

유사 공진형 물체에 대한 TM 전자파의 산란계산을 위한 MLFMA방법

MLFMA for Computation of TM Scattering from Near Resonant Object

안창희* · W. C. Chew**

Chang-hoi Ahn* · W. C. Chew**

요 약

모멘트법은 전자파산란문제에 널리 사용되고 있는데, 최근에 대용량의 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있는 기법들에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 대부분의 이런 기법에는 계산속도나 기억용량을 효율적으로 이용할 수 있는 반복법을 사용해서 행렬방정식을 풀게 되는데, 유사공진특성을 갖는 물체에 대한 산란은 물체 내부에서 전자파가 공진하는 특성을 가지므로 반복해법을 이용하여 적분방정식을 풀 경우 수렴이 잘 되지 않거나, 수렴되기까지 많은 반복회수를 필요로 한다. 본 논문에서 사용된 MLFMA(Multi-level Fast Multipole Algorithm)는 FMM(Fast Multipole Method)을 다층으로 확장한 알고리즘으로 반복회수당 계산시간을 $O(N\log N)$ 으로 줄일 수 있다. 이 MLFMA를 유사공진형구조에 적용하고, 또한 행렬식을 블록밴드행렬 전처리 하여 반복회수를 감소시켰다. 여기서 사용된 전처리행렬은 행렬분할법을 이용하여 $O(N)$ 의 계산시간으로 구할 수 있으므로, 미지수가 많을 때는 전처리행렬을 구하는데 드는 추가계산시간을 무시할 수 있다. 여기서 제안된 방법을 비행기의 공기유입구에 대한 TM 전자파산란 계산에 적용하여 효율성을 보였다.

Abstract

The method of moments has been widely used in the analysis of TM scattering problems. Recently, significant advances in the development of fast and efficient techniques for solving large problems have been reported. In such methods, iterative matrix solvers are preferred by virtue of their speed and low memory requirements. But for near resonant and strong multiple scattering problems, e.g., involving an aircraft engine inlet, a large number of iterations is required for convergence. In this paper, an efficient approximate inverse based preconditioner is used to reduce this number of iterations. By using the matrix partitioning method, the computational cost for obtaining the approximate inverse is reduced to $O(N)$. We apply this preconditioner to an $O(N\log N)$ algorithm, the multilevel fast multipole algorithm, for the aircraft engine inlet problem. The numerical results show the efficiency of this preconditioner.

*영남대학교 전기전자공학부(School of Electrical and Electronic Engineering, Yeungnam University)

**일리노이 대학교 (Dept. of ECE, University of Illinois, Urbana, IL, USA)

· 논문 번호 : 980525-052

· 수정완료일자 : 1998년 10월 28일

I. 서 론

본 논문에서는 한쪽면이 열린 도체 캐비티에 대한 전자파산란을 수치해석법을 이용하여 계산하였다. 도체의 표면에 유기되는 전류는 면적분방정식을 모멘트법^{[1],[2]}과 같은 수치해석법을 써서 구할 수 있는데, 결과적으로 나타나는 행렬방정식을 풀기 위해 가우스소거법이나 LU분해법(LU decomposition)과 같은 직접해법, 또는 conjugate gradient법과 같은 반복해법이 사용된다. 직접해법은 계산시간이 $O(N^3)$ 이므로 대규모의 문제를 푸는데는 적합하지 않다. 따라서 반복해법^[3]이 많이 사용되고 있는데, 대부분의 반복법은 한번의 반복계산에 $O(N^2)$ 의 계산시간이 소요되는, 한번 또는 두번의 행렬과 벡터 곱이 필요하다. 최근에 이 행렬과 벡터 곱에 대한 계산시간을 줄이기 위해 FMM(Fast Multipole Method)^{[4],[5]}과 이 방법을 다층구조로 확장시킨 MLFMA(Multilevel Fast Multipole Method)^{[6]-[8]}가 고안되었는데, 이 방법들은 계산시간을 각각 $O(N^{1.5})$ 와 $O(N \log N)$ 으로 감소시켰다.

그러나 캐비티와 비슷한 구조를 지닌 유사 공진 특성을 갖는 물체에 대한 전자파산란 계산은 반복법을 사용할 경우 많은 반복회수를 요한다. 따라서 이러한 ill-posed 특성을 갖는 행렬식을 풀 경우 적절한 전처리기법(preconditioning)^{[9],[10]}을 도입해서 반복회수를 줄일 수 있다. 많이 사용되는 전처리기법은 크게 두 가지 부류로 나눌 수 있는데 하나는 계수행렬의 Incomplete LU(ILU) decomposition을 이용한 것이고 다른 부류는 계수행렬의 근사역행렬의 분할(factorization)에 기초한 것이다. 이런 전처리기법을 적용하기 위해서 추가적인 계산시간이 필요한데, MLFMA와 같은 fast algorithm에 적용하기 위해서는 이 전처리를 위한 추가계산시간이 $O(N \log N)$ 을 넘지 않아야 한다.

본 논문에서는 좁고 긴 도체벽면을 따라 일어나는 전파의 다중반사로 인한 유사공진특성을 효율

적으로 처리하기 위해서 모멘트행렬을 블록화한 다음, 이 블록행렬의 근사역행렬을 구하여 전처리행렬로 이용하였다.^{[11],[12]} 이 전처리에 드는 계산시간은 $O(N)$ 으로 대규모의 문제에서는 반복해법의 계산시간에 비해 무시할 수 있다. 이 전처리기법을 MLFMA와 같이 사용하여 비행기 엔진의 공기유입구과 같이 공진특성을 갖는 구조에 대한 전자파산란을 2차원 TM 경우에 대해서 해석해 보았다.

II. 적분방정식과 Fast Algorithms

이차원 도전체에 대한 산란은 표면적분방정식을 이용해서 해석할 수 있는데, z축에 대한 TM파에 대한 산란은 다음과 같은 전계적분방정식(EFIE : Electric Field Integral Equation)으로 표현될 수 있다.

$$E_z^i(\rho) = \frac{k\eta}{4} \int_C dC' H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \cdot J_z(\rho'), \quad \rho \in C, \quad (1)$$

여기서 $J_z(\rho')$ 는 산란체의 표면 C에 유기되는 전류이고, $E_z^i(\rho)$ 는 입사파를 말한다. $k, \eta, H_0^{(1)}$ 는 각각 파수, 파동임피던스, 2차원 자유공간 그린함수인 0차 1종 한켈함수이다. 이 식으로부터 구한 유기전류로부터 산란파 $E_z^{scat}(\rho)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_z^{scat}(\rho) = -\frac{k\eta}{4} \int_C dC' H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \cdot J_z(\rho') \quad (2)$$

공진특성을 가지는 문제에서는 식 (1)을 직접 적용하는 경우 수렴에 많은 반복회수를 요하거나, 해가 부정확하게 된다. 이를 해결하는 한 방법으로 CFIE(Combined Field Integral Equation)^{[13]-[16]}가 닫힌 영역을 갖는 산란체의 해석에 적용되어 왔는데, 이는 방정식이 복소공진주파수를 갖게 하여 실

체의 공진주파수에서의 계산을 가능하게 하였다. CFIE는 다음과 같은 미분연산자를 식 (1)에 적용하여 얻을 수 있다.

$$P(\rho) = 1 + \lambda \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla, \quad (3)$$

여기서 $\hat{\mathbf{n}}$ 은 표면에서의 단위법선벡터이고, λ 는 임의의 복소수이다. 이 방법은 공진특성을 가지지 않는 문제의 해석에 있어서도 반복법을 적용해서 문제를 풀 경우 반복회수를 줄일 수 있다.

최근에 들어서 적분방정식을 conjugate gradient 형의 반복해법으로 풀 경우 행렬과 벡터의 곱연산을 빨리 계산하기 위해서 FMM(fast multipole method)^{[4],[5]}가 개발되었다. 자세한 이론 및 방법은 참고문헌^[5]에 자세히 나와 있으므로, 여기서는 간단히 소개하면 다음과 같다. 먼저 식 (1)을 모멘트법을 사용하여 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = f_i, \quad i=1, \dots, N, \quad (4)$$

여기서 N 은 분할된 영역의 전체 요소 개수이다. 위의 식 (4)에서 행렬과 벡터의 곱, $\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j$ 을 구하기 위해서는 N^2 의 연산이 필요하게 되는데 이것이 반복법을 사용할 경우, 시간이 가장 많이 드는 연산이 된다. FMM은 이 연산시간을 줄이기 위해서 고안되었다. 먼저 분할된 N 개의 산란요소를 각각 M 개의 요소를 포함하는 N/M 개의 그룹으로 만들고, translational addition theorem^[17]을 사용하면 A_{ij} 를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$A_{ij} = \mathbf{V}_{il}^t \cdot \bar{\mathbf{a}}_{ll'} \cdot \mathbf{V}_{l'j} \quad (5)$$

여기서 l' 과 l 은 각각 l' 과 l 번째 그룹의 중심을 나타낸다. 여기서 벡터 \mathbf{V} 와 행렬 \mathbf{a} 의 크기는 각 그룹의 요소수 M 에 비례한다. 행렬 \mathbf{a} 를 대각화(diagonalization)시키기 위해 평면파로 기저함수를 선

택하면 식 (4)는 다음과 같이 표시될 수 있다^{[4],[5]}.

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = \begin{cases} \mathbf{V}_{il}^t \cdot \sum_{l'=1, l' \neq l}^{N/M} \bar{\mathbf{a}}_{ll'} \cdot \sum_{j \in G_{l'}} \mathbf{V}_{l'j} x_j, & i \in G_l, \quad l=1, \dots, N/M \\ \sum_{j \in G_l} A_{ij} x_j, & i \notin G_l \end{cases} \quad (6)$$

여기서 $\bar{\mathbf{a}}_{ll'}$ 는 대각행렬이 되고, G_l 은 l 번째 그룹에 속하는 요소들의 집합이다. 따라서 행렬과 벡터의 곱은 i 와 j 가 같은 그룹에 속하지 않는 경우에는 계산시간을 줄일 수 있다. 그룹의 크기 M 을 $M \sim \sqrt{N}$ 으로 한다면 이 계산시간은 $O(N^{1.5})$ 가 된다.^{[4],[5]} 같은 그룹에 속할 때는 기존의 방법과 같은 연산을 사용한다. MLFMA(Multilevel Fast Multipole Algorithm)는 FMM을 다층 구조로 확장한 것인데 이 경우 층의 개수가 $\log N$ 에 비례하게 된다. 따라서 각 층에서 N 번의 연산이 필요하다고 하면, 이것은 행렬과 벡터의 곱에서 $O(M \log N)$ 의 알고리즘이 된다.^{[6]~[8]}

III. 행렬 전처리기법(Matrix Preconditioning)

반복해법에서의 계산시간은 원하는 오차범위에 드는 수렴을 얻기 위한 반복회수에 비례하게 되는데, 수렴도는 모멘트 계수행렬의 스펙트럼특성에 관계한다. 모멘트계수 행렬에 전처리행렬(matrix preconditioner)로서 모멘트계수행렬의 근사역행렬(approximated inverse)을 사용하여 수렴속도를 증가시킬 수 있는데 즉, 원래의 모멘트행렬에 전처리 행렬을 곱하여 모멘트행렬의 condition number를 감소시키는 것이 된다. 식 (4)를 행렬식으로 나타내면

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (7)$$

가 되고, 이 때 위 식의 양변에 $\bar{\mathbf{A}}$ 의 근사역행렬

(approximate inverse), $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}$ 을 곱하면

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (8)$$

이 때 $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}$ 의 condition number는 $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}$ 의 근사정도에 따라서 감소하게 되고, 따라서 행렬식을 반복법으로 풀 경우 수렴에 필요한 반복회수를 줄여준다.

본 논문에서는 행렬 분할 기법(Matrix Partitioning Method)^[18]을 이용하여 근사역행렬, $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}$ 을 구하였다. 먼저 전체 절점요소를 각각 M 개의 요소를 가진 p 개의 그룹으로 나누면 모멘트행렬은 $p \times p$ 의 블록행렬이 되는데, 적분방정식 커널인 그린함수의 특성상 그룹사이의 거리가 멀수록 상호연관관계가 약해지므로 근사역행렬을 구하기 위해서 자기 자신의 그룹과 바로 이웃그룹들과의 연관항들만 고려한다. 따라서 모멘트행렬은 그림 1과 같이 블록 밴드 행렬(block banded matrix)모양으로 되는데, 실제의 각 블록의 위치는 요소들을 어떻게 그룹으로 짓는가에 따라 변할 수 있다. 또한 그림 1과 같이 양쪽 끝에 나타난 두 개의 블록은 산란체가 스트립과 같은 모양일 경우에는 존재하지 않는 것들이다. 이 블록행렬의 역행렬을 전처리행렬

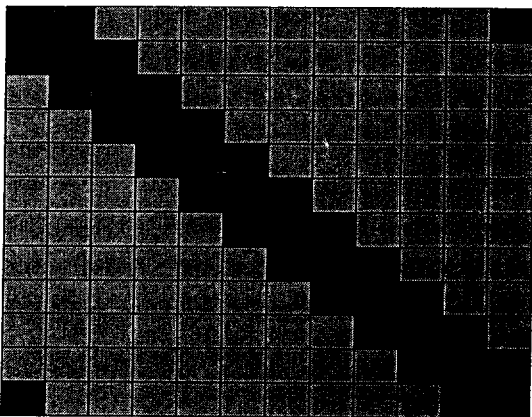


그림 1. 블록 밴드 행렬의 구조
Fig. 1. Block banded matrix with two corner blocks in the block form of the MOM matrix.

로 사용할 수 있는데, 근사의 정도는 블록의 크기에 따라 달라진다.

3-1 블록대각행렬 전처리 (The block diagonal preconditioning)

블록대각 행렬은 자기 그룹의 상호연관항만 고려한 것으로, 블록 밴드전처리 행렬에서 인접한 블록항이 없는 경우이다. 이 때 이의 역행렬은 각각의 대각 블록행렬을 역행렬을 구하여 쉽게 계산될 수 있는데, LU decomposition과 같은 직접법을 사용할 경우 전체의 역행렬을 구하는데 소요되는 시간은 $O(pM^3)$ 가 된다. 여기서 p 는 블록의 개수이고 M 은 각 블록내의 요소수이다. 따라서 한 블록내의 요소수를 고정시키면 N 이 클 경우에 p 는 N 에 비례하므로 전체 계산시간은 $O(N)$ 이 된다.

3-2 블록밴드행렬 전처리(The block banded preconditioning)

앞 절에서 블록대각 행렬은 인접블록의 항을 추가시켜 블록밴드행렬로 확장시킬 수 있는데, 이의 역행렬은 대각블록행렬일 경우보다 계산시간이 더 많이 소요되게 된다. 그러나 본 논문에서는 행렬분할기법(Matrix partitioning method)^[18]을 이용해서 전처리행렬로 사용될 근사역행렬을 구하는데 소요되는 계산시간을 $O(N)$ 으로 유지하였다. 행렬분할기법은 큰 행렬을 분할하여 작은 행렬로 나누어 반복적으로 계산하여 해를 구하는 방법인데, 이 기법을 이용해서 블록밴드행렬의 근사역행렬을 구하는 과정을 설명하면 다음과 같다.

다음의 행렬방정식,

$$\overline{\mathbf{A}}_b \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c} \quad (9)$$

에서 $\overline{\mathbf{A}}_b$ 는 그림 1에서 보여진 대각블록과 두 개의 이웃블록으로 구성되는 블록밴드행렬이다. 이 행렬식에서 벡터, \mathbf{z} 와 \mathbf{c} 를 다음과 같이 나타내면,

$$\mathbf{z}^t = (\mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t) \quad (10)$$

$$\mathbf{c}^t = (\mathbf{a}^t, \mathbf{b}^t) \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_{N-M}), \quad (12)$$

$$\mathbf{y}^t = (y_1, y_2, \dots, y_M),$$

$$\mathbf{a}^t = (a_1, a_2, \dots, a_{N-M}), \quad (13)$$

$$\mathbf{b}^t = (b_1, b_2, \dots, b_M),$$

가 된다. 따라서 식 (9)를 다음과 같이 두 개의 행렬식으로 분리하면

$$\overline{\mathbf{A}}_1 \cdot \mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{a} \quad (14)$$

$$\overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (15)$$

가 되고, 여기서 $\overline{\mathbf{A}}_1$, $\overline{\mathbf{B}}_1$, $\overline{\mathbf{A}}_2$ 그리고 $\overline{\mathbf{B}}_2$ 는 각각 크기가 $(N-M) \times (N-M)$, $M \times (N-M)$, $(N-M) \times M$, $M \times M$ 인 행렬이다. 위의 행렬식 (14)와 (15)를 연립해서 풀면 다음과 같이 x , y 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{x} = (\overline{\mathbf{A}}_1^{-1} + \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1}) \cdot \mathbf{a} - \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = -\overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \mathbf{a} + \overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (17)$$

위 식에서 $\overline{\mathbf{D}}$ 는 다음과 같다.

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{B}}_2 - \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \quad (18)$$

따라서 $\overline{\mathbf{A}}_b$ 의 역행렬은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\overline{\mathbf{A}}_b^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} + \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} & -\overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}^{-1} \\ -\overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} & \overline{\mathbf{D}}^{-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서

$$\overline{\mathbf{C}}_1 = \overline{\mathbf{A}}_1^{-1} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}^{-1}, \quad (20)$$

$$\overline{\mathbf{C}}_2 = \overline{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 \cdot \overline{\mathbf{A}}_1^{-1}, \quad (21)$$

이다. 위 행렬에서 $\overline{\mathbf{D}}$ 는 크기가 $M \times M$ 인 블록행렬로 LU decomposition과 같은 직접해법에 의해 역행렬을 구한다. 그리고 $\overline{\mathbf{A}}_1^{-1}$ 은 똑같은 방법으로 다시 분할(partition)하여 구할 수 있다. 따라서 블록의 개수만큼 위의 분할과정을 반복하여 전체의 역행렬을 구할 수 있다. 각 스텝에서 역행렬은 꼭 찬 행렬(full matrix)이 되어 정확한 역행렬을 구하는데 계산시간은 가우스소거법과 같은 $O(N^3)$ 이 된다. 하지만 여기서 전처리행렬로 사용하기 위해 정확한 역행렬을 구할 필요는 없으므로, 각 스텝에서의 $\overline{\mathbf{A}}_b$ 의 역행렬을 블록밴드 행렬로 근사하여 계산시간을 줄인다. 이 역행렬을 구하는 데 드는 시간은 각 스텝마다 하나의 $M \times M$ 행렬의 역행렬을 구하는 데 드는 시간과 몇 개의 행렬과 벡터의 곱을 구하는 데 드는 시간의 합이 된다. LU decomposition을 이용해서 $\overline{\mathbf{D}}$ 의 역행렬을 구하는 시간은

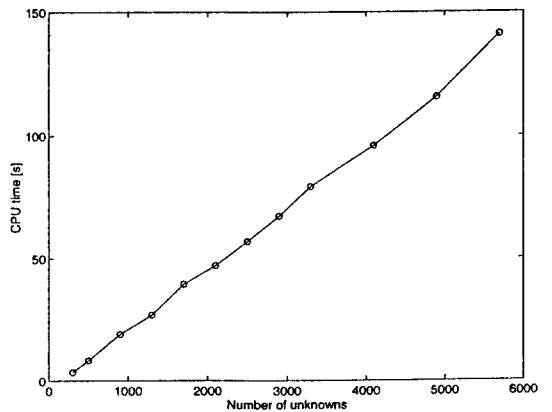


그림 2. 블록밴드 전처리행렬을 위한 소요 시간
Fig. 2. CPU time required for computing block banded matrix preconditioner.

$O(pM^3)$ 가 되는데, M 이 고정된 값이고 p 는 블록의 개수로 N 에 비례하므로 N 이 클 경우 $O(N)$ 으로 된다. 나머지 \bar{C}_1 , \bar{C}_2 등을 구하기 위한 행렬과 벡터의 곱들에 드는 시간은 각 행렬들을 블록밴드행렬로 근사할 경우 역시 $O(N)$ 으로 만들 수 있다. 그림 2에서 이 근사역행렬을 구하는데 드는 계산 시간을 나타내었다. 따라서 이 전처리행렬을 만드는데 필요한 계산시간과 메모리는 모두 $O(N)$ 이 된다.

IV. 수치계산결과

비행기의 엔진 공기유입구(aircraft engine inlet)와 같이 근사공진특성을 갖는 물체에 대한 산란을 제안된 방법으로 계산하였다. 그림 3에 사각형공기유입구와 굴곡진 공기유입구의 구조를 나타내었다. 그림 3과 같은 구조의 공기유입구 내부로 비스듬히 입사된 전자파는 벽면을 따라서 다중반사가 일어나면서 진행하게 된다. 이런 전자파의 다중 산란은 유사공진특성을 갖게 되어 벽면에 복잡한 유기전류를 만들게 되므로, 전체의 비행기에 대한 산란계산에서 이 공기유입구에 대한 산란계산이 가장 어려운 부분이 된다. 모멘트법을 이용할 경우 계수행렬이 ill-condition 특성을 갖게 되므로 반복해법으로 쉽게 풀 수가 없다.

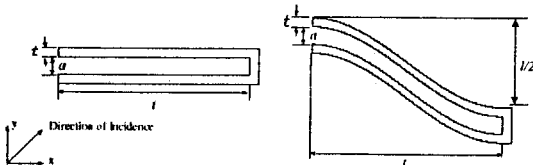


그림 3. (a) 사각형 공기유입구의 구조
(b) 굴곡진 공기유입구의 구조
Fig. 3. Geometry of the (a) rectangular and (b) curved inlets with aperture a , thickness t , and x -dimension l (total height= $2t+a+l/2$).



그림 4. 공기유입구 근방에서의 TM 산란파 크기의 분포(사각형 공기유입구의 경우, $a=2$ m, $t=0$ m, $l=12$ m, EFIE사용, $f=300$ MHz, 입사각 $\phi=45^\circ$)

Fig. 4. Scattered TM polarized field distribution ($|E_z^{scat}|$) near the inlet. $a=2$ m, $t=0$ m, $l=12$ m, EFIE, $f=300$ MHz, incident angle $\phi=45^\circ$.

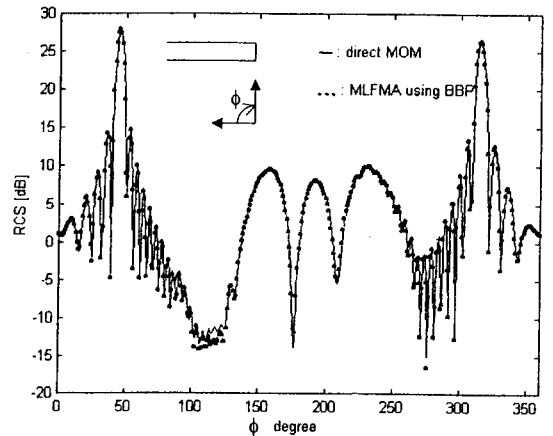


그림 5. 그림 4의 구조에 대한 산란 단면적 (입사각 $\phi=45^\circ$)

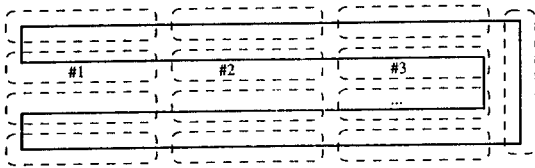
Fig. 5. Radar cross section of the rectangular inlet shown in Fig. 4 (incident angle $\phi=45^\circ$).

그림 4에서 TM 편파된 입사파가 비스듬히 사각형 공기유입구에 입사할 경우 산란파의 분포를 나타내었는데 산란파의 크기에 따라 흑백의 명암으로 표시하였다. 유입구 내부에서는 도파관 내의 전자파와 비슷하고, 유입구 끝 모서리 쪽에서 산란파의 세기가 강한 것을 볼 수 있다.

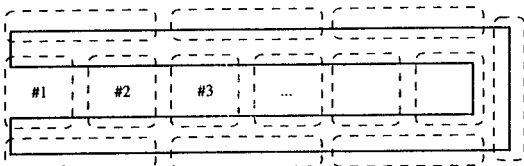
그림 5는 그림 4의 경우에 대한 산란단면적을 나타낸 것으로 일반적인 모멘트법과 BBP를 이용한

MLFMA의 결과가 잘 일치함을 보여준다. 그림 6에서와 같이 요소로 분할된 사각형 공기유입구에 대한 그룹을 두가지 형태로 나누었다. 그림 6(a)는 벽면을 따라 그룹을 지은 것이고, 그림 6(b)는 마주보는 양쪽 벽면의 요소들을 한 그룹으로 만든 것으로, 공기유입구 내부에서 다중반사를 효율적으로 고려하기 위한 것이다. 각각의 그룹방식에 대해 블록의 크기에 따른 수렴특성을 그림 7에 나타내었다. 블록의 크기가 커질수록 반복회수는 줄어드는 것을 알 수 있지만, 전처리 행렬을 구하는 데 소요되는 시간도 증가하게 되므로 적절한 블록의 크기를 선택하여야 한다. 본 논문에서는 한 파장을 10개의 미지수로 나누었고 100개를 한 블록으로 묶었다.

그림 8에서는 블록대각행렬 전처리(BDP : block diagonal preconditioning)를 한 경우와 블록밴드행렬 전처리(BBP:block banded preconditioning)를 한 경우에 대해 각각 수렴특성의 개선을 보여 주



(a)



(b)

그림 6. 본 논문에서 사용된 두가지의 그룹 방식

(a) 그룹방식 A, (b) 그룹방식 B

Fig. 6. Two different groupings.

(a) grouping A, (b) grouping B.

고 있는데 BBP를 사용한 경우가 수렴특성이 더 좋을 수 있다. 이것은 BBP의 경우 자기자신의 그룹뿐만 아니라 이웃 그룹들과의 상호 산란연관도 고려했기 때문이다. 이 때 BBP에 대한 계산시간이 BDP보다는 더 소요되는데, 여기서는 행렬분할기법(matrix partitioning method)을 이용해서 전처리행렬을 만드는 데 드는 추가시간을 BDP와 같은 $O(N)$ 으로 유지하였다. 따라서 한번 반복계산에 $O(N^2)$ 이 소요되는 conjugate-gradient 법이나, $O(N \log N)$ 이 소요되는 MLFMA를 사용할 경우, 대규모의 미지수를 갖는 문제에서는 추가계산시간은 무시할 수 있다. 반복해법내의 가장 시간이 많이 소요되는 행렬과 벡터의 곱을 빨리 하기 위하여 MLFMA를 사용하였다. 그림 9는 일반적인 모멘트법을 사용한 경우와 MLFMA에 BBP를 적용했을 경우와 적용하지 않았을 경우에 대한 반복회수와 전체 계산시간을 보여주고 있다. 여기서 반복해법으로는 TFQMR (transpose-free quasi minimal residual)법^[19]이 사용되었다. 이 그림에서 conjugate-gradient법과 TFQMR법에 각각 BBP를 적용했을 경우와 적용하지 않았을 경우의 수렴특성도 보여주고 있는데, TFQMR법의 경우 오차가 단조감소(monotonic decreasing)하지는 않지만 conjugate-gradient법에 비해 반복회수가 적게 필요함을 알 수 있다. 표 1에서는 BBP를 사용한 경우와 그렇지 않은 경우의 condition number와 반복회수를 보여주고 있다.

표 1. 계수 행렬의 condition number와 반복회수

Table 1. Condition number and the number of iterations. This result is for the rectangular inlet with $a=1$ m, $t=0$ m, and $l=7$ m at 300 MHz using EFIE.

	without BBP	with BBP
condition number	307	105
No. of Iterations	128	30

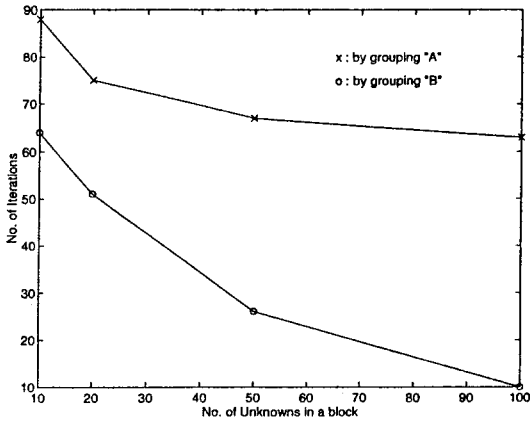


그림 7. 두 가지 그룹방식에 대한 반복회수 비교. (사각형 공기유입구의 경우, $a=2$ m, $t=1$ m, $l=24$ m, EFIE사용, $f=300$ MHz)

Fig. 7 Comparison of the number of iterations with the two different groupings as shown in Fig. 6. This result is by using EFIE at 300 MHz for the rectangular inlet as shown in Fig. 3. The parameters are $a=2$ m, $t=0$ m, and $l=24$ m fixed.

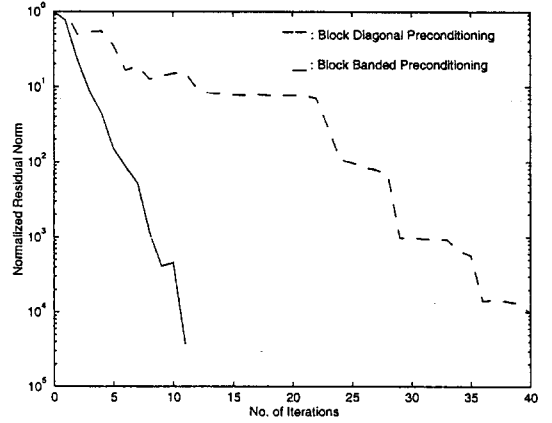
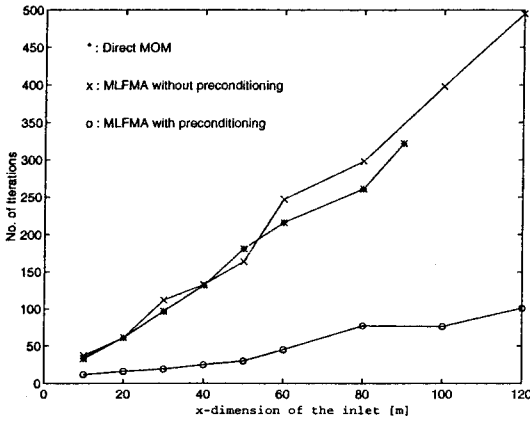
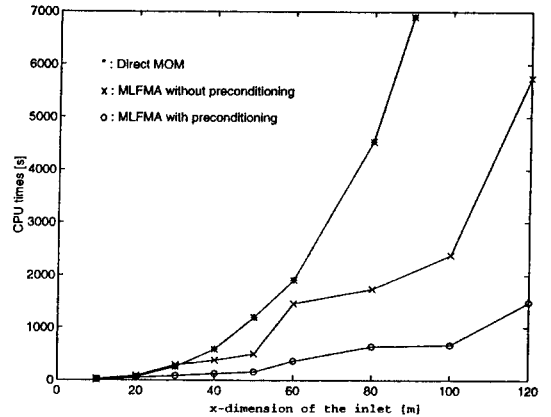


그림 8. 블록의 크기 $M=100$ 일 경우, 블록밴드전처리(BBP)의 수렴특성비교. (EFIE이용, $a=1$ m, $t=0$ m, $l=24$ m, $f=300$ MHz)

Fig. 8. Convergence rate for the block diagonal preconditioning and the block banded preconditioning with the block size $M=100$. These results are by using EFIE at 300 MHz for the scattering of the rectangular inlet ($a=1$ m, $t=0$ m, $l=24$ m, $f=300$ MHz).



(a)



(b)

그림 9. 굴곡진 공기유입구의 산란에 대한 모멘트법과 MLFMA의 (a) 반복회수 비교, (b) 계산시간 비교 (CFIE이용, $a=2$ m, $t=1$ m, $f=300$ MHz)

Fig. 9. Comparison between conventional MOM and MLFMA with/without BBP with the block size $M=100$, (a) Number of iterations, (b) CPU time. These result are by using CFIE for the scattering of the curved inlet ($a=2$ m, $t=1$ m, $f=300$ MHz).

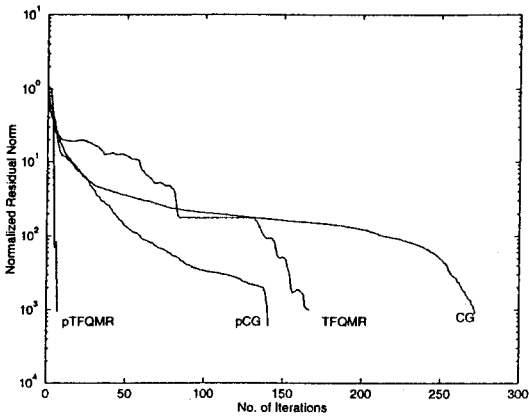


그림 10. TFQMR과 CGM의 수렴특성비교(pCG: pre-conditioned CG, pTFQMR: preconditioned TFQMR) 굴곡진 공기유입구에 대한 경우 (EFIE이용, $a=1$ m, $t=0$ m, $l=24$ m, $f=300$ MHz)

Fig. 10. Comparison between TFQMR and CG solvers each with and without BBP for the curved inlet with parameters, $a=1$ m, $t=0$ m and $l=24$ m. These results are by using EFIE at 300 MHz.

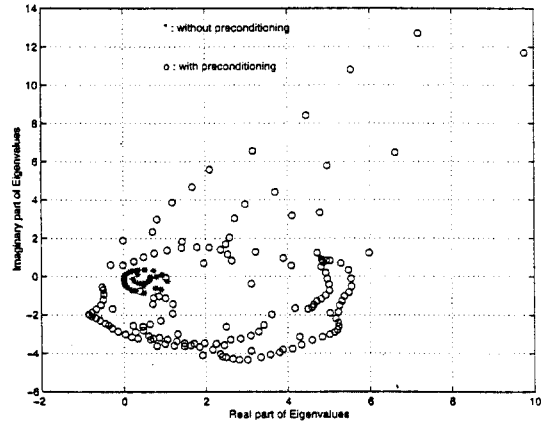


그림 11. BBP를 사용했을 때, 사각형 공기유입구의 모멘트계수행렬에 대한 고유치 분포의 비교. (EFIE사용, 한 블록의 미지수개수 $M=10$, $a=1$ m, $t=0$ m, $l=7$ m, $f=300$ MHz)

Fig. 11. The distributions of the eigenvalues in the complex plane with and without BBP. The parameters of the rectangular inlet are $a=1$ m, $t=0$ m, and $l=7$ m at 300 MHz. The number of unknowns in a block is 10. This result is by using EFIE.

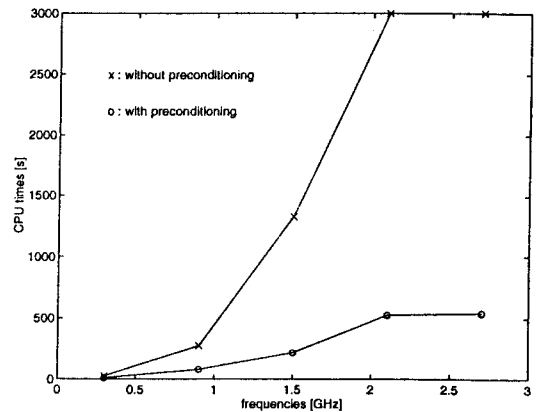
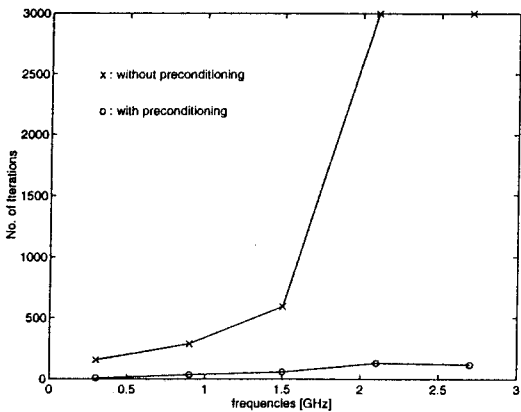


그림 12. 주파수에 따른 수렴특성비교 (a) 반복회수, (b) 계산시간

(굴곡진 공기유입구의 경우, $a=2$ m, $t=0$ m, $l=24$ m, 블록의 크기 $M=100$, EFIE사용)

Fig. 12. Comparison of the convergences. (a) Number of iterations, (b) CPU time for the curved inlet as shown in Figure 3. The parameters are $a=2$ m, $t=0$ m and $l=24$ m are fixed and the frequency is varying. The number of unknowns in a block is 100. This result is by using EFIE.

이 경우에 있어서 계수행렬의 고유치를 그림 11에 나타내었는데, BBP를 적용하기 전에 거의 영의 값을 갖던 고유치들이 BBP를 적용한 후에는 제거됨을 알 수 있다. 이 때 거의 영의 값을 갖던 고유치들은 근사 공진 모드에 해당된다고 사료된다. 따라서 이 유사공진모드들을 제거하므로 수렴특성이 개선되었다. 그림 12에서는 굴곡진 공기유입구에 대한 주파수에 따른 계산결과이다. 이 경우 블록의 크기는 100으로 하였고 한 파장당 요소의 수는 10개로 하였다. 그림 12에서 알 수 있듯이 주파수가 증가하여도 수렴특성이 많이 개선됨을 알 수 있다.

V. 결 론

반복해법을 사용해서 수렴이 잘 되지 않거나 수렴특성이 매우 느린 유사공진형 구조에 대한 TM 전자파의 산란을 블록밴드행렬로 전처리된 MLFMA를 이용하여 효율적으로 계산하였다. 이 때 블록밴드 전처리행렬을 위한 추가 계산시간은 행렬분할법을 이용해서 $O(N)$ 으로 유지하여, $O(N\log N)$ 알고리즘인 MLFMA에 효율적으로 적용하였다. 이 방법을 유사공진특성을 갖는 공기유입구에 대한 산란계산에 적용하여 계산시간을 대폭 감소시켰을 뿐 아니라, 기존의 반복해법으로는 잘 수렴치 않는 문제도 해결할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] J. H. Richmond, "TE wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp. 460-464, 1966.

[2] R. F. Harrington, *Field Computation by moment Methods*, Malabar, Florida: Krieger Publ., 1981.

[3] R.Barrett and et. al., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for*

Iterative Methods, Philadelphia: SIAM Publ., 1995.

[4] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," *J. Comput. Phys.*, vol. 86 (2), pp. 414-439, 1990.

[5] C. C. Lu and W. C. Chew, "Fast algorithm for solving hybrid integral equations," *Inst. Elect. Eng. Proc. Pt.H*, vol. 140 (1), pp. 455-460, 1993.

[6] C. C. Lu and W. C. Chew, "A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation for wave scattering," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 7(10), pp. 466-470, 1994.

[7] J. M. Song and W. C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 10(1), pp. 14-19, 1995.

[8] J. M. Song, C. C. Lu, and W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trnas. on Ant. Prop.*, vol. 45(10), pp. 1488-1493, 1997.

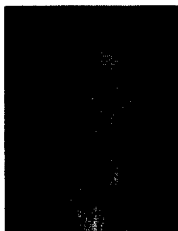
[9] T. Dupont, R. P. Kendall, and H. H. Rachford, "An approximate factorization procedure for solving self-adjoint elliptic difference equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 5(3), pp. 559-573, 1968.

[10] T. Kailath, A. Vieira, and M. Morf, "Inverse of toeplitz operators, innovations, and orthogonal polynominals," *SIAM Review*, vol. 20(1), pp. 106 -119, 1978.

[11] L. Tsang, C. H. Chan, H. Sangani, A. Ishimaru, and P. Phu, "A banded matrix iterative approach to monte carlo simulations of large-scale random rough-surface

- scattering," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 7(9), pp. 1185 -1200, 1993.
- [12] A. D. Yaghjian, "Banded-matrix pre conditioning for electric-field integral equations," *IEEE APS Int. Symp. Dig.*, pp. 1806 -1809, 1997, Montreal, Canada.
- [13] P. Werner, "On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic waves," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 7, pp. 348 - 396, 1963.
- [14] O. I. Panich, "On the question of solvability of the exterior boundary-value problems for the wave equation and maxwell's equation," *Russian Math. Surveys*, vol. 20, pp. 221 - 226, 1965.
- [15] K. M. Mitzner, "Numerical solution of the exterior scattering problem at the eigen-frequencies of the interior problem," *URSI Meeting Digest*, pp. 76, 1968.
- [16] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "H-field, e-field, and combined field solutions for conducting bodies of revolution," *Arch. Elektron. Ubertragung. (AEU)*, vol. 32(4), pp. 159 -164, 1978.
- [16] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Piscataway, NJ: IEEE press, 1995.
- [17] C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice Hall, 1956.
- [18] R. W. Freund, "A transpose-free uasi-minimal residual algorithm for non-hermitian linear systems," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 14, pp. 470 - 482, 1993.

안 창 회



1985년 2월 : 서울대학교 전기공학
과(공학사)
1988년 2월 : 한국과학기술원 전기
및 전자공학사(공학석사)
1992년 2월 : 한국과학기술원 전기
및 전자공학과(공학박사)
1997년 2월 ~ 1998년 2월 : University

of Illinois at Urbana Champaign 방문교수

1993년 ~ 현재 : 영남대학교 전기전자공학부 조교
수

[주 관심분야] 전자파 수치해석기법, 마이크로파 수
동소자 해석 및 설계 등

W. C. Chew

1976년 : MIT B.S. degree

1978년 : MIT M.S. degree

1980년 : MIT ph. D.

1985년 ~ 현재 : University of IL. at
Urbana-Champaign 교수