

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석 II : 수치적 방법

Spatial Stability of Non-Symmetric Thin-Walled Curved Beams II : Numerical Approach

민 병 철*
Min, Byoung-Cheol

김 문 영**
Kim, Moon-Young

요 지

본 논문에서는 연계논문에서 제시한 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보 및 직선보 이론을 토대로, 곡선보 요소 및 직선보 요소를 개발하고 이를 이용한 유한요소 정식화 과정을 제시한다. 유한요소 정식화 과정에서는 요소의 변위장을 도심에 대하여 정의한 후, 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하고 가우스 적분을 행함으로써 탄성 강도행렬 및 기하학적 강도행렬을 산정하였다. 얻어진 강도행렬을 이용하여 고유치 문제를 계산함으로써 좌굴하중을 계산하였으며 다양한 해석 예제를 통하여 다른 연구자들의 해석 결과와 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성과 우수성을 입증하고자 한다.

핵심용어 : 비대칭 단면, 3차원 좌굴, 원형곡선보, 박벽보, 유한요소법

Abstract

In a companion paper, for spatial stability of thin-walled curved beams with non-symmetric cross sections, a general formulation was derived with displacement parameters and the warping function defined at the centroid axis. It was presented based on the displacement field considering both constant curvature effects and the second order terms of semitangential rotations. Closed-form solutions were newly derived for the lateral-torsional buckling of monosymmetric thin-walled curved beams subjected to pure bending or uniform compression with simply supported boundary conditions based on the inextensibility condition. In this paper, in order to get numerical solutions for the buckling of thin-walled curved beams subjected to general loadings, finite element procedures are developed by using thin-walled curved beam element and straight frame element with non-symmetric section. Numerical examples for the spatial buckling of doubly symmetric, monosymmetric, and non-symmetric thin-walled circular beams are presented in order to illustrate the accuracy and the practical usefulness of the analytical and numerical solutions. Analytical solutions and numerical solutions using the thin-walled curved beam element and straight frame element are presented and compared with other researchers' solutions.

Keyword : non-symmetric cross section; semitangential rotation; spatial buckling; circular curved beam; thin-walled beam; finite element method

* 성균관대학교 토목공학과, 박사과정
** 성회원·성균관대학교 토목공학과, 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

연계논문²²⁾ (I : 해석적 방법)에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 안정성 해석을 수행하기 위한 적절한 해석 이론을 개발하기 위하여, 3차원 연속체로부터 유도된 선형화된 가상일의 원리를 제시하였다. 변위 파라미터와 뒹함수를 도함에 대하여 정의하고 휨과 비틀림의 연계효과를 정확히 고려하기 위하여 semitangential rotation으로 정의된 단면회전의 2차항을 고려함으로써 일반화된 비대칭 박벽 곡선보의 좌굴이론을 제시하였다. 또한, 비신장 조건 (inextensibility condition)을 도입하고 순수휨 및 균일압축을 받는 경우에 대하여 단순지지된 일축대칭 박벽 곡선보의 면내 및 면외좌굴하중에 대한 엄밀해를 유도하였다. 본 논문에서는 연계논문에서 제시한 박벽보 이론을 토대로 박벽 곡선보 요소 및 직선보 요소를 개발하고 이를 이용하여 일반화중을 받는 박벽곡선보의 안정성해석을 수행하였다. 개발된 유한요소 정식화 과정에서는 요소의 변위장을 박벽단면의 도함에 대하여 정의한 후, 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 5점 가우스 적분을 행함으로써 탄성 강도행렬 및 기하학적 강도행렬을 산정하고 변환행렬을 이용하여 곡률효과를 고려하였다. 고유치 문제는 Jacobi의 방법을 사용하여 좌굴하중을 계산하였으며 다양한 해석 예제를 통하여 다른 연구자들의 해석 결과와 본 연구에서 얻어진 엄밀해의 결과를 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성과 우수성을 입증하고자 한다.

2. 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지

총포텐셜에너지 Π 는 탄성변형에너지 Π_E 와 초기응력으로 인한 포텐셜에너지 Π_C 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_C \quad (1)$$

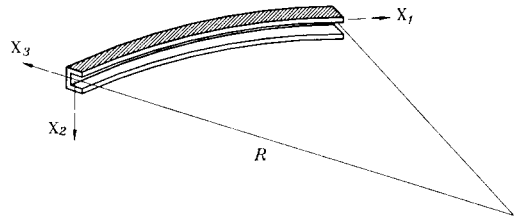


그림 1 박벽 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계

총포텐셜에너지 Π 를 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(U_1' + \frac{U_2}{R} \right)^2 + EI_2 \left(U_1'' + \frac{U_2}{R^2} \right)^2 \right. \\ & + EI_3 \left(U_3'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 + GJ \left(\theta' + \frac{U_3'}{R} \right)^2 + EI_4 \left(\theta'' + \frac{U_3''}{R} \right)^2 \\ & - 2EI_{23} \left(U_3'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(U_1'' + \frac{U_2}{R^2} \right) \\ & + 2EI_{33} \left(U_3'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\theta'' + \frac{U_3''}{R} \right) \\ & \left. + 2EI_{42} \left(U_1'' + \frac{U_2}{R^2} \right) \left(\theta'' + \frac{U_3''}{R} \right) \right] dx_1 \quad (2) \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[F_1 \left\{ U_3'^2 + \left(U_1' - \frac{U_2}{R} \right)^2 \right\} \right. \\ & + M_4 \left(\theta' + \frac{U_3'}{R} \right)^2 - F_3 (U_3' \theta) \\ & + M_3 \left(\theta U_3'' - U_3' \theta - \frac{U_3'^2}{R} - \frac{\theta^2}{R} \right) \\ & + 2 \frac{M_2}{R} \left(U_1' - \frac{U_2}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_3'}{R} \right) \\ & + M_3 \left\{ \theta \left(U_1'' - \frac{U_2'}{R} \right) - \left(U_1' - \frac{U_2}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_3'}{R} \right) \right\} \\ & + F_2 \theta \left(U_1' - \frac{U_2}{R} \right) + M_1 \left\{ \left(U_1' - \frac{U_2}{R} \right) \left(U_3'' - \frac{\theta}{R} \right) \right. \\ & \left. - U_3' \left(U_1'' - \frac{U_2'}{R} \right) \right\} \right] dx_1 \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 변위 파라미터와 단면력 및 단면계수는 연계논문 (I: 해석적 방법)에서 정의된 바 있다.

3. 유한요소 정식화

본 연구에서는 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여 직선보 및 곡선보 요소를 이용한 두 가지 형태의 유한요소를 개발하여 제시한다. 두 요소의 변위장은 모두 도심축에 대하여 정의되었으며 뒀과 유한한 회전각의 2차항을 고려하였다. 형상함수는 비교적 간단하며 박벽 곡선보의 거동을 거의 정확하게 나타낼 수 있는 3차의 Hermitian 다항식을 이용하였고 요소의 자유도는 그림 2와 3에서와 같이 곡선보 요소는 8개, 직선보 요소는 7개를 갖는다.

3.1 박벽 곡선보요소

그림 2는 구속된 비뚤에 의한 뒀을 고려한 박벽 곡선보요소의 재단변위벡터를 표시한 것이다. 일반화된 좌표들 (U_x, U_y, U_z, θ)을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 논문에서 8개의 자유도를 갖는 2절점 3차의 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 2를 참조하여 위의 사항들을 고려하면 박벽 곡선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = h_1 \cdot u^p + h_2 \cdot L \cdot g^p + h_3 \cdot u^q + h_4 \cdot L \cdot g^q \quad (4a)$$

$$U_y = h_1 \cdot v^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_2^p + h_3 \cdot v^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (4b)$$

$$U_z = h_1 \cdot \omega^p - h_2 \cdot L \cdot \omega_2^p + h_3 \cdot \omega^q - h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (4c)$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot L \cdot f^p + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L \cdot f^q \quad (4d)$$

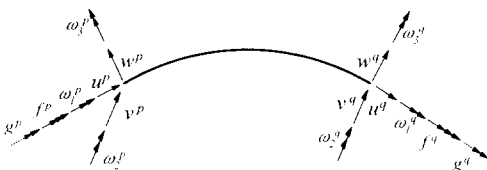


그림 2 곡선보 요소의 변위벡터

여기서

$$\begin{aligned} u^p &= U_x(0), \quad v^p = U_y(0), \quad w^p = U_z(0) \\ \omega_1^p &= \theta(0), \quad \omega_2^p = -U_x'(0), \quad \omega_3^p = U_y'(0) \\ f^p &= -\theta'(0), \quad g^p = U_x''(0) \end{aligned} \quad (5)$$

그리고 h_i 는 3차의 Hermitian 다항식으로써 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L \\ h_3 &= -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad h_4 = (\xi^3 - \xi^2)L \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\xi = x/L$$

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보에 임의의 하중이 작용하는 경우, 단면력 F_x, M_x, M_y 그리고 M_z 가 결정되면 Wagner 효과로 알려진 단면력 M_w 가 계산되어짐을 연계논문에서 유도하였다. 얻어진 단면력을 기하학적인 강도행렬에 대입하고 식 (4)를 식 (2)와 (3)에 적용하면, 다음과 같이 박벽 곡선보 요소에 대한 행렬운동방정식을 얻을 수 있다.

$$(K_e + K_w)U_e = F_e \quad (7)$$

여기서

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \quad (8a)$$

$$F_e = \langle F_x^p, F_y^p, F_z^p, M_x^p, M_y^p, M_z^p, M_w^p, F_x^q, F_y^q, F_z^q, M_x^q, M_y^q, M_z^q, M_w^q, F_x^q, F_y^q \rangle \quad (8b)$$

위 식에서 K_w 와 K_e 는 각각 요소좌표계에 대한 16×16 탄성 및 기하학적 요소강도 행렬이고 U_e 와 F_e 는 각각 구속된 뒀 효과를 고려한 절점변위 및 하중벡터를 나타낸다. 그리고 식 (8a)에서 회전 및 축방향 변위성분은 곡률효과를 고려하여 다음과 같은 변환관계가 성립한다.

$$\omega_2^q = -U_x'(0) + \frac{U_x(0)}{R} = \omega_2^p + \frac{u^p}{R} \quad (9a)$$

에너지 Π_E 와 초기 응력으로 인한 포텐셜에너지를 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^L [EAU_x''^2 + EI_3U_v''^2 + EI_2U_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_4\theta''^2 + 2EI_{33}U_v''\theta' + 2EI_{22}U_z''\theta'] dx \quad (17a)$$

그리고

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^L [F_1(U_v'^2 + U_z'^2) + M_1(U_z'U_v'' - U_z''U_v') \\ & + M_2(U_v''\theta - U_v'\theta') + M_3(U''\theta - U_z'\theta') + M_4\theta'^2 \\ & + F_2U_z'\theta + F_3U_v'\theta] dx \end{aligned} \quad (17b)$$

위 식에서 변위 파라미터와 단면력은 도심에 대하여 정의되었으며 7개의 자유도를 갖는 2절점 3차의 Hermitian 다항식을 사용하는 경우, 박벽 직선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = (1 - \xi)u^p + \xi u^q, \quad \xi = x/l \quad (18a)$$

$$U_v = h_1 \cdot v^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_1^q + h_3 \cdot v^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (18b)$$

$$U_z = h_1 \cdot w^p - h_2 \cdot L \cdot \omega_1^q + h_3 \cdot w^q - h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (18c)$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h^2 \cdot L \cdot f^p + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L \cdot f^q \quad (18d)$$

식(18)을 식(17)의 총포텐셜에너지 식에 대입하면, 식(19)와 같은 박벽 직선보요소에 대한 행렬운동방정식을 얻을 수 있다.

$$(K_e + K_e)U_e = F_e \quad (19)$$

여기서

$$U_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^q, \omega_2^q, f^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, f^q \rangle \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} F_e = & \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_4^q, F_1^q, F_2^q, F_3^q, \\ & M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_4^q \rangle \end{aligned} \quad (20b)$$

위 식에서 K_e 와 K_e 는 각각 요소좌표계에 대한 14×14 탄성 및 기하학적 요소 강도행렬이고 U_e 와 F_e 는 각각 구속된 뒎 효과를 고려한 절점변위 및 하중벡터를 나타낸다. 결국, 얻어진 요소강도행렬을 전체강도행렬로 변환하여 고유치 문제를 해결함으로써 비대칭 단면을 갖는 박벽 직선보의 좌굴하중을 산정할 수 있다.

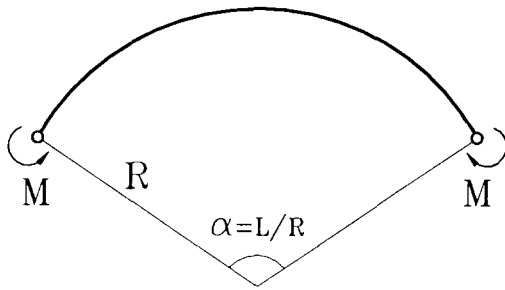
4. 해석 예제

본 연구에서는 박벽 원형 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여, 비대칭 단면을 갖는 곡선보에 대하여 유한요소 정식화 과정을 제시하고 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 곡선보에 대하여는 엄밀해(연계논문²²)를 제시하였다. 본 연구에 의하여 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보 요소를 이용하여 대칭 및 일축대칭 단면을 갖는 단순지지된 아치와 캔틸레버 아치 등 다양한 3차원 좌굴해석을 수행하였으며 해석결과를 다른 연구자들의 엄밀해 및 박벽 직선보 요소를 이용한 해석과 범용 프로그램인 ABAQUS의 쉘요소를 이용하여 비교하였다. 본 연구에서 제시한 박벽보를 이용한 유한요소해석에서는 단위요소 당 길이가 가장 길어지는 경우(360°)에 대하여 수렴을 보이는 곡선보와 직선보의 요소의 수를 선택하였다. 얻어진 결과로부터 곡선보 요소는 아치의 전체구조에 대하여 20개를 사용하였고, 직선보 요소를 이용할 경우에는 아치형상의 기하학적인 대칭성을 고려하여 전체 아치의 절반만을 50개의 요소로 모형화하였다.

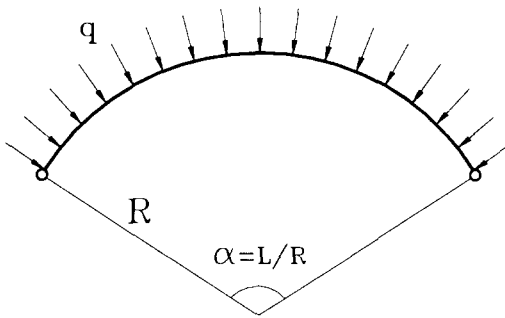
4.1 일축 대칭단면을 갖는 단순지지된 박벽 곡선보(X-Z 평면에 대하여 대칭단면)

그림 4는 순수 휨 또는 균일압축을 받는 단순지지된 박벽 원형아치를 보여주고 있다. 아치에 대한 호의 길이는 전체구조에 대하여 일정하게 유지하고 각도만을 변화시키며 순수휨을 받는 경우와 균일압축을 받는 경우에 대하여 면내 및 면외 좌굴해석을 수행하였다.

본 예제에서는 X-Z평면에 대하여 대칭인 일



(a) 정모멘트를 받는 곡선보

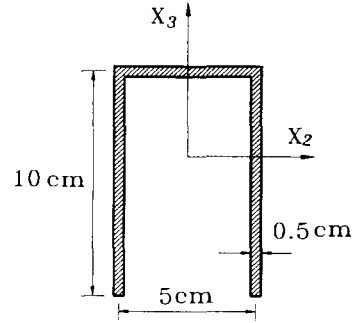


(b) 균일압축을 받는 곡선보

그림 4 단순지지된 박벽 곡선보

축대칭 박벽단면을 갖는 단순지지된 아치의 3차원 좌굴거동을 파악하기 위하여 균일압축 및 순수휨이 작용하는 경우에 대해 대칭 및 역대칭 좌굴모드를 갖는 면내 및 면외 좌굴해석을 수행하였다. 본 연구에서 제시한 부록 I의 방법에 의하여, 주어진 일축대칭 단면의 단면계수를 계산하고 연계논문(I: 해석적 방법)의 식(18)을 이용하여 도심축에서 정의된 단면계수로 변환하여 나타내면 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A &= 12.5\text{cm}^2, E = 73,000\text{kg/cm}^2, G = 28,000\text{kg/cm}^2, \\
 J &= 1.04167\text{cm}^4, e_2 = 0.0\text{cm}, e_3 = 8.61538\text{cm}, \\
 I_2 &= 133.38542\text{cm}^4, I_3 = 67.91667\text{cm}^4, \\
 I_{\phi} &= 5682.1302\text{cm}^6, I_{\phi 2} = 0.0\text{cm}^5, I_{\phi 3} = -585.12821\text{cm}^5, \\
 I_{222} &= -100.0\text{cm}^5, I_{233} = 0.0\text{cm}^5, I_{233} = -41.666667\text{cm}^5, \\
 I_{333} &= 0.0\text{cm}^5, I_{\phi\phi 2} = 7465.7298\text{cm}^7, I_{\phi\phi 3} = 0.0\text{cm}^7, \\
 I_{\phi 22} &= 0.0\text{cm}^6, I_{\phi 33} = 0.0\text{cm}^6, I_{\phi 23} = -282.05128\text{cm}^6,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_2 &= -0.95547\text{cm}, \hat{\beta}_3 = 0.0\text{cm}, \beta_{\phi} = 0.0\text{cm}, \\
 \beta_1 &= 16,10417\text{cm}^2, \beta_2 = -1.06209\text{cm}, \\
 \beta_3 &= 0.0\text{cm}, \beta_{\phi} = 0.0\text{cm},
 \end{aligned}$$

아치 전체에 대하여 길이가 250cm로 일정하고 각도만을 변화시키며 순수휨을 받는 단순지지된 아치의 면외 좌굴해석을 수행하여 표 1에 제시하였다. 또한, 단면계수에 고려되는 비대칭성과 곡률효과를 파악하기 위하여, 이후의 예제부터는 엄밀해에 대해서 두 가지 방법을 이용하여 해석하였다. 방법 1은 연계논문(I: 해석적 방법)의 식(38)을 그대로 이용한 것이고 방법 2는 연계논문(I)의 식(38)에서 1/R을 포함하는 항을 무시함으로써 R에 의해 나누어지는 단면의 비대칭성 단면계수를 무시한 경우이다. 그 결과, 방법 2에 의한 원형아치의 좌굴 해석결과가 방법 1에 의한 해석결과와 직선보 요소를 이용한 해석결과와 중간 값 정도를 나타내었다. 결국, 방법 1에 의한 엄밀해가 직선보 요소에 의한 결과보다 정확하며 본 연구에서 제시한 이론이 다른 연구자의 해석결과에 비해 타당하다는 것을 추론할 수 있다. 표 1에 나타난 바와 같이 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보 요소에 의한 해석결과가 Vlasov 및 직선보 요소를 이용한 해석결과와 비교적 잘 일치하고 있으며 Papangelis의 결과와는 다소 큰 차이를 나타내고 있다.

표 2는 그림 4(b)에서와 같이 균일압축을 받는 경우에 대하여 축방향 좌굴하중 $F_{cr}^{\phi} (= q_{cr} \cdot R)$ 을 산정하여 제시한 것이다. 앞의 예제에서와 같

표 1 순수휨을 받는 박벽 곡선보의 면외좌굴 모멘트 M_x^0 , $L=250cm$

mode	angle (degree)	present study				Vlasov	Papangelis and Trahair
		analytical solution		FEM			
		method 1	method 2	curved beam	straight beam		
Symm.	0	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73
	30	-7410.42 3752.86	-7423.40 3740.32	-7409.59 3753.31	-7444.71 3731.67	-7547.99 3686.50	-7430.67 3640.68
	60	-2630.87 9660.56	-2640.85 9593.54	-2630.39 9662.60	-2658.20 9553.12	-2727.74 9326.64	-2461.98 9185.26
	90	-1135.74 18875.7	-1139.47 18725.0	-1135.62 18879.3	-1150.97 18653.2	-1177.07 18236.4	-889.707 18094.9
	180	0.0 50010.5	0.0 49467.9	0.0 50017.5	-11.4906 49333.2	0.0 48440.5	0.0 48334.9
	270	435.780 82057.0	436.032 80892.1	435.875 82066.8	419.421 80724.3	450.743 79371.0	-564.026 79286.8
	360	751.479 114439.	751.363 112418.	751.874 114450.	726.743 112245.	777.578 110425.	-2334.09 110358.
	Antisymm.	0	-60335.7 3048.08	-60335.7 3048.08	-60335.7 3048.09	-60335.6 3048.08	-60335.7 3048.08
30		-49680.4 3675.79	-49731.2 3664.47	-49676.6 3676.20	-49839.8 3536.92	-50404.1 3623.34	-50271.0 3607.70
60		-39262.9 4553.57	-39378.9 4521.66	-39255.0 4554.79	-39581.9 4500.28	-40670.2 4396.33	-40360.6 4307.00
90		-29288.3 5887.03	-29473.5 5814.70	-29277.4 5889.96	-29749.3 5765.90	-31279.2 5512.10	-30724.5 5260.89
180		-7589.02 18193.0	-7744.72 17619.3	-7584.37 18214.6	-7949.83 169168.	-9214.89 14968.3	-7555.16 13692.4
270		-1736.13 46475.4	-1759.57 45082.5	-1735.55 46513.5	-1824.77 441253.	-2046.27 39320.2	-919.194 38295.7
360		0.0 79014.8	0.0 76695.5	0.0 79061.8	-53.8885 75835.7	0.0 68794.4	0.0 68115.8

표 2 균일압축을 받는 박벽 곡선보의 면외좌굴 하중 F_x^0 , $L=250cm$

mode	angle (degree)	present study			
		analytical solution		FEM	
		method 1	method 2	curved beam	straight beam
Symm.	0	278.430	278.430	278.431	278.431
	30	466.618	468.054	76.0642	76.2852
	60	76.0592	76.6479	19.9688	20.0200
	90	19.9688	20.0200	19.9690	20.2843
	180	0.0	0.0	0.00067	0.002729
	270	4.62555	4.62971	4.62550	4.30883
	360	14.3908	14.3963	14.3899	13.6717
Antisymm.	0	552.765	552.765	552.766	552.766
	30	1011.34	1006.39	1011.05	1006.58
	60	2037.49	2014.92	2035.91	2016.14
	90	2195.10	2217.34	2193.19	2220.77
	180	211.867	214.607	211.880	217.243
	270	23.5642	23.8010	23.5664	25.0300
	360	0.0	0.0	0.0026841.8	0.02664

이 방법 2에 의한 해석결과는 방법 1의 해석결과와 직선보 요소를 이용한 유한요소 해석결과의 중간 값을 나타내었다. 또한, 대칭 좌굴모드 및 역대칭 좌굴모드에 대한 면외좌굴 해석 결과가 전 각도에 걸쳐 서로 잘 일치하였다.

표 3은 균일압축에 의하여 역대칭 좌굴모드를 갖는 박벽 원형아치의 면내 좌굴하중 F_{cr}^0 을 산정하여 나타낸 것이다. 방법 2에 의한 해석결과는 직선보 요소를 이용한 해석 결과와 근접하였고 방법 1에 의한 해석결과는 곡선보 요소를 이용한 해석결과와 보다 잘 일치하였다. 표 3에서 아치의 내부 각이 360° 인 경우, 즉 완전한 링인 경우에는 회전에 대하여 강체 거동하므로 면내 좌굴하중 F_{cr}^0 은 '영'이 된다.

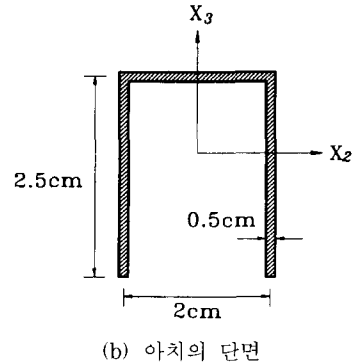
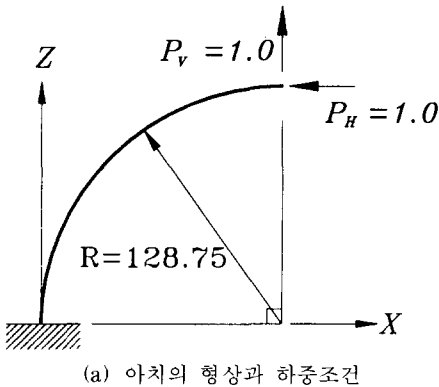


그림 5 X_3 축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치

4. 2 일축 대칭단면을 갖는 캔틸레버 아치 (X-Z 평면에 대하여 대칭단면)

그림 5는 자유단에 수평 및 수직하중을 받는 캔틸레버 아치를 나타낸 것이다. 아치의 단면은 그림 5(b)에서와 같이 X-Z평면에 대하여 대칭인 일축대칭 박벽 구조이며 단면계수는 본 논문의 부록 I에 제시한 방법을 이용하여 계산하고 도심축에 대한 단면계수로 변환함으로써 얻어진다. 결국, 캔틸레버 아치의 안정성 해석에 사용된 재료상수 및 단면계수는 다음과 같다.

$$A=3.5\text{cm}^2, E=30,000\text{kg/cm}^2, G=11,500\text{kg/cm}^2$$

$$J=0.29167\text{cm}^4, e_2=0.0\text{cm}, e_3=1.9958\text{cm}$$

$$I_2=2.43899\text{cm}^4, I_3=2.88542\text{cm}^4, \beta_p=13.25487\text{cm}^6$$

표 3 균일압축을 받는 박벽 곡선보의 면내좌굴 하중 F_{cr}^0 , $L=250\text{cm}$

mode	angle (degree)	present study			
		analytic solution		FEM	
		method 1	method 2	curved beam	straight beam
Symm.	30	6159.56	6149.91	6159.37	6149.92
	60	6159.76	6140.48	6158.83	6140.54
	90	6125.02	6096.31	6123.18	6096.87
	180	5077.34	5029.95	5075.20	5027.28
	270	1444.51	1424.38	1442.51	1416.87
	360	0.0	0.0	0.00285	0.00001

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0.0\text{cm}^5, & I_{\phi} &= -5.75871\text{cm}^5, & I_{222} &= -0.79719\text{cm}^5 \\ I_{223} &= 0.0\text{cm}^5, & I_{233} &= -0.59524\text{cm}^5, & I_{333} &= 0.0\text{cm}^5 \\ I_{\phi\phi 2} &= 4.15555\text{cm}^7, & I_{\phi\phi 3} &= 0.0\text{cm}^7, & I_{\phi 22} &= 0.0\text{cm}^6 \\ I_{\phi 23} &= -0.57367\text{cm}^6, & I_{\phi 33} &= 0.0\text{cm}^6, & \hat{\beta}_1 &= 0.52434\text{cm}^2 \\ \hat{\beta}_2 &= -0.55766\text{cm}, & \hat{\beta}_3 &= 0.0\text{cm}, & \hat{\beta}_\phi &= 0.0 \\ \beta_1 &= 1.52126\text{cm}^2, & \beta_2 &= -0.57091\text{cm} \\ \beta_3 &= 0.0\text{cm}, & \beta_\phi &= 0.0 \end{aligned}$$

본 예제는 외력에 의한 내력분포가 전단력, 휨 모멘트 그리고 축방향력이 함께 발생하는 경우이며 전체 구조와 단면형상이 갖는 특성으로 인해서 아치의 면내 및 면외거동이 연계되지 않는다. 여기서 곡률반경 R은 곡률중심에서 단면 도심까지의 거리이며 단면의 두께는 구조물 전체에 대하여 일정하다.

캔틸레버 아치의 안정성 해석을 수행하기 위하여, 전체 아치구조에 대해 20개의 곡선보 요소를 이용하여 모형화하였고 직선보를 이용한 해석에서는 50개 요소를 사용하였다. ABAQUS를 이용한 해석에서는 단면에 대하여 14개, 길이방향으로 100개를 이용하여 총 1400개의 쉘요소를 사용하였으며 쉘요소는 9절점 감차적분을 적용하였다. 표 4는 캔틸레버의 자유단에 수평하중 P_H 와 수직하중 P_V 가 각각 작용하는 경우와 그 반대 방향으로 각각 작용하는 경우에 대하여 좌굴 해석 결과를 나타낸 것이다. 표에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구에서 제시한 곡선보 요소에 의한 해석결과가 ABAQUS를 이용한 해석결과와 일치하고 있으나 직선 요소를 이용한 해석 결과

표 4 X₃축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치의 좌굴하중

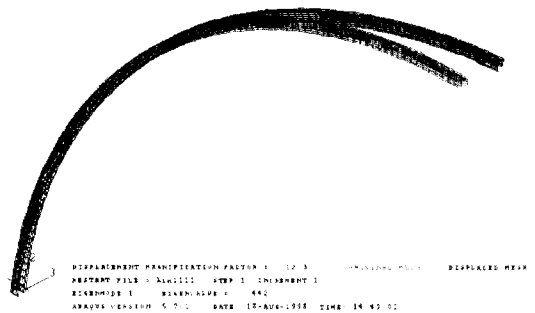
buckling loads	thin-walled curved beam element	thin-walled straight frame element	ABAQUS (shell elements)
$(P_H)_{cr}$	0.49678 -7.5682	0.52883 -7.5288	0.44223 -7.2678
$(P_V)_{cr}$	1.5954 -5.3530	1.4037 -5.7644	

는 수평력이 작용하는 경우에 대하여 다소 큰 차이를 보여주고 있다.

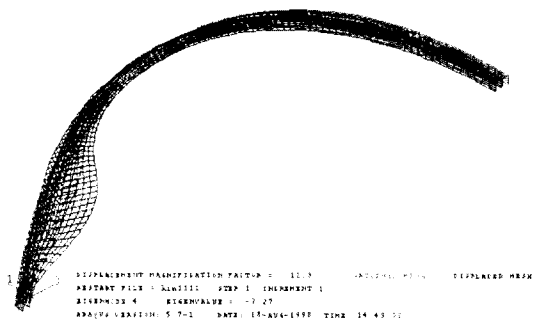
그림 6과 그림 7은 각각 수평 및 수직하중이 작용하는 경우에 대하여 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드(1st buckling mode)를 나타낸 것이며 그림 6(b)는 캔틸레버 하단에서 과도한 회전이 발생하였으나 국부좌굴은 발생하지 않았다.

5.3 일축단면을 갖는 캔틸레버 아치 (X-Y 평면에 대하여 대칭단면)

그림 8은 X-Y평면에 대하여 대칭인 일축대칭 단면을 갖는 박벽 캔틸레버 아치를 나타낸 것이다. 하중조건은 앞의 예제와 같으며 도심축에 대한 단면계수 및 재료상수는 다음과 같다.

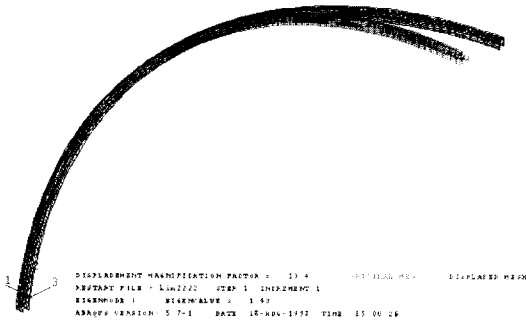


(a) 정방향 수평하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = 0.44223$ N)

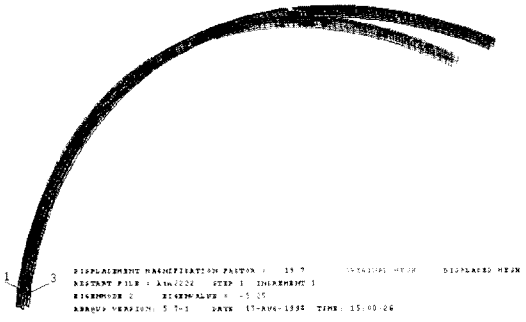


(b) 부방향 수평하중이 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = -7.2678$ N)

그림 6 수평하중 P_H 를 받는 박벽 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드(ABAQUS - 쉘요소)



(a) 정방향 수직하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = 1.4264$ N)

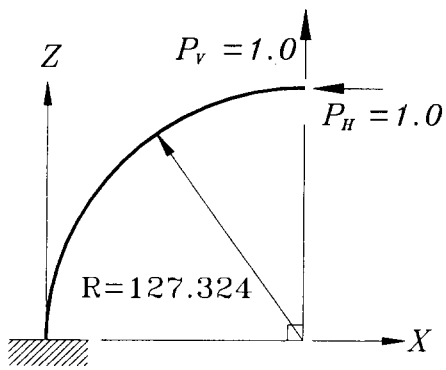


(b) 부방향 수직하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = -5.2477$ N)

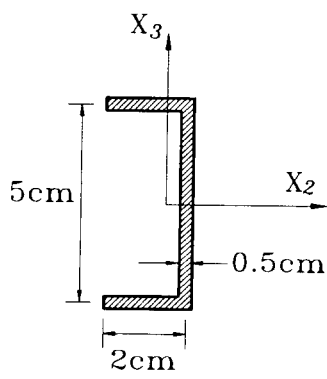
그림 7 수직하중 P_v 를 받는 박벽 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드(ABAQUS - 쉘요소)

$$\begin{aligned}
 A &= 4.5\text{cm}^2, \quad E = 30,000\text{kg/cm}^2, \quad G = 11,500\text{kg/cm}^2 \\
 J &= 0.375\text{cm}^4, \quad e_2 = 1.15033\text{cm}, \quad e_3 = 0.0\text{cm} \\
 I_2 &= 17.7500\text{cm}^4, \quad I_3 = 1.82986\text{cm}^4, \quad I_\phi = 31.33086\text{cm}^5 \\
 I_{\phi 2} &= -20.41830\text{cm}^5, \quad I_{\phi 3} = 0.0\text{cm}^5, \quad I_{222} = 0.0\text{cm}^5 \\
 I_{223} &= -4.62963\text{cm}^5, \quad I_{233} = 0.0\text{cm}^5, \quad I_{333} = -1.23457\text{cm}^5 \\
 I_{\phi\phi 2} &= 0.0\text{cm}^7, \quad I_{\phi\phi 3} = -28.38363\text{cm}^7, \quad I_{\phi\phi 22} = 0.0\text{cm}^6 \\
 I_{\phi 23} &= -13.16872\text{cm}^6, \quad I_{\phi 33} = 0.0\text{cm}^6, \quad \hat{\beta}_1 = 4.35072\text{cm}^2 \\
 \hat{\beta}_2 &= 0.05524\text{cm}, \quad \hat{\beta}_3 = 3.20281\text{cm}, \quad \hat{\beta}_\phi = -0.02025 \\
 \beta_1 &= 4.35108\text{cm}^2, \quad \beta_2 = 0.0\text{cm}, \quad \beta_3 = 3.20472\text{cm} \\
 \beta_\phi &= 0.0
 \end{aligned}$$

본 예제는 전단력, 휨모멘트와 축방향력이 함께 작용하며 아치의 면내 및 면외거동이 서로 연계됨으로써 완전 비대칭 단면을 갖는 아치를 해석하는 것과 같은 경우이다. 곡률반경 R 은 곡률중심에서 단면 도심까지의 거리이며 단면의 두께는 구조물 전체에 대하여 일정하다. 아치의 좌굴해석을 수행하기 위하여 곡선보와 직선보를 이용한 유한요소 해석은 이전의 예제와 같이 각각 20개와 50개 요소를 이용하여 모형화하였고 ABAQUS를 이용한 해석에서는 단면에 대하여 9개, 길이방향으로 200개를 이용하여 총 1800개의 쉘요소를 사용하였다. 그림 9와 10은 각각 수평 및 수직하중이 작용하는 경우에 대하여 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드를 나타



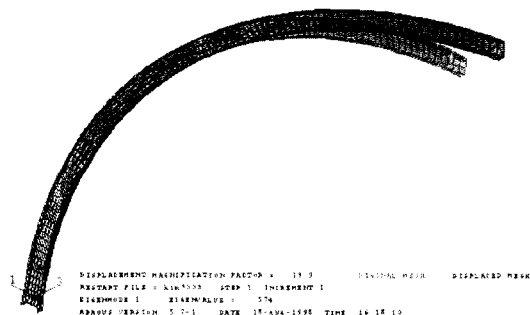
(a) 아치의 형상과 하중조건



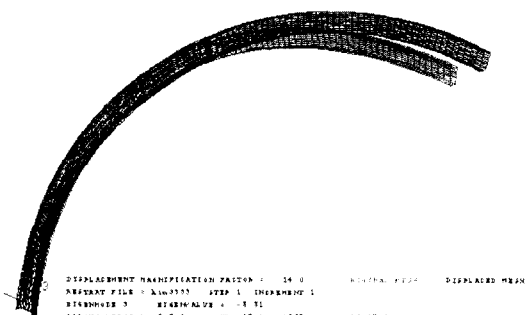
(b) 아치의 단면

그림 8 X_2 축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치

낸 것으로 전형적인 횡좌굴거동을 보이고 있으며 국부좌굴은 발생하지 않았다. 표 5는 캔틸레버의 자유단에 수평하중 P_H 와 수직하중 P_V 가 각각 작용하는 경우와 그 반대 방향으로 각각 작용하는 경우에 대하여 좌굴하중을 나타낸 것



(a) 정방향 수평하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = 0.57390$ N)

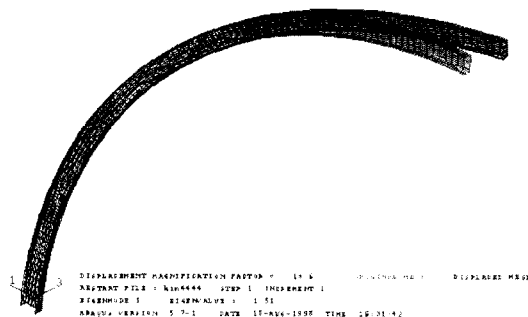


(b) 부방향 수평하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = -8.8110$ N)

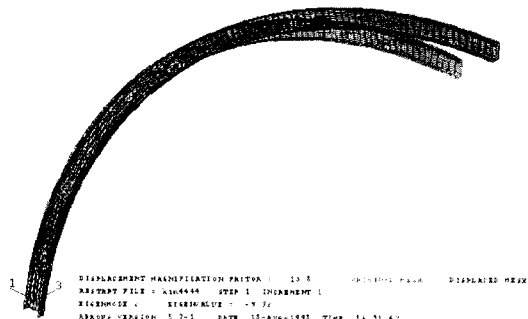
그림 9 수평하중 P_H 를 받는 박벽 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드 (ABAQUS - 쉘요소)

표 5 X_2 축에 대하여 대칭인 박벽 캔틸레버 아치의 좌굴하중

buckling loads	thin-walled curved beam element	thin-walled straight frame element	ABAQUS (shell elements)
$(P_H)_{cr}$	0.62444 -9.0317	0.70363 -9.9560	0.57390 -8.8110
$(P_V)_{cr}$	1.6274 -3.9598	1.7058 -3.9698	1.5061 -3.9239



(a) 정방향 수직하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = 1.5061$ N)



(b) 부방향 수직하중 작용시 좌굴모드 ($P_{cr} = -3.9239$ N)

그림 10 수직하중 P_V 를 받는 박벽 캔틸레버 아치의 1차 좌굴모드 (ABAQUS - 쉘요소)

으로 세 가지 해석방법에 의한 결과가 비교적 잘 일치하고 있다.

5. 결 론

연계논문(I: 해석적 방법)에서는 3차원 연속체에 대한 평형방정식으로부터 유도된 선형화된 가상일의 원리를 적용하고 박벽단면의 구속된 뒤과 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하여 단면에 대해 적분함으로써 3차원 좌굴해석을 수행하기 위한 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였고 단순지지된 곡선보의 면내 및 면외에 대한 엄밀해를 제시하였다. 본 논문에서는 연계논문에서 제시한 총포텐셜에

니지를 토대로 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보 요소 및 직선보 요소를 개발하였고 이를 이용한 유한요소를 정식화 과정을 제시한다. 유한요소 정식화 과정에서는 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 탄성 강도행렬 및 기하학적 강도행렬을 산정하고 변환행렬을 이용하여 곡률 효과를 고려하였다. Jacobi의 방법을 이용한 고유치 해석을 통하여 좌굴하중을 계산하였으며 다양한 해석 예제를 통하여 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 다른 연구자들의 해석 결과와 비교한 결과, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1) 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면내 및 면외에 대한 안정성해석을 수행한 결과, 순수휨이 작용하는 경우에는 본 연구에서 제시한 곡선보의 좌굴하중이 Vlasov의 결과와는 비교적 잘 일치하였으나 Papangelis의 결과와는 다소 큰 차이를 나타내었으며 균일압축이 작용하는 경우에는 전 각도에 걸쳐서 면내 및 면외좌굴 하중이 본 연구에서 제시한 방법들 간에 비교적 잘 일치하는 결과를 보였다.

2) 면내와 면외거동이 연계되지 않는 일축대칭(X-Z평면에 대하여 대칭) 단면을 갖는 캔틸레버 아치의 좌굴 해석을 수행한 결과, 본 연구에서 제시한 곡선보 및 직선보 요소에 의한 유한요소 해석결과가 ABAQUS를 이용한 해석결과와 비교적 잘 일치하였다.

3) 면내와 면외거동이 서로 연계되는 일축대칭(X-Y평면에 대하여 대칭) 단면을 갖는 캔틸레버 아치의 좌굴 해석을 수행한 결과, 본 연구에서 제시한 박벽 곡선보 요소에 의한 유한요소 해석결과가 ABAQUS를 이용한 해석결과와 비교적 잘 일치하였으나 직선보 요소를 이용한 해석 결과는 다소의 차이를 나타내었다.

4) 본 연구에서는 임의의 지지조건과 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보에 대한 유한요소를 개발하였으며, 연계논문에서는 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 원형 아치의 면내 및 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도함으로써 곡선보가 이용되는 제반 구조물의 해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 성균관대학교의 산업설비 안전성 평가센터(SAFE)의 연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Timoshenko, S.P., and Gere, J.M.(1961). Theory of elastic stability. 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y.
2. Vlasov, V.Z.(1991). Thin-walled elastic beams. 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C.
3. Barsoum, R.S., and Gallagher, R.H. (1970). "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems" Int. J. Numer. Methods in Engrg., 2(3), pp.335~352.
4. Meek, J.L., and Swannell, P. (1977). "The lateral-torsional buckling problem reviewed from virtual displacement principles" Civil Eng. Trans. Inst. Engineers Aust. CE19, pp.153~161.
5. Kitipornchai, S., and Trahair, N.S., (1980). "Buckling properties of monosymmetric I-beams" J. Struct. Div., Eng., ASCE, 106 (ST5), pp.941~958.
6. Roberts, T.M., and Burt, C.A. (1985). "Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers" Int. J. Mech. Sci., 27(5), pp. 313~324.
7. Papangelis, T.P., and Trahair, N.S.(1987a). "Flexural-torsional buckling of arches." J. Engrg., ASCE, 113(4), pp.889~906.
8. Papangelis, T.P., and Trahair, N.S.(1987b). "Flexural-torsional buckling test on arches." J. Engrg. ASCE, 113(7), pp.1433~1443.
9. Yang, Y.B. and Kuo, S.R.,(1986). "Static stability of curved thin-walled beams." J.

Engrg. Mech., ASCE, 112(8), pp.821~841.

10. Yang, Y.B. and Kuo, S.R.,(1987). "Effect of curvature on stability of curved beams." J. Struct. Engrg., ASCE, 113(6), pp.1185~1202.

11. Yang, Y.B. and Kuo, S.R., and Cherng, Y. D.(1989). "Curved beam element for nonlinear analysis." J. Engrg. Mech., ASCE, 115(4), pp.840~855.

12. Kau, S.R., and Yang, Y.B.(1991). "New theory on buckling of curved beams." J. Engrg. Mech. ASCE, 117(8), pp.1698~1717.

13. Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. I : Formulation of nonlinear equations." J. Engrg. Mech., ASCE, 120(10) pp.2072~2101.

14. Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. II : Analytical solution for buckling of arches." J. Engrg. Mech., ASCE, 120(10) pp.2102~2125.

15. Chang,S.P., and Kim,M.Y., and Kim,S.B. (1996). "Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches." ASCE Journal of Eng. Mechanics,122, pp.844~854.

16. Kim,M.Y., and Chang,S.P., and Kim,S.B. (1996). "Spatial Stability Analysis of Thin-walled Space Frames." Int.J.Numer.Meth-ods Engineering, 39, pp.499~525.

17. Attard, M.M.(1986). "Nonlinear theory of nonuniform torsion of thin-walled open beams." Thin-Walled Struct,4(2),101-134.

18. Attard, M.M.(1987). "Discussion of 'Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis.'by Y.B. Yang and W. McGuire." J. Struc. Engrg., ASCE, 113(7), pp.1632~1634.

19. Elias, Z.M.(1986). Theory and methods of structural analysis. John Wiley and Sons,

New York, N.Y.

20. Goto, F., Kuranish, S., and Sugahara, K. (1992)."On the experiment of out-of-plane buckling of arches." Proc. 47th Annual Conf., Japanese Society of Civil Engineers, Sept., pp.200~201.

21. IMSL Library, Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming, IMSL, Inc., 1984

22. 민병철, 김문영 (1998), "비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석 I : 해석적 방법" 한국전산구조공학회 논문집 (심사중)

부록 I 일축대칭 단면에 대한 단면계수

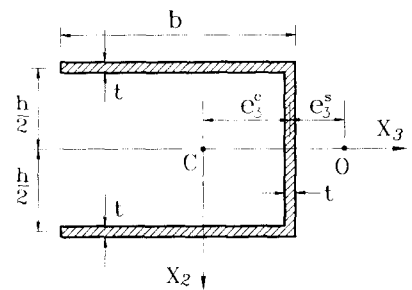


그림 11 박벽 곡선보의 일축 대칭단면

그림 11과 같은 일축 대칭단면의 단면계수는 다음과 같다.

$$A = t(2b + h), \quad e_2 = 0, \quad e_3 = e_3^c + e_3^s = \frac{3b^2}{6b + h} + \frac{b^2}{2b + h}$$

$$J = \frac{t^3}{3}(2b + h), \quad I_2 = \frac{tb^2(b + 2h)}{3(2b + h)}, \quad I_3 = \frac{th^2}{12}(6b + h)$$

$$I_{\bar{2}} = \frac{tb^3h^2(3b + 2h)}{12(h + 6b)}, \quad I_{\bar{3}} = 0, \quad I_{\bar{33}} = 0, \quad I_{\bar{22}} = 0,$$

$$I_{\bar{222}} = -I_{\bar{2}}, \quad I_{\bar{333}} = 0, \quad I_{\bar{222}} = -\frac{tb^3h^3(12b^2 + 14bh + 3h^2)}{24(2b + h)(6b + h)^2}$$

$$I_{\bar{223}} = 0, \quad I_{\bar{222}} = -\frac{tb^4h^2}{2(2b + h)}, \quad I_{\bar{233}} = 0, \quad I_{\bar{333}} = 0$$

$$I_{\bar{233}} = -\frac{tb^2h^3}{6(2b + h)}$$

(접수일자 : 1998. 9. 19)