술하는 Duffing방정식으로 모델링할 수 있다. 본 논문에서는 Duffing방정식을 이용하여 비선형회로에서 고조파 해석을 위한 새로운 해석적 기법을 제안하고 기존에 알려진 여러 기법들과 비교하였다. 사례연구를 통하여 제안된 기법과 기존기법을 비교하였으며, 제안된 방법의 활용성을 고찰하였다.

### Abstract

The harmonics caused by the nonlinear operation of transmission equipments are not identified yet and have been seldom studied. Sources of harmonics in nonlinear circuit, especially caused by the nonlinear operation of transmission equipments, can be approximately modeled with Duffing's Equation which is often referred in nonlinear mechanical oscillation problem. In this study, a new analytic technique is proposed for the analysis of harmonics in nonlinear circuits using Duffing's Equation and compared with some conventional methods. Finally some case studies were performed to evaluate the performance of proposed method and conventional methods.

### 1. 서 론

전력계통에서의 고조파 발생원인은 크게 두 가지로 구분된다. 그 하나는 전력전자기기등 정밀 스위칭 설비에 의한 것이며 또다른 하나는 과부하 등에 의한 송변전 설비의 비선형 영역 운전으로 인한 것이다. 전자의 경우에 대한 연구는 어느 정도 진행되어 왔

지만 후자, 즉 송전설비의 비선형 특성영역 운전으로 인하여 발생하는 고조파에 대하여는 그러한 현상만 인지되고 있을 뿐 발생조건이나 발생량을 파악하는 방법에 대하여는 이렇다할 연구가 보고된 바 없다.

장거리 송전선의 송전단 측에서 본 송전계통은 단 일부하설비로 등가화 할 수 있다. 일반적으로 송전계통의 저항은 리액턴스에 비하여 충분히 작기 때문에 무시할 수 있으며 비선형 인덕턴스는 캐패시턴스에 비하여 상대적으로 큰 리액턴스 값을 갖는다. 비선형성은 대부분 철심의 자속포화현상에 의한 것이므로 비선형 인덕턴스에 의한 자속은 전류의 1차항 및 3차항의 합으로 근사화시킬 수 있다. 이러한 가정

\*정회원 : 건국대 공대 전기공학과 부교수

\*\*정회원 : 포스코개발 주식회사 철강사업2본부

\*\*\*정회원 : 건국대 대학원 전기공학과 박사과정

접수일자 : 1998. 6. 5

을 전제하는 경우송전선로에 발생하는 고조파는 구조물의 진동해석을 위하여 Duffing이 제안한[1] Duffing방정식의 형태로 모델링할 수 있다[2].

본 연구에서는 이와같이 송변전 설비 자체의 비선형 요인에 의하여 발생하는 고조파를 Duffing방정식으로 모델링하고 또한 그 해를 얻기위하여 새로운 해석적 기법을 제안하므로써 송전계통의 고조파 발생량에 대한 새로운 정량적 해석기법을 시도하였다.

## 2. 비선형회로의 고조파발생 및 Duffing 방정식에 의한 모델링

### 2.1 비선형회로에서의 고조파발생 메커니즘

앞에서 설명한 것과 같은 전제아래 그림 1.과 같이 증가화된 송전회로에서 송변전 설비가 비선형특성(nonlinearity) 즉, 포화영역에서 운전되고 있는 경우 그 회로 방정식은 (1)과 같이 미분 방정식으로 표현할 수 있다.

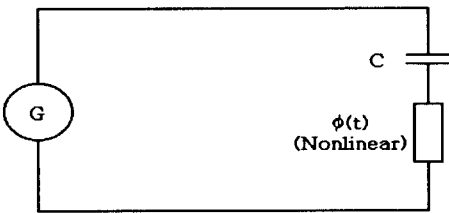


그림 1. 증가화된 비선형회로  
Fig. 1. Simplified Nonlinear Circuit

$$\frac{d}{dt} \psi(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \sin \omega t \quad (1)$$

식 (1)에서 자화특성  $\psi(t)$ 가  $i(t)$ 의 비선형 식으로 표현되는 경우, 이 회로는 비선형 진동회로가 되어 비록 전원전압이 정현파이더라도 위 비선형 방정식의 해(solution)로 표현되는 회로전류에는 고조파가 나타나게된다.

### 2.2 Duffing방정식에 의한 고조파발생 모델링

식 (1)에서  $i-\psi$  간의 비선형 특성이 파악되면 이 문제는 다음과 같이 비선형 진동의 문제로 취급할 수 있다.

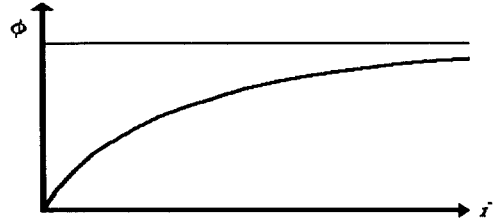


그림 2. 비선형근사예  
Fig. 2. Nonlinear Approximation Example

앞에서 설명한 바와 같이 인덕턴스의 비선형성은 변압기등의 철심이 갖는 자속포화현상에 의한 것이 대부분을 차지하며, 이러한 자기포화영역에서 설비가 운전될 때 비선형성에 의한 과부하가 발생하는 것이다. 포화곡선으로 인한 비선형성을 나타내는 한 가지 방법으로 그림 2와 같이  $i-\psi$ 의 관계를 다항식 형태로 식(2)와 같이 근사화 할 수 있다. 실제로 송변전설비의 포화곡선은 식(2)와 유사한 3차 다항식 형태로 모델링이 가능하다.

$$i = a\psi + b\psi^3 \quad (2)$$

( $a, b$ : 근사화 다항식의 계수)

식(1)을 시간에 대하여 미분하고, 식(2)를 대입하면

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi(t) + \frac{a}{C} \psi(t) + \frac{b}{C} \psi^3(t) = \omega E \cos \omega t \quad (3)$$

식(3)은 정규화(normalize)과정을 거쳐서 다음의 식(4)와 같은 형태로 바뀌 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \alpha x(t) + \beta x^3(t) = \gamma \cos \omega t \quad (4)$$

$x(t)$  :  $\psi(t)$ 를 정규화한 함수  
 $\alpha, \beta, \gamma$  : 정규화된 계수값

이렇게 얻어진 식(4)는 구조물해석 분야에서 비선형 진동문제의 모델 중 하나로 제시된 Duffing방정식의 형태이다[1, 2]. 즉, 앞에서 설명한 바와 같이 송전계통에 현실적인 가정을 전제하면 송전계통의 비선형성에 의한 고조파발생을 Duffing방정식으로 모델링할 수 있

Duffing방정식을 이용한 비선형회로의 고조파해석 기법

으며, 식(4)형태의 Duffing방정식을 만족하는  $x(t)$  를 구할 수 있으면 비선형 회로의 고조파해석이 가능하다.

### 3. 해석적 기법에 의한 Duffing방정식의 새로운 해법

기존의 Duffing방정식 해법의 경우 비선형 연립방정식을 다시 풀어야하는 어려움이 있거나[3], 고조파 계수들간의 관계식이 복잡하여 해 자체를 구하기가 쉽지 않다는 단점이 있다. 본 연구에서는 기존의 Duffing방정식 해법등이 갖는 계산상의 부담을 줄일 수 있는 새로운 해석적 접근방법을 제안하고자 한다.

일반적으로 송변전설비의 경우 (2)와 같이 비선형 회로의 비선형성이 크지 않다고 생각하면 특이섭동법(singular perturbation method)을 이용하여 (4)를 만족하는  $x(t)$  를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) \\ &+ \dots + \epsilon^n x_n(t) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\epsilon$ 은 섭동변수(perturbation parameter)이다.

(5)의  $x_n(t)$ 항은 기수 고조파만의 합으로 다음과 같이 놓는다.

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n a_{2k+1}^n \cos(2k+1)\omega t \quad (6)$$

위 식에서  $a_{2k+1}^n$ 의 아래첨자  $2k+1$ 은 기수 고조파 차수를 표시하며, 위 첨자  $n$ 은  $n$ 번째 요소함수 즉  $x_n(t)$ 에 포함된 고조파 계수임을 뜻한다.

(5)로부터 (4)의  $x^3$  항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x^n(t) &= 1x_0^n(t) + \epsilon x_1^n(t) + \epsilon^2 x_2^n(t) + \dots \\ &= \sum \epsilon^n x_n^n(t) \\ x^3(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(t) \right)^3 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m x_l(t) x_{m-l}(t) x_{n-m}(t) \right) \epsilon^n \end{aligned} \quad (7)$$

간단히  $x_l(t) = x_l$ 로 표시하여 (7)에서  $\epsilon^n$ 의 승수 부분을

$$\begin{aligned} M_n(t) &= \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m x_l x_{m-l} x_{n-m} \\ &= \sum_{0 \leq l \leq m \leq n} x_l x_{m-l} x_{n-m} \end{aligned} \quad (8)$$

로 표시하면  $x^3(t)$ 는 다음과 같이 간단히 쓰여진다.

$$x^3(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \epsilon^n \quad (9)$$

(7), (8), (9)의 결과를 (4)에 대입하여  $\epsilon$ 에 관하여 좌우변의 계수를 비교하면 다음 관계를 얻을 수 있다

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^n(t) \epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \epsilon^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \epsilon^{n+1} = \gamma \cos \omega t \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 (2)를 전개하여 (9)에 대입하면 (11)의 선형연립방정식의 우변  $M_n(t)$ 를 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

다음 식 (12)에서 삼각함수곱을 합으로 바꾸면  $M_n(t)$ 는 (15)와 같이 표현된다.

위의  $M_n(t)$ 를 다시 쓰면 (16)이 된다.



(2), (17), (18)을 (11)의 마지막 식에 대입하면

$$\sum_{i=0}^{n+1} A_{2i+1}^{n+1} \cos(2i+1)\omega t$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} a_{2i+1}^{n+1} (2i+1)^2 \omega^2 \cos(2i+1)\omega t \quad (19)$$

$$- \sum_{i=0}^{n+1} a_{2i+1}^{n+1} \cos(2i+1)\omega t$$

각  $\cos(2i+1)\omega t$ 항에 대한 계수를 비교하여  $a_{2i+1}^{n+1}$  과  $A_{2i+1}^{n+1}$  간의 관계식을 구한다.

$$\{1 - (2i+1)^2 \omega^2\} a_{2i+1}^{n+1} = -A_{2i+1}^{n+1}$$

$$\therefore a_{2i+1}^{n+1} = \frac{A_{2i+1}^{n+1}}{\omega^2(2i+1)^2 - 1} \quad (20)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$a_1^0$ 는 (2)에서  $n=0$ 일 때  $x_o(t) = a_1^0 \cos \omega t$ 로부터 다음과 같이 직접 구할 수 있다.

$$a_1^0 = \frac{\gamma}{1 - \omega^2} \quad (21)$$

(2), (19), (20)을 이용하여 축차적으로 구할 수 있다.

#### 4. 사례연구

사례 연구는 우선 본 논문에서 제시한 해석적 알고리즘을 사용하여 표본 시스템의 고조파 해를 구한 뒤 그 결과를 문헌[3]에서 제시된 조파평형법(HBM, Harmonic Balanced Method)과 문헌[1]의 일반항대입법에 의한 결과와 비교, 검토하여 제시된 알고리즘의 타당성 및 실용성의 여부를 확인하였다. 비교된 방법은 모두 각각의 장단점을 가지고 있으며 그에 따라 어느 정도 오차의 가능성이 있다고 보면, 정확

한 고조파 해의 크기를 구하는 데는 어느 방법이든 나름대로 우리가 따른다고 할 수 있다. 더욱이 Duffing방정식은 비주기성이 심하며 경우에 따라서는 수치적분이 불가능한 경우가 많다. 또 일정 조건이 아닐 경우 그 해가 발산하며 외부 구동함수에 따라 공진현상을 일으켜 해를 구할 수 없는 불안정점(saddle point)에 이르거나 해의 점프현상(jump phenomenon)을 갖는 등의 특성을 보이기 때문에 몇 가지의 해석 가능한 한정된 해 이외에는 구할 수 없다[4].

일반적으로 Duffing방정식의 1차항의 계수는 구동주파수에 따른 해의 존재여부와 큰 상관성을 갖는다 [1]. 본 연구에서는 그 영향을 비교하기 위하여 다음 두 시스템을 사례연구로 선정하였다.

사례연구를 통하여 어떤 한정된 경우에 대해서만 해를 얻을 수 있으며, 따라서 비선형성이 심한 경우 현재로서는 고조파해석이 불가능하다는 점을 확인할 수 있었다.

#### 4.1 제안된 방법에 의한 사례연구 결과

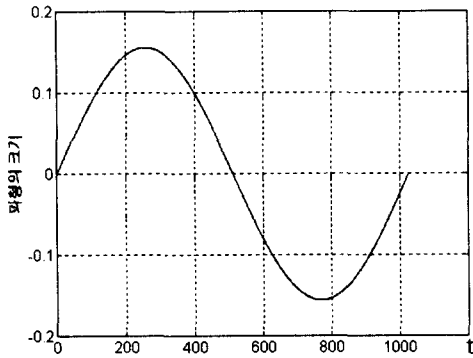
본 연구에서 제안된 방법에 의한 7고조파까지의 사례연구 결과는 표 1, 그림 3과 같다.

표 1. 제안된방법에 의한 고조파의 크기  
Table 1. Magnitudes of harmonics by proposed method

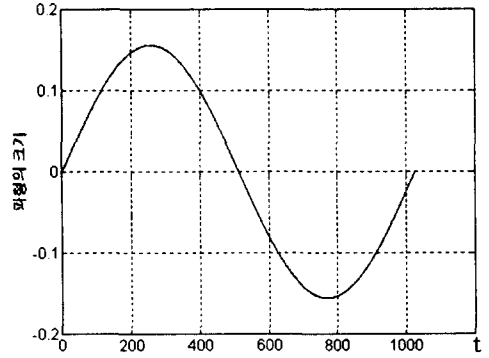
고조파 차수	시스템 1	시스템 2
1	1.5575e-1	9.690e-2
3	-2.6468e-1	-2.758e-6
5	1.0214e-8	6.124e-8
7	3.388e-12	-3.46e-12

$$\langle \text{시스템 1} \rangle : \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 13.7x(t) - \frac{1}{6} x^3(t) = 2 \sin \omega t, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad \omega = 0.92845$$

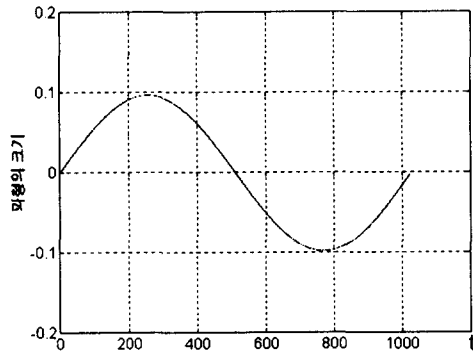
$$\langle \text{시스템 2} \rangle : \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 21.5x(t) - \frac{1}{6} x^3(t) = 2 \sin \omega t, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad \omega = 0.92845$$



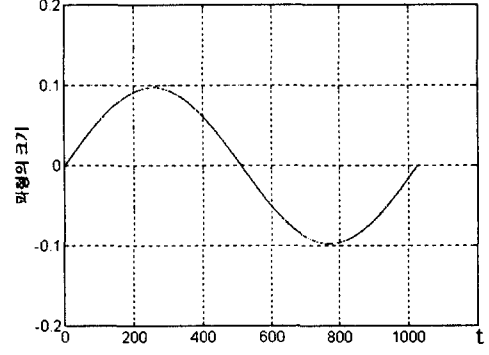
a. sys 1



a. sys 1



b. sys 2



b. sys 2

그림 3. 제안된 방법에 의한  $x(t)$ 의 파형  
Fig. 3. Curve of  $x(t)$  by proposed method

그림 4. 조파평형법에 의한  $x(t)$ 의 파형  
Fig. 4. Curve of  $x(t)$  by HBM

#### 4.2 조파평형법에 의한 사례연구 결과

조파평형법에 의한 사례연구 결과는 표 2, 그림 4와 같다.

표 2. 조파평형법에 의한 고조파의 크기  
Table 2. Magnitudes of harmonics of HBM

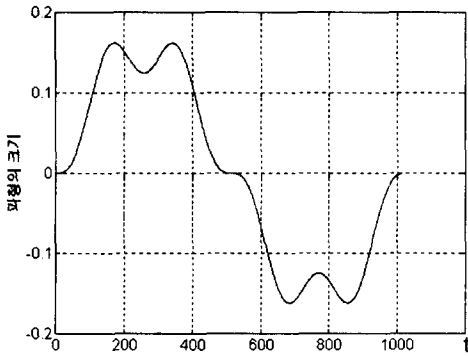
고조파 차수	시스템 1	시스템 2
0 ( $a_0$ )	-1.582e-10	0.0000000
1 ( $a_1$ )	1.5582e-1	0.0969142
3 ( $a_2$ )	7.9674e-5	0.0000082
5 ( $a_3$ )	-2.8404e-8	-0.0000002

#### 4.3 일반항 대입법에 의한 사례연구 결과

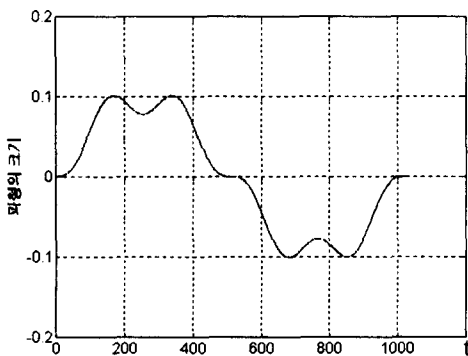
일반항대입법에 의한 사례연구 결과는 다음과 같다. 이 방법에 의한 고조파의 계산방법은 계산과정에서 얻게 되는 수많은 해집합 중에서 적절한 해를 찾기가 어려우며 따라서 해에 대한 별도의 확인 과정을 필요로 한다. 그리고 고조파의 해로 이루어진 연립방정식을 풀어서 그 크기를 얻게 되므로 고조파의 차수가 높아질수록 매우 많은 계산이 필요하여 결국은 실제 연립방정식의 계산이 가능한 범위 내에서의 고조파밖에 구하지 못하는 단점이 있다. 일반항 대입법에 의한 사례연구는 표 3, 그림 5와 같다.

표 3. 일반항 대입법에 의한 고조파의 크기  
Table 3. Magnitudes of harmonics of General Solution

고조파 차수	시스템 1	시스템 2
1	0.155828	0.0969147
3	-1.062e-5	-1.10422e-6
5	-3.115e-2	-0.0193823



a. sys 1



b. sys 2

그림 5. 일반항 대입법에 의한  $x(t)$ 의 파형  
Fig. 5. Curve of  $x(t)$  by General Solution

## 5. 검토 및 고찰

본 논문의 사례연구에 사용된 고조파해석 알고리즘의 장단점 및 그에 따른 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

### 1) 본 논문에서 제안한 해석적 알고리즘에 의한 방법

이 방법은 복잡한 수치적인 계산을 거치지 않고 계수비교만으로 고조파의 크기를 구하므로 계산시간이 빠르고 원하는 고조파의 계수까지 쉽게 구할 수 있었다. 이 방법을 사례연구 시스템에 적용한 결과 실제로 기본주파수와 제 3 고조파의 크기는 비교적 정확하게 구할 수 있으나 제 5 고조파 이상의 고조파의 크기는 약간의 오차가 발생하였다.

### 2) 기존의 해법에 의한 해석 결과

조파평형법을 이용한 방법은 계산 시간이 비교적 빠르다. 그러나 수치적인 계산과정을 거치므로 오차가 발생하여 누적 될 가능성이 클 뿐만 아니라 초기치를 적절히 선택하기가 어렵다. 실제로 제 3 고조파 이상은 다른 방법에 비하여 오차의 정도가 심하였다.

일반항 대입에 의한 방법은 많은 연립방정식을 풀어야 하므로 일정 차수이상의 고조파의 크기는 구할 수 없는 단점이 있으며 또한 계산 시간이 상대적으로 매우 길며 문제에 따른 적절한 해의 선별이 어렵다.

### 3) 사례연구를 통한 고조파해석 알고리즘의 결과비교

제안된 방법과 비교된 방법의 사례연구 결과를 비교하면 표 4와 같다.

이 결과로부터 알 수 있듯이 고조파해석에 있어서 정답을 찾기는 어려우며 여러 알고리즘이 모두 기본주파수의 경우는 서로 근사한 값을 보이지만 제 3 고조파의 경우는 그 차수의 정도가 비슷하고 제 5 고조파 이상은 오차가 발생하였다.

## 6. 결 론

장거리 송전선의 송전단 측에서 본 송전 계통은

표 4. 사례연구비교  
Table 4. Comparison of case studies

고조파	시스템 1			시스템 2		
	제안된 방법	조파 평형법	일반항 대입법	제안된 방법	조파 평형법	일반항 대입법
1	1.55e-1	1.55e-1	1.55e-1	9.69e-2	9.69e-2	9.691e-2
3	-2.64e-5	7.96e-5	-1.06e-5	-2.75e-6	8.2e-6	-1.104e-6
5	1.02e-8	-2.84e-8	-3.11e-2	6.12e-8	-0.2e-7	-1.938e-2

단일 부하설비로 증가화 할 수 있으며 그 비선형 특성을 3차 다항식으로 모델링 할 경우 송전선로에 발생하는 고조파는 Duffing 방정식의 형태로 모델링할 수 있다. 이와 같이 모델링된 비선형회로에서의 고조파해석을 위하여 기존의 여러 가지 Duffing 방정식의 해석방법의 성능을 검토하였으며 그 결과를 본 연구에서 Duffing 방정식의 해를 얻기위하여 새로이 제안한 해석적 접근방법과 비교함으로써 기존의 여러 방법이 갖는 계산부담을 줄일 수 있는 새로운 고조파해석 방법을 제시하였다.

본 논문에서 얻은 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

- 1) 송전계통의 비선형성에 의한 고조파발생 매카니즘을 현실적인 가정아래 Duffing 방정식으로 모델링하였으며, 그 해를 얻기위한 새로운 해석적 기법을 제시하였다.
- 2) 본 논문에서 제시한 해석적 접근방법은 복잡한 수치적인 계산을 거치지 않고 계수비교만으로 원하는 고조파의 계수까지 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있다.
- 3) 사례연구를 통하여, Duffing 방정식은 비주기성이 심하며, 어떤 해석 가능한 한정된 해 이외에는 구할 수 없으며, 따라서 비선형성이 심한 경우 현재로서는 고조파해석이 불가능하다는 점을 확인하였다.
- 4) 본 연구에서 제시된 방법은 기존 방법이 지니는 단점을 보완할 수 있음에도 불구하고 비선형성이 강한 문제나 시스템의 고유주파수와 구동주파수가 특수한 관계에 있는 경우 해가 쉽게 구해지지 않는다는 한계성이 있다.

본문에서 살펴본 바와 같이 본 연구에서 제시된 방법을 포함한 여러 방법 모두 나름대로의 오차요인이 있다. 그러나 여타 기존의 방법들은 수치적 계산을 많이 필요로 하거나 현실적으로 구할 수 있는 고

조파의 차수가 극히 제한적이다.

따라서 본 논문에서 제시한 알고리즘이 좀 더 보완된다면 복잡한 계산이 필요 없이 보다 용이한 해석적 방법에 의한 고조파해석이 가능할 것이다.

본 논문은 1993년도 기초전력공학 공동연구소의 전력기술기초연구비 지원에 의한 연구결과입니다.

참 고 문 헌

- [1] Harold T. Davis, "Introduction to Nonlinear Differential And Integral Equations", Dover.
- [2] 合原一幸, 徳永隆治, "カオス 應用戰略", オーム社
- [3] 午田明夫, 森眞作, "非線形回路の 數値解析法", 森北出版株式會社, 1987.
- [4] Ali Hasan Nayfeh, Dean. T. Mook, "Nonlinear Oscillations", Wiley Interscience, 1979.

◇ 저자소개 ◇

신 중 린 (愼重麟)

1949년 9월 10일생. 1977년 서울대 공대 전기공학과 졸업(학사). 1984년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 1989년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1977년~1984년 한전 전원계획처(부장대리). 1984년~1990년 한전 연구원 선임연구원. 1990년~1994년 건국대학교 전기공학과 조교수. 1994년~ 현재 건국대 공대 전기공학과 부교수

황 현 준 (黃鉉駿)

1969년 8월 4일생. 1994년 건국대 공대 전기공학과 졸업(학사). 1996년 2월 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 Posco개발 주식회사 철강사업2본부 근무

조 기 선 (曹基善)

1968년 1월 26일생. 1995년 건국대 공대 전기공학과 졸업(학사). 1998년 2월 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 건국대 대학원 전기공학과 박사과정