

# 보강된 판 및 셸구조의 좌굴 및 후좌굴해석

## Stability and Post-buckling Analysis of Stiffened Plate and Shell Structures

김 문 영\*      최 명 수\*\*      민 병 철\*\*\*  
Kim, Moon-Young      Choi, Myiung-Soo      Min, Byoung-Cheol

### 요 지

보강된 판 및 셸구조의 안정성 및 후좌굴을 포함하는 기하학적 비선형 해석을 수행하기 위하여, total Lagrangian formulation에 근거한 연속체의 증분평형방정식으로부터 변형된 쉘요소의 유한요소이론을 제시하였다. 셸구조의 곡률이 불연속적으로 변하거나 쉘부재들이 유한한 각도로 만나는 보강된 판 및 셸구조의 비선형 해석이 가능하도록 주부재와 보강재 간의 연결점에 대한 일반적인 변환관계를 제시하였으며 좌굴해석 및 기하학적 비선형해석의 경우에 해의 정확성 및 수렴성을 개선시키기 위하여 접선강도행렬 산정시 회전각의 2차항을 포함시켰다. 또한, shear locking 현상을 극복하기 위하여 감차적분을 적용하였고 셸구조의 좌굴해석에서는 power method를 적용하여 해석의 효율을 높였으며, 후좌굴해석에서는 변위 및 하중증분법을 적절히 결합시켜 보강된 셸구조의 후좌굴 거동추적이 용이하였다. 또한, 입력자료를 손쉽게 준비하고 좌굴모드 및 후좌굴거동을 효율적으로 분석하기 위하여 전, 후처리 프로그램을 개발하였고 다양한 해석예제를 통하여 다른 문헌의 해석결과를 비교함으로써 본 연구에서 개발된 유한요소 해석프로그램의 타당성 및 정확성을 입증하였다.

핵심용어 : 유한요소법, 보강재, 기하학적 비선형 해석, 쉘요소, 좌굴, 하중 및 변위 증분법

### Abstract

For stability and post-buckling analysis of stiffened plate and shell structures, the total Lagrangian formulation is presented based upon the degenerated shell element. Geometrically correct formulation is developed by updating the direction of normal vectors in the iteration process, evaluating the total Green-Lagrange stain corresponding to total displacements and retaining second order rotation terms. Reduced intergration technique is applied in order to overcome shear locking phenomena. The post-buckling behaviors of stiffened plate and shell structures are traced by modelling the stiffener as the shell element and considering general transformation between the main structure and the stiffener at the connection node. Furthermore, pre- and post-processor are used in order to prepare input data easily and investigate buckling modes and post-buckling behaviors efficiently. The load/displacement incremental scheme is adopted for geometrically non-linear analysis and power method is applied to buckling analysis. Based on such methodology, the computer program is developed and numerical examples to demonstrate the accuracy and the effectiveness of the proposed shell element are presented and compared with references's results.

*Keywords* : finite element method, stiffener, geometric non-linear analysis, shell element, buckling, load/displacement incremental scheme

\* 성희원·성균관대학교 건축·조경 및 토목공학부, 부교수  
\*\* 서울대학교 지구환경시스템공학부, 박사과정  
\*\*\* 성균관대학교 건축·조경 및 토목공학부, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론은 1999년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

보강된 적층 판과 셸은 공학의 다양한 분야에서 널리 적용되는 구조이다. 토목분야에서는 강교량의 거더, 공장이나 경기장의 지붕구조, 돔, 냉각수탑, 원자력 차폐구조물, 기계 및 원자력 분야에서는 압력용기와 파이프, 저장탱크와 platform component와 같은 해양구조물, 그리고 선박, 항공기구조 등에 사용되고 있다. 셸구조물은 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 효율적인 구조적 거동을 보인다. 그러나 이러한 구조물의 안전성을 보장하기 위해서, 판 및 셸구조물의 거동을 파악하기 위한 적절한 해석방법의 개발이 요구되고 있다. 보강된 판 및 셸구조에 대한 엄밀해는 적용범위가 제한되어 있고 임의의 형상, 하중조건, 불규칙한 보강과 지지조건 등을 고려한 실제 구조물해석에 적용할 수 없다. 결과적으로 이러한 복잡한 문제들을 취급하기 위해서는 판 및 셸요소를 이용한 유한요소해석을 수행하여야 한다.

Bathe와 Bolourchi<sup>1)</sup>는 변형된 셸요소를 이용하여 판 및 셸구조의 대변형 및 탄소성을 수행하였으며, Owen과 Figueiras<sup>2)</sup>는 직교이방성 탄소성 판 및 셸 해석법을 제시하였다. Surana<sup>3)</sup>는 셸구조의 기하학적 비선형해석에서 회전각의 2차항을 고려하였다. 또한 김과 민<sup>4)</sup>은 변위 및 하중증분법을 이용하여 보강된 셸구조의 후좌굴 및 탄소성 해석을 수행하였다. 유한요소법은 이미 20여년간 셸구조에 적용되어 왔지만, 일반 셸구조에 직접적으로 적용할 수 있는 적절한 셸 유한요소에 대한 연구는 아직 진행 중에 있다고 생각된다<sup>1)~6)</sup>. 또한 셸구조는 좌굴거동에 매우 민감하다. 더욱이 셸의 좌굴거동은 셸구조물의 안전과 관련하여 매우 중요한 문제가 되고 있다. 그래서, 실제로 이러한 문제점을 해결하기 위하여 셸구조의 보강이 필요하다. 일반적으로 갑작스러운 파괴를 방지하기 위하여 ring stiffener, stringer stiffener 등과 같은 보강재가 사용된다.

구조물의 극한해석을 수행하는 경우에 셸구조물은 탄·소성거동에 의한 붕괴뿐만 아니라 snap-through 등 다양한 후좌굴 평형 경로가 나타나게 된다.

본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해서, 보다 정확하고 신뢰할 수 있는 셸유한요소를 개발하기 위하여 9절점 변형된 셸요소를 사용한다. total Lagrangian formulation에 근거한 연속체의 증분평형방정식을 도입하여 변형된 셸요소에 대한 비선형 유한요소이론을 제시한다. 셸구조의 곡률이 불연속적으로 변하거나 셸부재들이 유한한 각도로 만나는 경우에 보강재의 모델링 방법을 제시한다. 그리고 변형된 셸요소의 강도행렬을 산정할 때 감작적분법을 적용하여 shear locking 현상을 극복한다. 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 총변위에 대응하는 변형도를 산정함으로써, 셸구조에 대해 기하학적으로 정확한 비선형해석이 이루어지도록 한다. 접선강도행렬을 산정할 때 회전각의 2차항을 고려하여 해의 수렴성 및 정확성을 향상시킨다. 셸구조의 좌굴해석에서는 power method를 적용하여 해석의 효율을 높이며, 후좌굴해석에서는 변위 및 하중증분법을 적절히 결합시켜 보강된 셸구조의 후좌굴 거동추적을 용이하게 한다. 또한, 좌굴 및 후좌굴거동을 효율적으로 분석하기 위하여 전, 후처리 프로그램을 개발하여 이를 적용한다.

## 2. 변형된 셸 유한요소이론

본 연구에서는 등매개 셸요소 (degenerated isoparametric shell element)가 사용되며, 이 셸요소를 정식화하는데 사용되는 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 중립면에 수직한 법선은 변형 후에도 법선으로 남아 있다.
- 2) 응력-변형도 관계식에서 셸중립면에 수직한 응력은 영으로 취한다.

여기서 고려되는 요소는 쉘구조의 곡선형상을 적절히 나타낼 수 있는 대표적인 9절점 요소이다.

네개의 좌표계(그림 1참조)가 도입되며 이들은 다음과 같이 정의된다.

(1) 전체좌표계(global coordinate system)-(x, y, z)로 표시되며 이 좌표계의 기저벡타는 (e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>, e<sub>3</sub>)로 나타낸다. 이 좌표계는 각절점의 좌표성분과 이동변위 자유도를 정의하기 위하여 사용된다.

(2) 절점좌표계(nodal coordinates system)-각 절점에서 두 개의 회전자유도를 정의하기 위하여 절점좌표계가 사용된다. 초기형상의 경우에 기저벡타는 (V<sub>1</sub><sup>k</sup>, V<sub>2</sub><sup>k</sup>, V<sub>3</sub><sup>k</sup>)로 나타낸다. V<sub>3</sub><sup>k</sup>의 방향은 주어진 절점에서 두께방향과 일치하도록 선택한다. 다른 기저벡타는 식 (1), (2)와 같이 설정한다.

$$V_1^k = V_3^k \times e_2 \quad (1a)$$

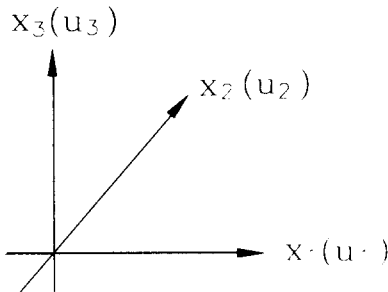
$$V_2^k = V_3^k \times V_1^k \quad (1b)$$

여기서 V<sub>3</sub><sup>k</sup>가 e<sub>2</sub>와 방향이 동일할 때에는, V<sub>1</sub><sup>k</sup>는 e<sub>1</sub> 방향과 같게 선택한다. 이때 요소의 각 절점에서 절점좌표계와 전체좌표계 사이의 변환관계를 나타내는 방향코사인은 아래와 같이 정의된다.

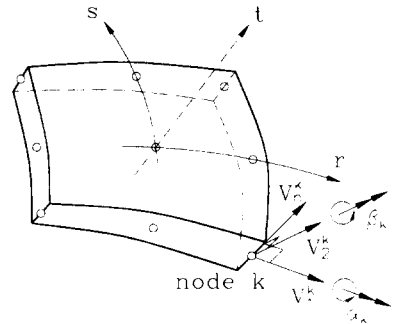
$${}^0R^k = [{}^0R^k] = [{}^0V_1^k, {}^0V_2^k, {}^0V_3^k] \quad (2)$$

(3) 곡선좌표계-(r, s, t)로 표시되며 -1과 +1 사이의 값을 갖는다. 곡선좌표계와 전체좌표계 사이의 관계는 요소의 형상을 정의하는 식(5)에 의해서 주어진다.

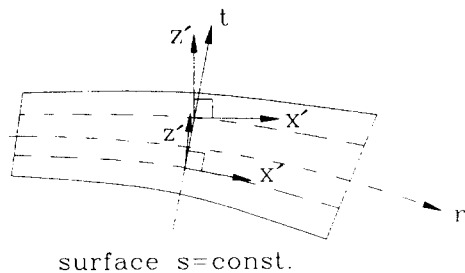
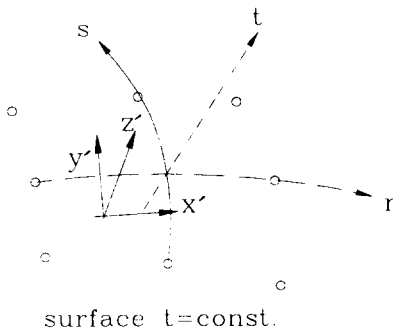
(4) 적층(laminar)좌표계-각 가우스 적분점에서 정의되는 직각좌표계(x', y', z')을 나타내며, 이중 두개의 축은 쉘의 적층면(lamina surface)에 접선방향이다. 이 좌표계의 기저벡타는 (e<sub>x'</sub>, e<sub>y'</sub>, e<sub>z'</sub>)



(a) global coordinates



(b) nodal coordinates



(c) laminar coordinates

그림 1 9 node shell element

로 나타내며, 이러한 벡터들의 방향은 식 (3)와 같이 구한다.

$$\begin{aligned} e_z &= e_r \times e_s \\ e_r &= e_r \\ e_s &= e_z \times e_r \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $e_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} \\ \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_3}{\partial r} \end{bmatrix}$ ,  $e_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial s} \\ \frac{\partial X_2}{\partial s} \\ \frac{\partial X_3}{\partial s} \end{bmatrix}$

각 가우스 적분점에서 적층좌표계와 전체좌표계 사이의 변환관계를 정의하는 방향코사인은 아래와 같다.

$$T = [T_{in}] = [e_r, e_s, e_z] \quad (4)$$

여기서  $T_{in}$ 는 가우스 적분점에서  $X_i$ 와  $\xi_i$ 사이의 방향코사인을 나타낸다.

### 2.1 변형된 셀요소의 형상과 변위장

셀요소의 초기형상은 곡선좌표계를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^0X_i &= \sum_{k=1}^n h_k {}^0X_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k {}^0V_m^k \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  ${}^0X_i = {}^0X_i(r, s, t)$ 는 셀요소 내부점의 위치 벡터이고,  $a_k$ 는 절점  $k$ 에서 셀 두께이며, 그리고  $h_k$ 는 형상함수로서  $(r, s)$ 의 함수로 표시된다. 셀요소의 변형거동에 대한 가정 1)을 고려하면, 시간  $t$ 에서 요소내부의 점  $(r, s, t)$ 에 대응하는 위치벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} {}^tX_i &= \sum_{k=1}^n h_k {}^tX_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k {}^tV_m^k \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6)$$

셀거동에 대한 두개의 가정을 고려하여 3차원 연속체요소를 셀요소로 변형시키게 되면, 변위장은 절점당 5개의 자유도 즉, 세 개의 이동변위 ( $U_1^k, U_2^k, U_3^k$ )와 서로 수직인  ${}^0V_1^k$ 와  ${}^0V_2^k$ 에 대한 두개의 회전각 ( $\alpha_k, \beta_k$ )로 표시할 수 있으며 셀내부의 각점에서 총변위 및 증분변위벡터는 식 (5)와 (6)으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U_i &= {}^tX_i - {}^0X_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^tU_i^k \\ &+ \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k ({}^tV_m^k - {}^0V_m^k) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} U_i &= {}^{t+\Delta t}X_i - {}^tX_i = \sum_{k=1}^n h_k U_i^k \\ &+ \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k ({}^{t+\Delta t}V_m^k - {}^tV_m^k) \cong \sum_{k=1}^n h_k U_i^k \\ &+ \frac{t}{2} a_k h_k \{ -V_{2k}^k \alpha_k + V_{1k}^k \beta_k \\ &- \frac{1}{2} V_{1k}^k \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \} \end{aligned} \quad (7b)$$

밀출된 항은 절점회전각의 2차항을 나타내며, 이 항은 기존의 강도행렬에 추가되는 기하학적인 강도행렬을 산정할때 사용된다.

### 2.2 증분평형방정식

Total Lagrangian formulation에 근거하여 연속체에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} &\int ({}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} \\ &+ {}^0S_{ij} \delta {}^0e_{ij}) dV = {}^{t+\Delta t}R - \int {}^0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  ${}^{\circ}C_{ijrs}$ 는 응력-변형도성분,  ${}^{\circ}e_{ij}$ ,  ${}^{\circ}m_i$ 는 초기 형상을 기준으로한 Green-Lagrange strain의 선형 및 비선형 증분변형도 성분,  ${}^{\circ}e_i$ 는 절점회전각의 2차항으로 인한 선형 변형도를 나타내며,  ${}^{\circ}S_{ij}$ 는 second Piola-Kirchhoff stress를 표시한다.  $'R$ 는 외적가상일,  $\delta$ 은 변분을 의미한다.

식 (5), (7a) 그리고 식 (7b)를 고려하고, 등대개형상함수를 도입하여 적분을 행하면 한 개의 유한요소에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$({}^{\circ}K_L + {}^{\circ}K_{NL})\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^{\circ}F \tag{9}$$

여기서

$${}^{\circ}K_L = \int_V {}^{\circ}B_L^T {}^{\circ}C {}^{\circ}B_L {}^{\circ}dV \tag{10a}$$

$${}^{\circ}K_{NL} = \int_V {}^{\circ}B_{NL}^T {}^{\circ}S {}^{\circ}B_{NL} {}^{\circ}dV + {}^{\circ}K'_{NL} \tag{10b}$$

$${}^{\circ}F = \int_V {}^{\circ}B_L^T {}^{\circ}\bar{B} {}^{\circ}dV \tag{10c}$$

식 (9), (10)에서  ${}^{\circ}K_L$ 와  ${}^{\circ}K_{NL}$ 는 각각 선형(탄성) 및 비선형(기하학적) 강도행렬을 나타내며,  $\Delta U$ 는 절점변위벡타의 증분 그리고  ${}^{\circ}F$ 는 요소내부에 발생하는 응력에 대응하는 등가절점력을 의미한다.  ${}^{\circ}B_L$ 와  ${}^{\circ}B_{NL}$ 는 선형 및 비선형 변형-변형도 변환행렬을 나타낸다.

### 2.3 절선강도행렬의 유도

곡선좌표계와 전체좌표계 사이의 변환식 (5)로부터 두 좌표계의 미분관계를 나타내는 행렬 (Jacobian matrix)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$J_{ij} = \frac{\partial({}^{\circ}X_1, {}^{\circ}X_2, {}^{\circ}X_3)}{\partial(r, s, t)} \tag{11}$$

셀요소의 강도행렬을 유도하기 위하여 아래와 같이 요소절점변위벡타를 정의한다.

$$U_r^T = [U_1^T \ U_2^T \ U_3^T \ \alpha_1 \ \beta_1; U_2^T \ U_2^T \ \dots; U_1^T \ U_2^T \ U_3^T \ \alpha_N \ \beta_N] \tag{12}$$

결국, 식 (7), (11) 그리고 식 (12)를 이용하여  ${}^{\circ}B_L$ 과  ${}^{\circ}B_{NL}$ 을 산정하면 식 (9)로부터 셀요소의 절선강도행렬을 산정할 수 있다. 식 (10a)의 선형 변위-변형도 변환행렬  ${}^{\circ}B_L$ 는 통상 식 (13a)와 같이 행렬  ${}^{\circ}B_{L0}$ 와 초기변위의 영향을 고려하는 행렬  ${}^{\circ}B_{L1}$ 의 합으로 표시한다.

$${}^{\circ}E_L = {}^{\circ}B_L U_r; \quad {}^{\circ}B_L = {}^{\circ}B_{L0} \tag{13a}$$

$${}^{\circ}E_L^T = [{}^{\circ}e_{11} \ {}^{\circ}e_{22} \ {}^{\circ}e_{33} \ 2{}^{\circ}e_{12} \ 2{}^{\circ}e_{23} \ 2{}^{\circ}e_{13}] \tag{13b}$$

식 (7)과 (11)을 고려하면, 변형된 셀요소의 선형 변위-변형도 변환행렬의 구체적인 식은 다음과 같이 표시된다.

$${}^{\circ}B_{L0} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|cc} h_{k,1} & 0 & 0 & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k \\ 0 & h_{k,2} & 0 & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k \\ 0 & 0 & h_{k,3} & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k \end{array} \right] & \dots & \dots \\ \dots & h_{k,2} h_{k,1} & 0 & (g_{11}^k G_2^k + g_{12}^k G_1^k) & (g_{21}^k G_2^k + g_{22}^k G_1^k) \\ \dots & 0 & h_{k,3} h_{k,2} & (g_{12}^k G_3^k + g_{13}^k G_2^k) & (g_{22}^k G_3^k + g_{23}^k G_2^k) \\ \dots & h_{k,3} & 0 & h_{k,1} (g_{11}^k G_3^k + g_{13}^k G_1^k) & (g_{21}^k G_3^k + g_{23}^k G_1^k) \end{bmatrix} \tag{14}$$

$${}^{\circ}B_{L1} = {}^{\circ}L \cdot {}^{\circ}B_{NL} \tag{15}$$

여기서

$${}^{\circ}L = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|cc} l_{11} & 0 & 0 & l_{21} & 0 & 0 & l_{31} & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & 0 & 0 & l_{22} & 0 & 0 & l_{32} & 0 \\ 0 & 0 & l_{13} & 0 & 0 & l_{23} & 0 & 0 & l_{33} \end{array} \right] & \dots & \dots \\ \dots & l_{12} & l_{11} & 0 & l_{22} & l_{21} & 0 & l_{32} & l_{31} & 0 \\ \dots & l_{13} & 0 & l_{11} & l_{23} & 0 & l_{21} & l_{33} & 0 & l_{31} \\ \dots & 0 & l_{13} & l_{12} & 0 & l_{23} & l_{22} & 0 & l_{33} & l_{32} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$${}^iB_{NL} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} h_{k,1} & 0 & 0 & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k \\ h_{k,2} & 0 & 0 & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k \\ h_{k,3} & 0 & 0 & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k \\ 0 & h_{k,1} & 0 & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k \\ 0 & h_{k,2} & 0 & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k \\ 0 & h_{k,3} & 0 & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k \\ 0 & 0 & h_{k,1} & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k \\ 0 & 0 & h_{k,2} & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k \\ 0 & 0 & h_{k,3} & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서

$$g_{1i}^k = -\frac{1}{2} a_k^T V_{2i}^k, \quad g_{2i}^k = \frac{1}{2} a_k^T V_{1i}^k,$$

$$g_{3i}^k = -\frac{1}{2} a_k^T V_{ni}^k, \quad h_{k,i} = J_{i1}^{-1} h_{k,r} + J_{i2}^{-1} h_{k,s}$$

$$G_i^k = t(J_{i1}^{-1} h_{k,r} + J_{i2}^{-1} h_{k,s}) + J_{i3}^{-1} h_k \quad (18)$$

식 (16)에서  $l_{ij} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ 이며, 식 (17)의  ${}^iB_{NL}$ 은 비선형 변위-변형도 변환행렬을 나타낸다. 회전자유도를 갖는 요소의 비선형 강도행렬을 산정하는 경우에 식 (13)의 밑줄친 항을 고려하면 비선형 강도행렬식 (10b)에 추가되는 항은 다음과 같다.

$$[K_{NL}]_{5k-1, 5k-1} = {}^iS_{11} \cdot [g_{n1}^k G_1^k + \sum_{i=1}^3 g_{ni}^k G_i^k l_{i1}]$$

$$+ {}^iS_{22} \cdot [g_{n2}^k G_2^k + \sum_{i=1}^3 g_{ni}^k G_i^k l_{i2}]$$

$$+ {}^iS_{33} \cdot [g_{n3}^k G_3^k + \sum_{i=1}^3 g_{ni}^k G_i^k l_{i3}]$$

$$+ {}^iS_{12} \cdot [g_{n1}^k G_2^k + g_{n2}^k G_1^k + \sum_{i=1}^3 (g_{ni}^k G_2^k l_{i1} + g_{ni}^k G_1^k l_{i2})]$$

$$+ {}^iS_{31} \cdot [g_{n1}^k G_3^k + g_{n3}^k G_1^k + \sum_{i=1}^3 (g_{ni}^k G_3^k l_{i1} + g_{ni}^k G_1^k l_{i3})]$$

$$+ {}^iS_{23} \cdot [g_{n2}^k G_3^k + g_{n3}^k G_2^k + \sum_{i=1}^3 ((g_{ni}^k G_2^k l_{i3} + g_{ni}^k G_3^k l_{i2})] \quad (19a)$$

$$[K_{NL}]_{5k, 5k} = [K_{NL}]_{5k-1, 5k-1} \quad (19b)$$

식 (17)을 이용하면 비선형 증분변형도  ${}^oE_{NL}$ 은 아래의 식으로 표시할 수 있다.

$${}^oE_{NL} = {}^oB_{NL} U_e \quad (20a)$$

$${}^oE_{NL}^T = [{}^oU_{1,1} \quad {}^oU_{1,2} \quad {}^oU_{1,3} \quad {}^oU_{2,1} \quad {}^oU_{2,2} \quad {}^oU_{2,3} \quad {}^oU_{3,1} \quad {}^oU_{3,2} \quad {}^oU_{3,3}] \quad (20b)$$

또한, 식 (10c)에 가정 2를 적용하면 적층좌표계에서 쉘두께 방향의 응력성분  ${}^iS_{ij}$ 과 변형도성분  ${}^ie_{ij}$ 이 영이므로, 가우스 적분점의 적층좌표계에서 응력행렬  ${}^iS$  및 응력벡터  ${}^iS$ 의 구체적인 식은 아래와 같다.

$${}^iS = \begin{bmatrix} {}^iS & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & {}^iS & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & {}^iS \end{bmatrix} \quad (21)$$

$${}^iS^T = [{}^iS_{rr}, \quad {}^iS_{ss}, \quad {}^iS_{rs}, \quad {}^iS_{rt}, \quad {}^iS_{st}] \quad (22)$$

여기서

$${}^iS = \begin{bmatrix} {}^iS_{rr} & {}^iS_{rs} & {}^iS_{rt} \\ {}^iS_{sr} & {}^iS_{ss} & {}^iS_{st} \\ {}^iS_{tr} & {}^iS_{ts} & o \end{bmatrix} \text{와 } 0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

등매개 쉘요소의 강도행렬을 산정하기 위하여 가우스 수치적분을 행한다. 본 연구에서는 쉘두께가 얇아짐에 따라 강성이 실제보다 과대하게 계산되는 locking 현상을 극복하기 위하여 감차적분법 (reduced integration)을 적용한다.

### 3. 보강된 쉘구조의 기하학적 비선형해석

3장에서 제시된 변형된 쉘요소는 쉘두께방향의 회전자유도를 제외하고 절점당 5개의 자유도 (3개의 이동변위와 2개의 회전변위)를 갖는다. 보강재가 있는 판이나 쉘구조 또는 부재가 유한한 각도로 만나는 박벽구조를 해석하는 경우에 주부재와 보강재가 만나는 절점에서 자유도의 적

합조건을 만족시키기가 어렵다. 본 장에서는 임의 각도로 만나는 주부재와 보강재의 결합방법을 제시한다. 먼저 주부재와 보강재의 각 절점에서 산정하는 좌표변환행렬을 생각하고, 보강재의 접선강도행렬과 불평형하중을 산정하는 방법을 제시한다.

### 3.1 좌표변환행렬

식 (2) 과 (7a) 를 고려하면, 시간  $t$  에서 주부재의 절점좌표계와 전체좌표계 사이의 좌표변환행렬은 아래와 같이 표시된다.

$$x = 'R^k \cdot x'$$

$$'R^k = ['R_i^k] = ['V_1^k, 'V_2^k, 'V_3^k] \quad (24)$$

여기서,  $x$  와  $x'$  는 각각 전체좌표계 및 주부재의 절점좌표계에서의 위치벡터이다.

주부재의 경우와 마찬가지로 보강재의 좌표변환행렬은 아래와 같다.

$$x = \overline{R}^k \cdot \overline{x}$$

$$\overline{R}^k = [\overline{R}_i^k] = [\overline{V}_1^k, \overline{V}_2^k, \overline{V}_3^k] \quad (25)$$

여기서,  $\overline{x}$  는 보강재의 절점좌표계에서의 위치벡터이다.

본 연구에서는 쉘요소가 유한한 각도로 만나는 경우에 두부재중 하나는 주부재로 나머지 하나는 보강재로 구별한다. 이때 두부재가 만나는 절점에서는 주부재와 보강재에 대응하는 두개의 법선벡터가 존재하므로, 보강재의 강도행렬과 불평형하중을 산정할 때 연결점에서 보강재에 대응하는 절점좌표계에서 계산된 강도행렬과 부재력벡터를 주부재에 대응하는 절점좌표계로 변환이 필요하다. 이러한 변환에 사용되는 좌표변환행렬은 아래와 같다.

$$x'_i = 'T^k \cdot \overline{x}_i$$

$$'T^k = ('R^k)^T \cdot \overline{R}^k = ['R_m^k] \cdot [\overline{R}_m^k] \quad (26)$$

### 3.2 보강재의 접선강도행렬과 불평형하중

보강재의 절점 좌표계에서 계산된 접선강도행렬 ( ${}^k\overline{K}_L + {}^k\overline{K}_{NL}$ ) 을 주부재의 절점좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$${}^kK_L + {}^kK_{NL} = 'T \cdot ({}^k\overline{K}_L + {}^k\overline{K}_{NL}) \cdot ('T)^T \quad (27)$$

이와 유사하게 부재력 벡터 ( $'F$ ) 는 아래와 같이 산정한다.

$$'F = 'T \cdot \overline{F} \quad (28)$$

여기서 'T' 는 한 요소에 대한 변환행렬을 나타내며, 주부재와 연결되는 보강재의 연결점이 1, 2 그리고 9절점인 경우에 구체적인 식은 아래와 같다.

$$'T = \begin{bmatrix} 'T^1 & 0_3 & 0_3 & \dots & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 'T^2 & 0_3 & \dots & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & \dots & 0_3 & 0_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 'T^9 \end{bmatrix} \quad (29)$$

비선형해석에서 불평형하중을 정확히 산정하는 것이 매우중요하다. 아래는 본 연구에서 채택한 불평형하중 산정법을 제시한다.

- 1) 접선강도행렬을 산정한다.
- 2) 증분방정식을 풀어서 증분절점변위벡터 및 총변위벡터를 구한다.
- 3) 보강재의 연결점을 제외한 절점에서는 Rodrigues (23) 의 회전행렬을 이용하여, 단계 2) 에서 계산된 각 절점에서 회전증분변위 ( $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ) 와 전 단계까지의 회전행렬로부터 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.

$${}^{i+1}R^k = 'R^k \cdot \Delta R^k \quad (30a)$$

$$\Delta R^k = I_3 + \frac{\sin(r)}{r} \cdot S$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sin(r/2)}{r/2} \right)^2 \cdot S^2 \quad (30b)$$

여기서

$$r^2 = \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 \quad (31a)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_k & \beta_k \\ \gamma_k & 0 & -\alpha_k \\ -\beta_k & \alpha_k & 0 \end{bmatrix} \quad (31b)$$

4) 보강재와 주부재의 연결점에서는 식 (29)를 사용하여 보강재에 대응하는 절점좌표계로 변환시켜서 Rodrigues의 회전행렬을 이용하여, 보강재에 대응하는 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.

$${}^{i+d}R^k = {}^{i+d}R^k \cdot T^k \quad (32)$$

5) 각 가우스 적분점에서 적층좌표계에 대한 Green-Lagrange strain을 계산한다.

$${}^i\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}({}^iU_{\alpha,\beta} + {}^iU_{\beta,\alpha} + {}^iU_{\gamma,\alpha} \cdot {}^iU_{\gamma,\beta}) \quad (33)$$

6) 각 적분점에서 탄성 응력-변형도관계를 이용하여 응력증분을 산정한다.

7) 요소응력에 대응하는 등가절점력을 산정한다.

8) 외력과 단계<sup>(6)</sup>에서 구한 절점력의 차이로써 불평형하중을 산정하고 아래의 수렴조건을 조사한다.

$$\| {}^{i+d}R - {}^{i+d}F^{(i)} \| \times 100 \leq LTOL \times \| {}^{i+d}R \| \quad (34)$$

여기서 *LTOL*은 입력으로 주어지는 수렴 허용치이다.

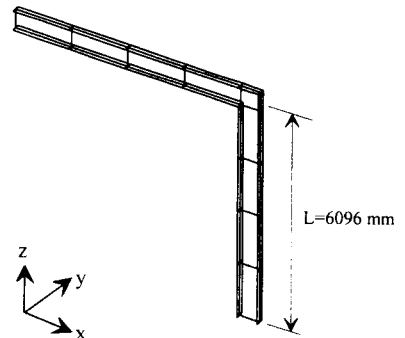
#### 4. 수치해석 예

판 및 셸구조의 대변형 및 후좌굴해석을 수행하기 위하여, total Lagrangian formulation을 이용한 9절점 변형된 셸요소가 사용되었다. 또한, 셸구조의 후좌굴 거동을 포함하는 다양한 비선형 해석이 가능하도록 하기 위하여, 변위/하중증분 알고리즘을 적용시켰다. 이러한 해석이론 및 알고리즘에 기초하여 판 및 셸구조의 좌굴해석 및

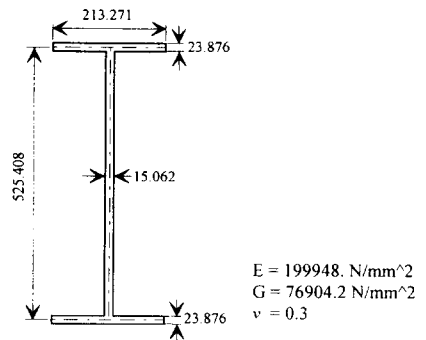
후좌굴해석이 가능한 컴퓨터 해석프로그램을 개발하였고 이 프로그램을 사용하여 본 장에서는 판 및 셸구조물의 임계하중을 산정하고 후좌굴 해석을 수행하여 다른 문헌의 결과들과 비교, 검토한다. 또한, 입력자료를 손쉽게 준비하고 좌굴모드 및 후좌굴거동을 효율적으로 분석하기 위하여 전, 후처리 프로그램을 개발하여 이를 이용하였다.

#### 4.1 박벽 직각뿔대구조의 횡좌굴 및 횡후좌굴해석

그림 2(a) 및 그림 4(a)는 각각 직각 뿔대구조에서 수평부재와 수직부재를 연결하는 절점부(joint connection)의 바이모멘트가 영인 경우(방법 1)와 뒸(warping) 자유도가 구속되는 경우(방법 2)에 대응하는 셸모델을 나타낸 것이다. 해석



(a) Modeling



(b) Cross section and Material properties

그림 2 Cantilever frame with I-type section (Method 1)



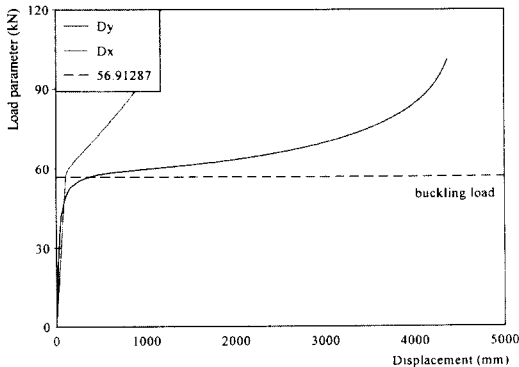
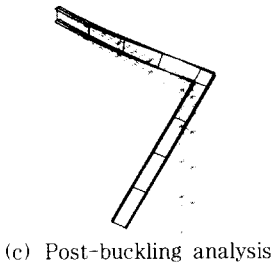
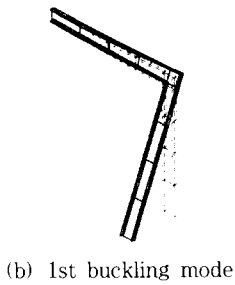
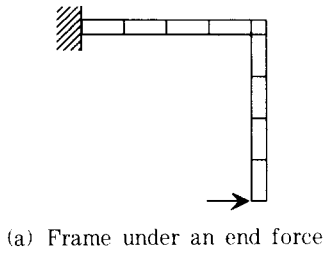


그림 3 Right angle frame under positive load (Method 1)

에 사용된 재료 상수는 그림에 제시하였다. 표 1은 본 연구의 결과와 문헌의 20개의 보요소를 이용한 경우와 1675개의 8절점 쉘요소를 사용한 경우에 횡좌굴해석 결과를 함께 나타낸 것이다. 수평부재가 압축인 경우보다 인장인 경우에 좌굴하중값이 더 크며, 문헌의 결과들이 본 연구의 결과와 비교적 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 3과 그림 5, 6은 각각 방법 1과 방법 2의 I형 직각뼈대구조 모델에 y방향으로  $P_y/1000$ 와

표 1 Lateral buckling loads of I-type right-angle frames under end load(kN)

	Method 1		Method 2	
present study	-50.666	56.913	-65.815	77.929
beam element	-52.367	59.042	-69.129	80.604
ABAQUS	-50.607	58.432	-66.350	78.200

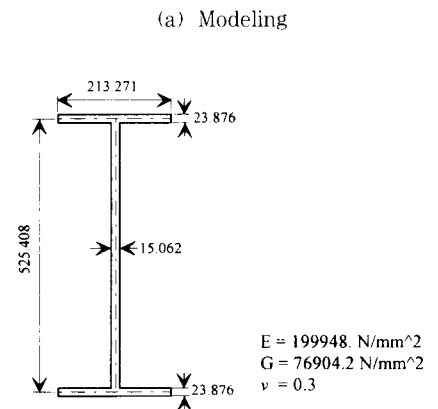
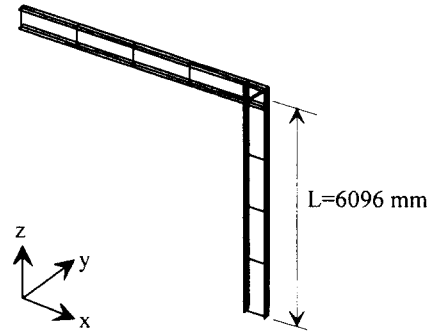
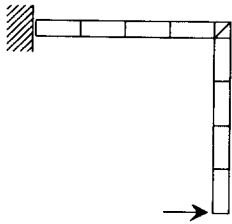
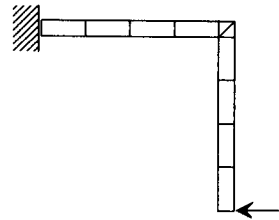


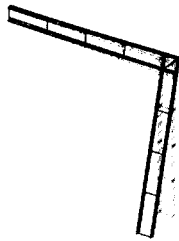
그림 4 Cantilever frame with I-type section (Method 2)



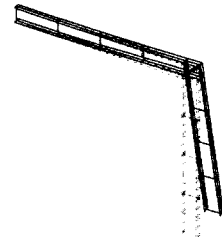
(a) Frame under an end force



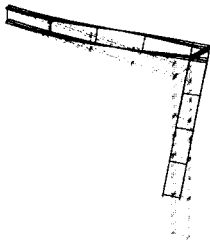
(a) Frame under an end force



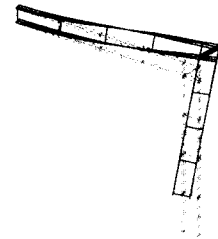
(b) 1st buckling mode



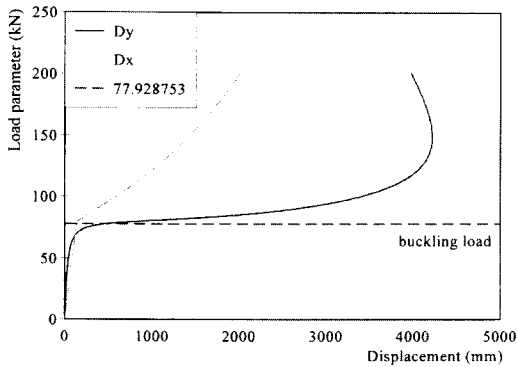
(b) 1st buckling mode



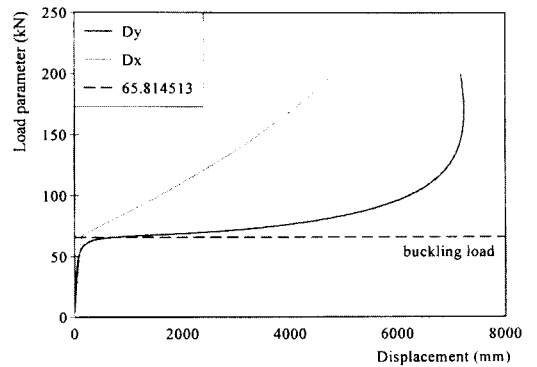
(c) Post-buckling analysis



(c) Post-buckling analysis



(d) Load-displacement diagram



(d) Load-displacement diagram

그림 5 Right angle frame under positive load (Method 2)

그림 6 Right angle frame under negative load (Method 2)

수평하중  $P_x$ 를 작용시켜서 횡후좌굴 해석결과(수평하중  $P_x$ 와  $y$ 방향의 횡변위,  $x$ 방향의 수평변위의 관계곡선)를 제시한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 수평하중의 방향변화에 따라 이에 대응하는 선형좌굴하중 근처에서 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

4.2 C형 단면을 갖는 곡선 캔틸레버의 횡좌굴 및 횡후좌굴해석

그림 7(a)는  $x-z$ 면에 대칭인 C형 단면을 갖는 캔틸레버 끝단의 수평하중과 수직하중에 의해 횡좌굴을 일으키는 곡선 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 단면은 1축대칭으로 면내거동과 면외거동이 연계되지 않는 성질을 가진다. 24개의 쉘요소로 분할하여 해석하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면제원은 그림 7(b)와 같다. 표

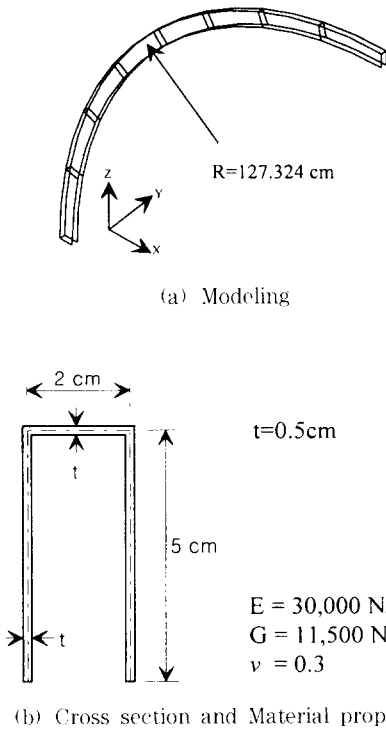


그림 7 Curved cantilever with C-type cross section

표 2 Lateral buckling loads of C1-type circular cantilevers under end load(kN)

Load Direction	Horizontal Load		Vertical Load	
	Negative	Positive	Negative	Positive
Buckling Load	-1.296	14.831	-7.156	3.460

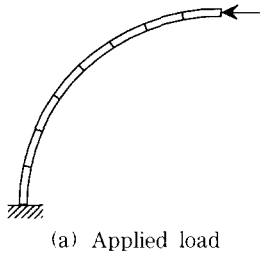
2와 그림 8~11은 수평 및 연직하중을 받는 곡선 캔틸레버구조의 횡좌굴 및 횡후좌굴거동을 해석한 결과를 나타낸 것이다. 그림 8과 10의 경우는 전형적인 후좌굴거동을 보였다. 반면에 그림 9의 경우는 수평하중에 의한 양의 수평변위로 인하여 휨모멘트에 추가하여 인장력이 발생하여 횡후좌굴거동을 보이지 않았으며, 그림 11의 경우는 선형좌굴하중값 보다 약간 큰 값에서 좌굴이 발생하여 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 나타내었다.

5. 결 론

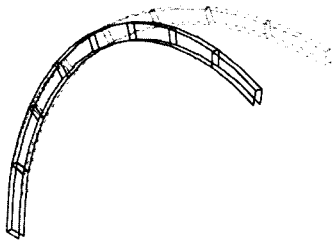
본 연구에서는 total Lagrangian formulation에 근거하여 9절점 변형된 쉘요소를 이용한 유한요소해석 이론을 제시하였으며, 쉘구조의 곡률이 불연속적으로 변하거나 쉘부재들이 유한한 각도로 만나는 경우에 보강재의 모델링 방법을 고려하여 보강된 관 및 쉘구조의 기하학적 비선형 및 횡좌굴 해석을 수행하였다.

접선강도행렬을 산정할때 회전각의 2차항을 고려하고 감차적분법을 적용하여 shear locking 현상의 해결을 모색하였다. 또한 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 총변위에 대응하는 변형도를 산정함으로써, 쉘구조에 대해 기하학적으로 정확한 비선형해석이 이루어지도록 하였다. 결과적으로 수행된 연구내용 및 결과를 아래와 같이 요약할 수 있다.

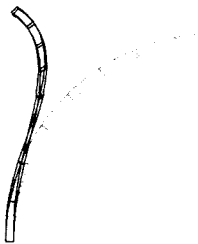
- 1) 기하학적인 강도행렬을 산정할 때, Von-Karman의 가정에서 누락되는 Green-Lagrange strain의 비선형항을 모두 고려하였다.
- 2) 증분변위식에서 회전자유도에 대한 2차항을 고려하고, 기존의 강도행렬을 산정할 때 이 2차항의 영향을 포함시킴으로써 반복계산 시 수



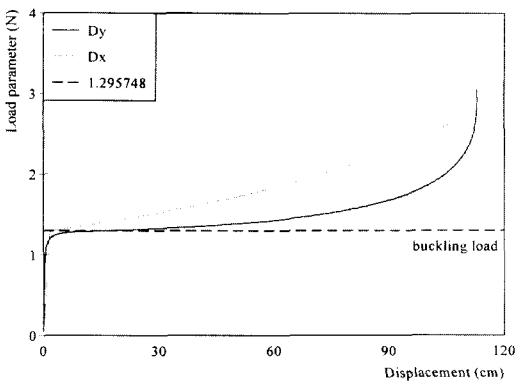
(a) Applied load



(b) 1st buckling mode

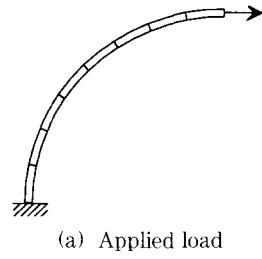


(c) Post-buckling analysis

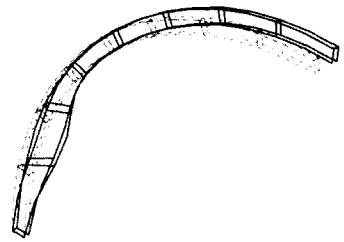


(d) Load-displacement diagram

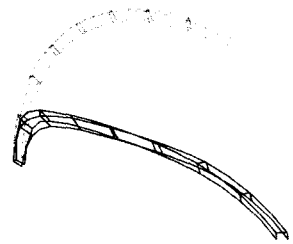
그림 8 Curved cantilever with C-type section under loading type 1



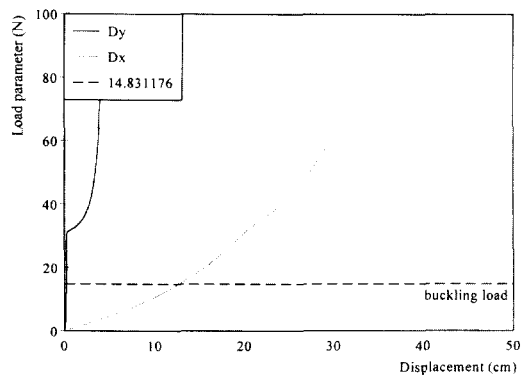
(a) Applied load



(b) 1st buckling mode

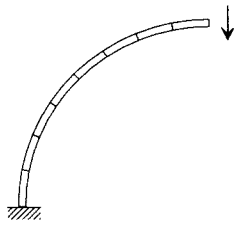


(c) Post-buckling analysis

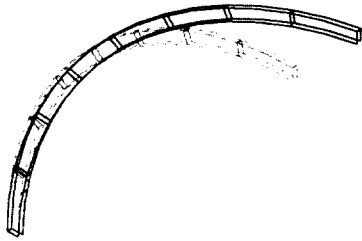


(d) Load-displacement diagram

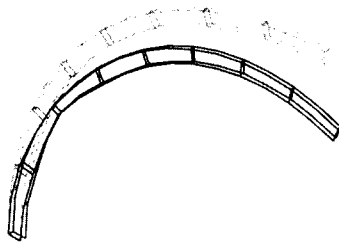
그림 9 Curved cantilever with C-type section under loading type 2



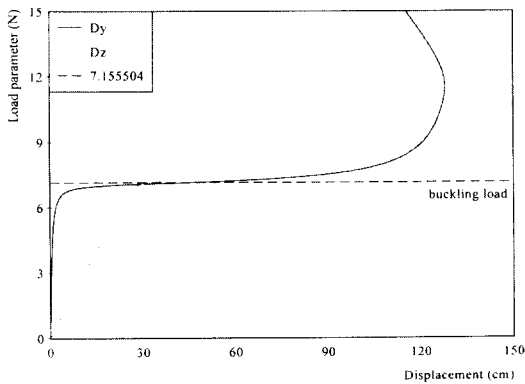
(a) Applied load



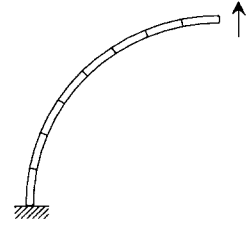
(b) 1st buckling mode



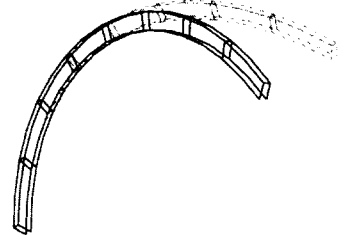
(c) Post-buckling analysis



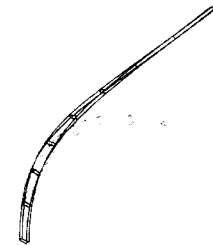
(d) Load-displacement diagram



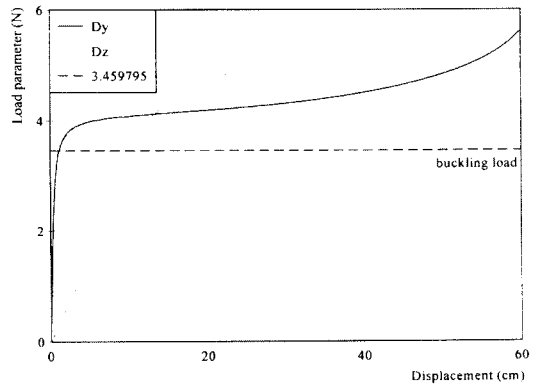
(a) Applied load



(b) 1st buckling mode



(c) Post-buckling analysis



(d) Load-displacement diagram

그림 10 Curved cantilever with C-type section under loading type 3

그림 11 Curved cantilever with C-type section under loading type 4

렴성 및 정확성을 증가시켰다.

3) 보강된 판 및 셸구조 해석 시 변환행렬을 이용하여 보강재를 해석모델에 포함시키므로써 보강재의 영향을 고려하였다.

4) 셸구조의 좌굴해석에서는 power method를 적용하여 해석의 효율을 높이며, 후좌굴해석에서는 변위 및 하중증분법을 적절히 결합시켜 보강된 셸구조의 후좌굴 거동추적을 용이하게 하였다.

5) 전·후처리 프로그램을 이용하여 입력데이터 작성을 손쉽게 하였으며, 좌굴모드 형상과 후좌굴거동의 추적이 용이하였다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단(KOSEF)의 연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참고 문헌

1. Bathe, K.J. and Bolourchi, S., "A geometric and material non-linear plate and shell element", *Computer and Structure*, Vol.11, 1980, pp.23~48.
2. Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A., "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.19, 1983, pp.541~566.
3. Hinton, E. and Owen, D.R.J., *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge, Swansea, U.K., 1984, pp.235~326.
4. Surana, K.S., "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. um. eth. Eng.*, Vol.17, 1983, pp.581~615.
5. 김문영, 민병철, "보강된 셸구조의 후좌굴 및 탄·소성 유한요소해석", 한국강구조학회논문집, 제4권, 제4호, 1994. 12.
6. Bathe, K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice2-Hall, 1982.
7. 김문영, 장승필, "보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 유한요소해석을 위한 변위 및 하중증분 알고리즘의 개발", 대한토목학회논문집, 제10권, 제2호, 1990. 6., pp.11~22.
8. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
9. ABAQUS, User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.
10. O'Leary, J. R. and Isaac Harari, "Finite Element Analysis of Stiffened Plate", *Computer and Structure*, Vol.21, 1985, pp.973~985.
11. Bouberguig, A. and Jirousek, J. "A Family of Special-Purpose Element for Analysis of Ribbed and Reinforced Shell", *Computer and Structure*, Vol.12, 1980, pp.253~264.
12. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P. *Mechanics of materials*, a division of Wadsworth, Inc, California, 1984, pp.414~418.
13. Argyris, J. H., Dunne, P. C., Scharpf, D. W., "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.14, 1978, pp.401~451.
14. Kim, K. D. "Buckling analysis of composite plates and shells using finite element method", 한국강구조학회논문집, 제6권, 제2호, 1994.6., pp.173~185.
15. Noor, A. K., "Stability of multi-layered composite plates", *Fibre Science and Technology*, Vol.8, 1975, pp.81~89.
16. Khdeir, A. A. and Librescu, L., "Analysis of symmetric cross ply laminated elastic plates using higher order theory : part II-buckling and free vibration", *Composite Structures*, Vol.9, 1988, pp.259~277.
17. Reddy, J. N. and Phan, N. D., "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher order shear deformation theory", *J. of Sound and Vibration*, 98(2), 1985, pp.157~170.
18. Argyris, J. H., "An excursion into large rotations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, 1982, pp.85~155.

(접수일자 : 1998. 5. 25)