

## 인장과 굽힘응력을 받는 판재의 표면균열해석

### Analysis of Surface Crack under Tension and Bending Stress in Plate

오 환 섭\*, 박 철 회\*\*, 허 민 구\*\*  
H. S. Oh, C. H. Park, M. G. Hur

#### ABSTRACT

In this study, when tension and bending stress act on plate simultaneously, stress intensity factor is analyzed at crack tip with using BEM(Boundary Element Method). In this analysis, stress intensity factors(S.I.F) are defined for variable ligament, aspect and stress ratio( $\sigma_T/\sigma_B$ ). Consequently, predicted that crack grow to depth direction at low aspect and ligament ratio in tension stress and to surface direction in bending stress. Tension and bending stress act on plate same time, effect of tension stress in the first stage and effect of bending stress in the after stage was to observed. The outbreak of secondary crack in backside is under the control of stress amplitude and predict that the point of outbreak is near backside.

주요기술용어 : B.E.M(Boundary Element Method, 경계요소법), S.I.F(Stress Intensity Factor, 응력 확대계수), Surface crack(표면균열), Crack growth(균열성장), Secondary crack(2차 균열)

#### 1. 서 론

최근 기계구조물의 대형화, 고온·고압화, 고속화 등으로 인하여 안전성 신뢰성의 요구가 점차 증가하고 있다. 특히 기계구조물의 파손 사례는 대부분이 피로와 어떤 형태로든 관련되어 있

으므로<sup>1,2)</sup> 피로균열의 발생 성장과정을 파악하고 선형 파괴역학에 바탕을 둔 크랙의 성장거동을 예측하는<sup>3~5)</sup> 것은 중요하다. 특히, 피로파괴는 표면균열이나 부분 관통균열의 형태로서 3차원 형상을 갖는 균열형태로 시작되기 때문에<sup>6)</sup> 3차원 표면균열의 해석<sup>7~9)</sup>은 매우 중요한 문제로 대두되고 있다.

그러나, 실제 구조물에 있어서의 환봉재나 판재의 경우 조립상의 문제, 외부환경의 영향 등으

\* 정회원, 경희대학교 기계공학과  
\*\* 경희대학교 대학원

로 인하여 단일하중이 작용하는 경우는 적고 복합적으로 동시에 작용하는 경우가 많이 발생하지만 이에 대한 해석은 미비한 실정이다. 또한, 판재나 관재에 있어서의 해석은 균일하중하에서의 균열의 성장과 관통<sup>10-12)</sup>에만 초점을 맞추어 해석하여 실제로 인장과 굽힘이 동시에 작용하는 경우 굽힘응력으로 인한 응력구배의 영향으로 인해 주균열의 배면에 2차균열의 발생이 우려되어 LBB(Leak Before Break)평가에 적용하는데에는 한계가 있다.

따라서 본 연구는 경계요소법<sup>13)</sup>을 이용하여 판재에서 인장과 굽힘응력이 동시에 작용하는 경우에 있어서 균열선단에서의 응력확대계수의 해석 및 응력비( $\sigma_T/\sigma_B$ )에 따른 크랙의 성장거동을 해석하고 2차균열의 발생예측을 위하여 주균열 배면의 응력분포거동을 해석하고자 한다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 BEM을 이용한 3차원 균열해석<sup>13)</sup>

경계요소법에 의한 탄성해석의 순서 과정을 구분하면 크개는 주어진 미분방정식의 경계치 문제를 경계적분 방정식으로 변환하는 정식화의 과정과 적분방정식을 이산화 해석을 통해 대수방정식으로 귀착시켜 수치해석하는 과정이 있다.

경계요소법에서 기본해는 기중함수로서 지배방정식을 만족하는 해를 이용한다. 일반적으로 반무한체에 단위 집중력이 작용하는 경우에 Mindlin 해를 사용할 수 있다. 본 연구에서도 문제의 해석을 효율적으로 수행하기 위하여 Mindlin의 해를 사용하였고 Mindlin의 해는 다음과 같이 Kelvin의 해와 Complimental 항의 합이다.

$$U_{ij}^M = U_{ij}^K + U_{ij}^C, \quad T_{ij}^M = T_{ij}^K + T_{ij}^C \quad (1)$$

적분방정식의 유도에는 체적력  $\bar{b}_i$ 와 경계상의 표면력  $t_j$ , 변위  $u_j$ 가 작용하는 하중계와 동일 형상의 탄성체가 내부의 한 점  $p$ 에 단위 집중력이 작용하는 하중계를 생각한다.

이 두 하중계에 Betti의 상반정리를 적용하면

$$u_i(p) = \int_S \{U_{ij}(p, Q)t_j(Q) - T_{ij}(p, Q)u_j(Q)\} dS(Q) + \int_V \bar{b}_j(q)U_{ij}(p, q)dV(q) \quad (2)$$

$U_{ij}(P, Q)$ 와  $T_{ij}(P, Q)$ 는 기본해를 통한 기지의 양 일 경우 내점  $p$ 의 변위를 구할 수 있다. 단 경계상의 변위 표면력은 미지량이 포함되어 있기 때문에 내점  $p$ 를 경계상의 점  $P$ 로 가져가는 조작을 해서 정리하면 경계적분 방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{1}{2} u_i(P) + \int_S T_{ij}(P, Q)t_j(Q) dS = \int_S U_{ij}(P, Q)t_j(Q) dS + \int_V \bar{b}_j(q)U_{ij}(P, q) dV \quad (3)$$

또한 식(3)의 경계적분 방정식은 이산화 해석을 통해 대수 방정식으로 변환되어 탄성해석이 가능해진다. 2차원 8절점 요소를 사용하여 경계적분방정식(식 (3))을 이산화 하면

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^8 u_j(n, k) \int_S T_{ij}(P, (n, k)) M^k(\xi) J(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^8 t_j(n, k) \int_S U_{ij}(P, (n, k)) M^k(\xi) J(\xi) d\xi + C_{ij}(P) u_j(P) \quad (4)$$

여기서  $N$ : 요소수  $M^k$ : 형상함수  $J$ : 자코비안  $\xi$ : 요소내 정규 좌표계이고,  $C_{ij}$ 를 강제변위 조건에 의해 구한 후 정리하면 다음과 같은 모양이 된다.

$$[A] \cdot \{X\} = \{A\}$$

$[A]$ :  $3 \times n_p$  차수의 비대칭 정방행렬,  
 $\{X\}$ : 미지량,  $\{A\}$ : 기지량,  $n_p$ : 절점의 총수

위의 연립 방정식은 Gauss 소거법을 이용해 푼다.

## 2.2 응력확대계수의 결정법<sup>13)</sup>

경계요소법을 이용한 해석에서의 결과로 나타나는 결과는 변위와 응력의 항으로 표현된다. 이것으로부터 크랙선단의 해를 수치해석을 통해 직접 구하는 것은 불가능하다. 이러한 문제를 해결하고자 응력확대계수의 결정법에 대한 기술적인 연구가 많이 시도되었으며 그 결과 외삽법, 접촉 외삽법, 비례법등이 개발되었고, 본 연구에서는 일반적인 수치해석의 경우 변위외삽법의 쪽이 좋은 해를 기대할 수 있으므로 변위외삽법을 이용하였다. 외삽법은 해를 구하기 위한 가장 기본적인 방법으로서 직접해의 정밀도 저하를 피하기 위해 주변의 절점값으로부터  $K$  를 구하고  $r \rightarrow 0$  인 크랙선단으로 외삽하는 방법이다. 다음은 절점의 상대변위에 대한 변위외삽식이다.

$$K_I = \frac{2\mu}{\chi+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_2 \quad (5)$$

## 2.3 해석방법 및 범위

해석대상과 요소분할 예를 각각 Fig.1과 Fig. 2에 나타내었다. Fig.1과 같이 응력해석 대상은 판재의 중앙에 존재하는 표면균열로서 대칭성을 이용하여 1/4영역만을 해석대상으로 하였다. 경계요소분할은 균열이 있는 판재의 표면을 Mindlin 면으로 설정하고 좌측면은 대칭면으로 하여 Fig. 2와 같이 분할 하였다. 또한, 본 연구에서는 해석

대상에서 크랙의 표면길이를  $a$ , 깊이를  $b$ , 판재두께를  $t$ , 판 폭을  $w$ 로 정의하였고  $b/a=0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ 의 4가지의 경우에 대해  $b/t=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ 로 변화시켜 가면서 응력비 ( $\sigma_T/\sigma_B$  or  $\sigma_B/\sigma_T$ )의 변화에 따른 응력확대계수(S.I.F)<sup>16)</sup>를 경계요소법을 사용하여 구하였다.

## 3. 해석결과 및 고찰

### 3.1 인장 혹은 굽힘응력하에서 균열선단의 응력확대계수

본 연구에서의 해석결과와의 정도를 해석정도가 비교적 우수하다고 알려진 유한요소법에 의한 Raju-Newman의 결과<sup>14)</sup>와 비교한 것으로 Fig. 3은 인장응력, Fig. 4는 굽힘응력의 결과를 각각 비교한 것이다. 리가멘트비( $b/w$ )가 0.2인 경우는 Fig. 3 및 Fig. 4에서 전체적으로 잘 일치하고 있고 표면점( $2\phi/\pi = 0$ )에서는 4%정도 과대평가되는 경향을 보이고 있다. 또,  $b/w=0.4$ 인 경우는 Fig. 3의 인장의 경우와 Fig. 4의 굽힘의 경우 모두 경향은 0.2인 경우와 같이 일치되지만 표면점에서 인장의 경우 7%, 굽힘의 경우 9%의 차이가 발생한다. 그러나 이와 같은 차이점은 Raju-Newman의 결과<sup>14)</sup>와 같이 해석대상의  $b/w$ 가 0.2 이상인 경우는 오차가 크게 발생한다고 지적하고 있고 본 해석의 경우  $b/t=0.4$  이상인 경우에  $b/w=0.2$ 를 넘으므로서 발생하는 오차로 예상된다.

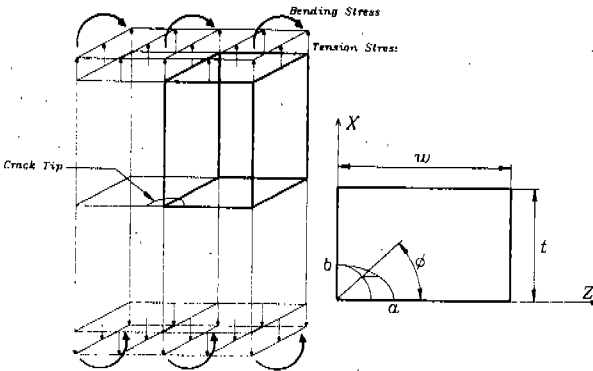


Fig.1 Shapes of plate and surface crack

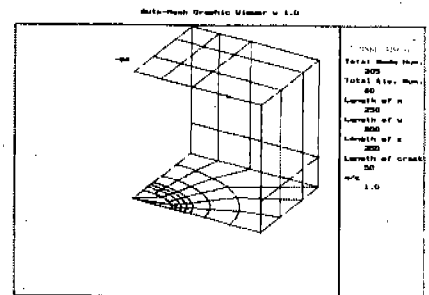


Fig.2 Mesh generation of plate

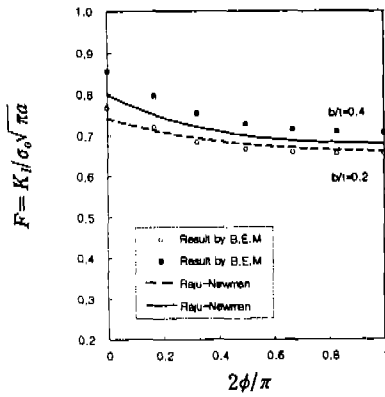


Fig.3 Behavior of stress intensity factor compared with Raju-Newman's under tension

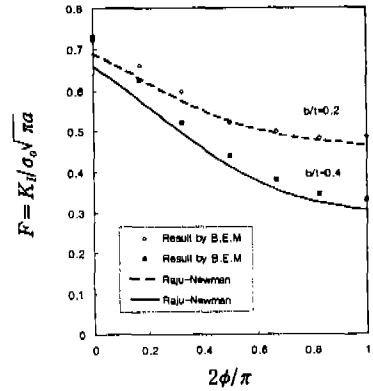
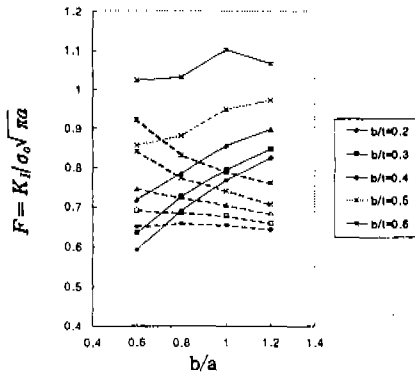
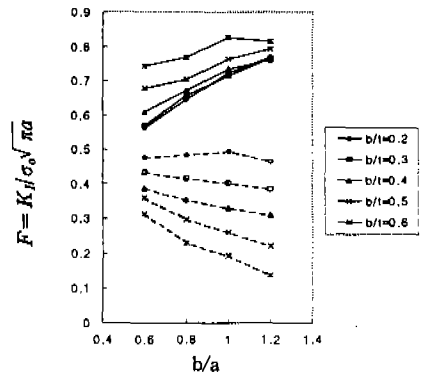


Fig.4 Behavior of stress intensity factor compared with Raju-Newman's under bending



(a) Under tension



(b) Under bending

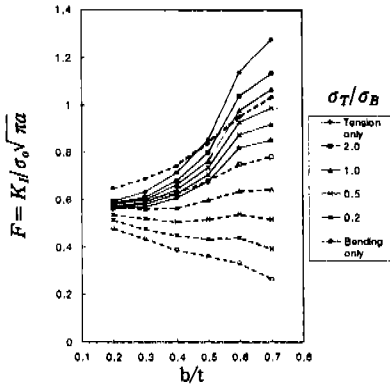
Fig.5 Behavior of Stress Intensity Factor  
(--- :  $2\phi/\pi=1$ , point of maximum depth,  
—— :  $2\phi/\pi=0$ , point of surface)

Fig.5는 형상비에 따른 인장(Fig.5(a))과 굽힘(Fig.5(b))에서 표면점( $2\phi/\pi=0$ )과 내부점( $2\phi/\pi=1$ )의 응력확대계수의 거동을 표시한 것이다. 여기서 보면 인장응력 혹은 굽힘응력하에서 균열의 거동은  $b/a$ 가 증가함에 따라 크랙의 표면점의 응력확대계수는 증가하는 반면에 내부점의 응력확대계수는 감소하며 또,  $b/t$ 가 증가함에 따라 내부점보다 표면점의 응력확대계수가 증가함을 알 수 있다. 따라서 인장하중하에서의 균열거동은 크랙 길이가 크랙깊이 보다 큰 타원형균열로 성장할 것이 예상된다. 또한, 인장응력하에서는  $b/a$ 값이 작고  $b/t$ 값이 작은 경우에 내부점의 응력확대계수가

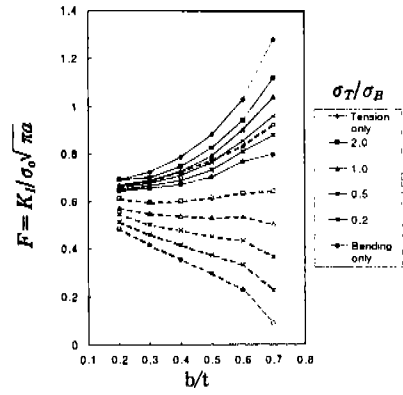
표면점의 것보다 크게 나타나지만 굽힘응력하에서는 항상 표면점의 응력확대계수가 크게 나타난다.<sup>8)</sup> 즉, 이 경우에 균열의 성장은 인장의 경우 깊이방향, 굽힘의 경우 표면방향으로 뒰를 예측할 수 있다.

### 3.2 인장과 굽힘응력하에서의 K거동

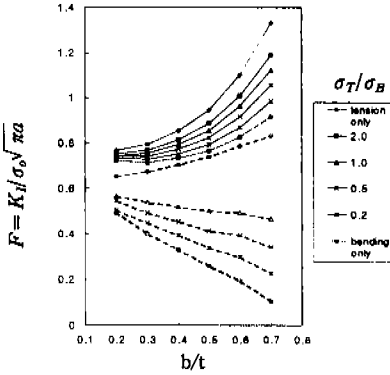
Fig.6은 인장과 굽힘응력이 동시에 작용할 때<sup>15)</sup> 응력비( $\sigma_T/\sigma_B$ )에 따른 크랙선단에서의  $K^{16)}$  값의 거동을 표시한 것이다. 크랙의 표면점( $2\phi/\pi=0$ )과 내부점( $2\phi/\pi=1$ )의 응력확대계수의 거동은 균열의 형상( $b/a$ )이 변화하더라도 거시적 경



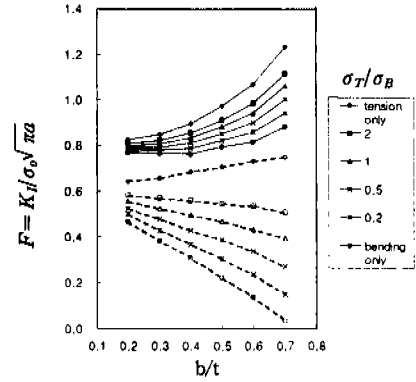
(a)  $b/a=0.6$



(b)  $b/a=0.8$



(c)  $b/a=1.0$



(d)  $b/a=1.2$

Fig.6 Behavior of stress intensity factor  
 ( --- :  $2\phi/\pi=1$ , point of maximum depth,  
 — :  $2\phi/\pi=0$ , point of surface)

향은 동일하며, 응력확대계수는  $b/t$ 의 비가 작은 경우에는 거의 같으나  $b/t$ 의 비가 증가할수록 응력비의 영향이 크게 나타난다. 이로서 크랙의 깊이가 증가할수록 크랙의 성장은 표면방향으로 이루어지고 형상비( $b/a$ )는 작은 방향으로 크랙이 성장함을 예측할 수 있다.

### 3.3 인장과 굽힘응력하에서 균열배면의 응력분포

Fig.7은 균열의 배면에서의 응력분포를 배면에서의 응력과 최대작용응력( $\sigma_{max} = \sigma_T + \sigma_B$ )의 비( $\sigma/\sigma_{max}$ )로 표시하였다. 굽힘응력의 영향이 증가함에 따라 균열배면의 응력은 작용응력보

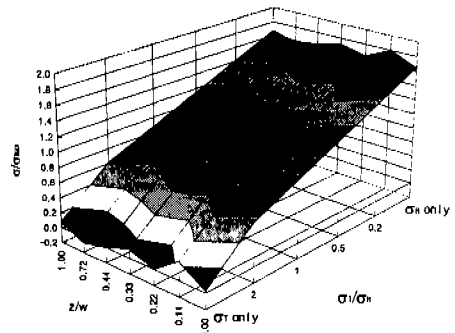


Fig.7 Stress distribution of back side ( $b/a=0.6, a/t=0.6$ )

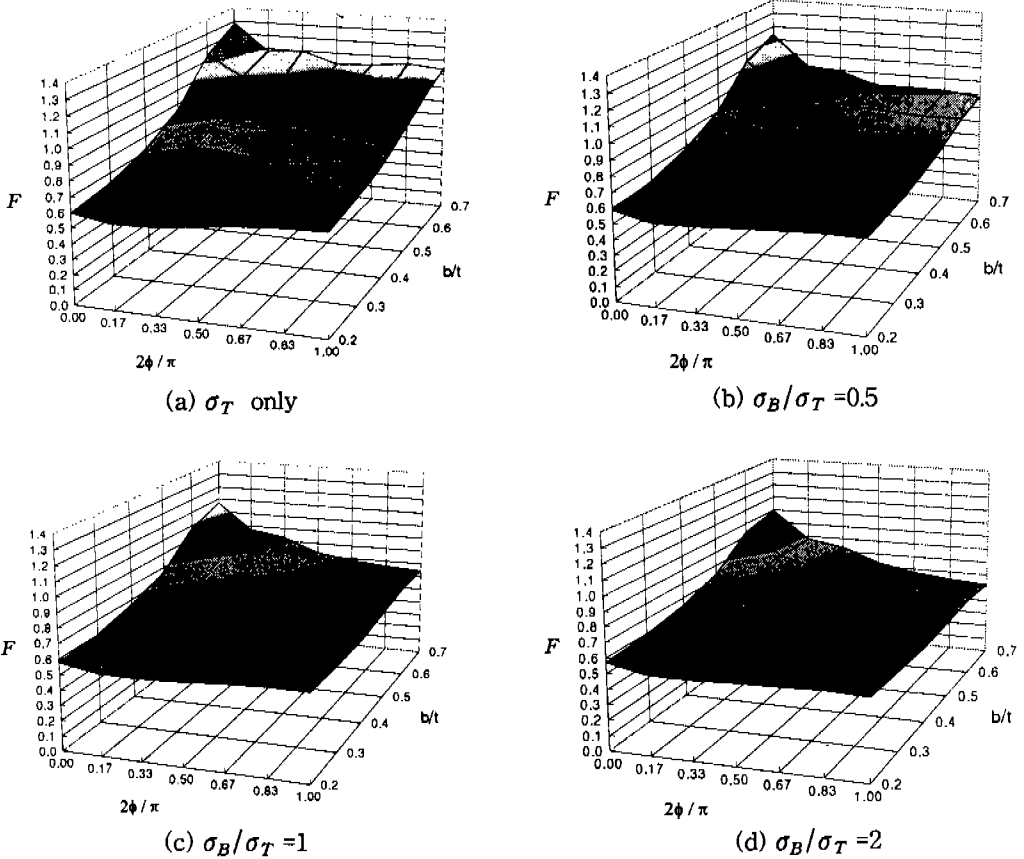


Fig.8 S.I.F variation along the increasing  $\sigma_B$  to  $\sigma_T$  ( $b/a=0.6$ ,  $F = K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ )

다 큰 응력으로 발생됨을 알 수 있으며 여기서 최대응력은  $z/w=0$ 인 균열의 바로 뒤쪽이 아닌  $z/w=0.11$ 인 곳에서  $\sigma/\sigma_{max} = 1.8$ 로서 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서 굽힘이 작용하는 경우에 주균열 배면에서의 2차크랙의 발생이 예상되고 균열의 발생위치는 균열배면의  $z/w=0.11$ 의 근방에서 발생될 것으로 예상된다.

### 3.4 Crack 성장거동에서 인장에 대한 굽힘의 영향

Fig.8은  $b/a=0.6$ 일 때 인장응력  $\sigma_T$ 를 기준으로 할 때 굽힘응력  $\sigma_B$ 의 변화에 따른 응력확대 계수(S.I.F)의 변화를 도시한 것이다. 굽힘의 영향이 증가할수록 표면점( $2\phi/\pi = 0$ )의 응력확대

계수는 감소하며  $b/t$ 비의 증가에 따른 내부점( $2\phi/\pi = 1$ )의 기울기( $\Delta F/\Delta(b/t)$ )가 양에서 음으로 바뀌는 것을 볼 수 있다. 또한 Raju-Newman의 결과<sup>14)</sup>에서처럼 인장만 작용하는 경우  $b/t$ 의 비가 작은 경우 내부점의 응력확대계수가 표면점보다 큰 것을 볼 수 있으나, 굽힘응력의 영향이 증대될수록 표면점이 증가함을 알 수 있다. 따라서 굽힘의 영향이 증대될수록 균열표면점의 성장이 예측된다.

### 3.5 Crack 성장거동에서 굽힘에 대한 인장의 영향

Fig.9는  $b/a=0.8$ 에서 굽힘응력  $\sigma_B$ 를 기준으로 인장응력  $\sigma_T$ 의 변화에 따른 응력확대계수의

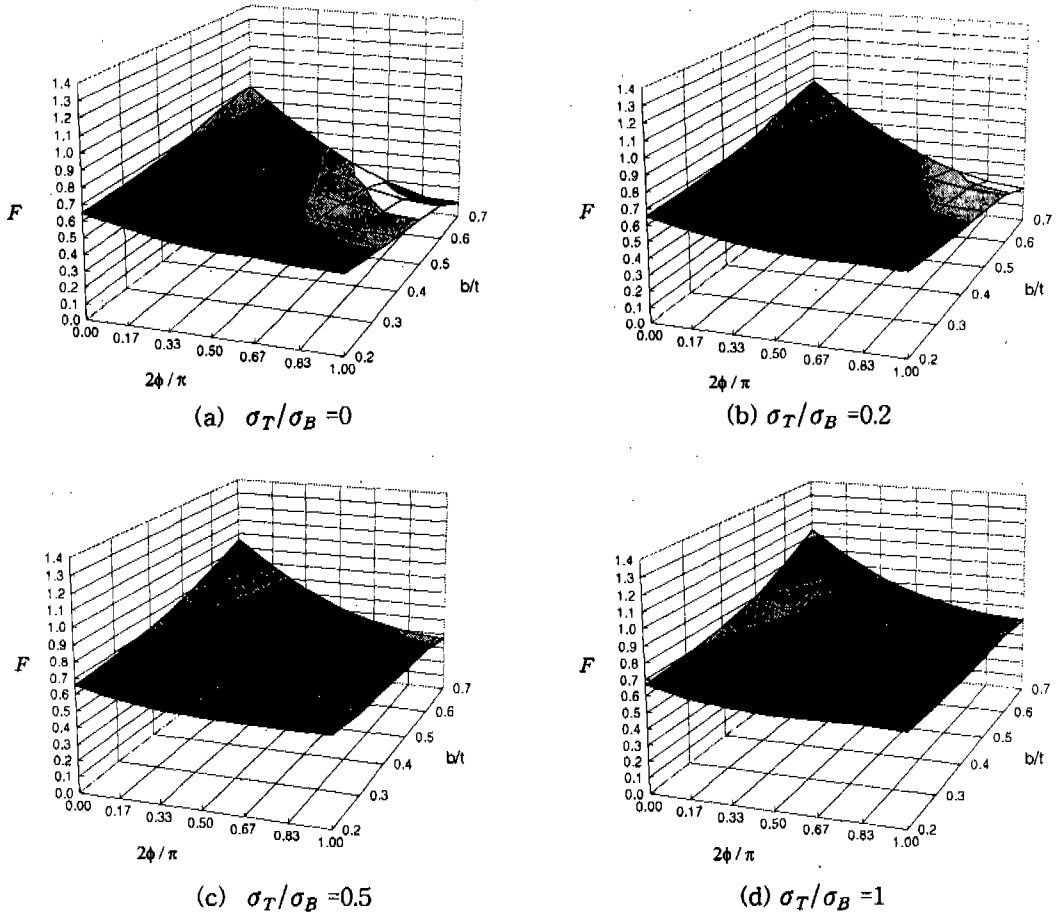


Fig.9 S.I.F variation along the increasing  $\sigma_T$  to  $\sigma_B$  ( $b/a=0.8$ ,  $F=K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ )

변화를 도시한 것이다. 인장의 영향이 증가할수록 내부점 ( $2\phi/\pi = 1$ )의 응력확대계수가 증가함을 보이며  $b/t$ 비의 증가에 따라서는 내부점에서의 응력확대계수가 감소하는 경향이 줄어들음을 알 수 있다. 따라서 인장의 영향이 증대될수록 균열내부점의 성장이 예측됨을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

이상에서 인장과 굽힘이 동시에 작용하는 경우에 대해 균열의 표면점 ( $2\phi/\pi = 0$ )과 내부점 ( $2\phi/\pi = 1$ )의 응력확대계수와 균열배면의 응력

분포특성을 경계요소법(Boundary Element Method)을 이용하여 해석하였고 그 결과의 중요내용을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 인장의 경우 형상비가 작고  $b/t$ 비가 적은 경우 내부점에서 응력확대계수의 최대값을 보이며 굽힘인 경우에는 형상비와 상관없이 표면점에서 최대값을 갖는다.
- 2) 인장과 굽힘이 동시에 작용하는 경우 균열 깊이가 깊어질수록 균열의 성장은 표면방향으로 이루어진다.
- 3) 균열배면의 응력분포에서 2차 크랙의 발생 부위는 크랙의 최심부의 배면이 아닌 배면

주위에서 발생할 것으로 예측된다.

- 4) 인장과 굽힘이 동시에 작용하는 경우 굽힘의 영향이 증대될수록 표면방향의 성장이 기대되며, 인장의 영향이 증대될수록 깊이 방향의 성장이 기대된다.

## 참 고 문 헌

1. 오환섭, 結成良治, BEM을 이용한 크랙전과 해석 및 수명예측에 관한 연구. 재료과학 기술연구소 연구논문집 Vol. 5. pp. 21~29, 1992.
2. 北川, 高橋, 微小な疲労き裂の成長とその下限界條件に関する破壊力學的研究, 第45卷 第399號, pp. 1289~1303, 1973.
3. 西谷弘信, 後藤眞宏, 微小き裂傳ば則と部材の疲労壽命との關係, 日本機械學會 論文集, 第51卷 第462號, pp. 332~341, 1985.
4. P. C. Paris, The Growth of Fatigue Cracks due to Variations in Load., Ph. D. thesis, Lehigh Univ, 1962.
5. E. K. Walker, Effect of Environments and Complex Load History on Fatigue Life., ASTM STP 462., pp. 1~14, 1970.
6. R. G. Forman, V. E. Kearney, R. M. Engle, Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures., ASME Trans. Journal of Basic Engineering Series D., Vol. 89. pp. 459~464, 1967.
7. M. A. Mahmoud, Surface fatigue crack growth under combined tension and bending loading., Engineering Fracture Mechanics, Vol. 36, No. 3, pp. 389~395, 1990.
8. 오환섭, 박철희, 이병권, “회전굽힘응력하에서 환봉재의 미소표면균열의 성장거동해석”, 大韓機械學會 Vol. 22, No. 1, 게재예정, 1998.
9. T. N. Farris, M. Liu, Boundary Element Crack Closure Calculation of Three-dimensional Stress Intensity Factors, International Journal of Fracture., Vol 60, pp. 33~47, 1993.
10. Toshiro Miyoshi, Koichiro Ishii, Shoiichi Yoshida, Database of Stress Intensity Factors for Surface Cracks in Pre/Post Penetration., 日本機械學會論文集 A, 56卷 527号, pp. 59~65, 1990.
11. 結城良治, 江嶋一行, 境界要素法と影響關數法を用いた表面き裂のK評價・進展解析, 日本機械學會論文集 A, 56卷 524号, pp. 111~117, 1990.
12. I. S. Raju, J. C. Newman, Stress intensity factor for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates., Engineering Fracture Mechanics., Vol. 11., pp. 817~829, 1978.
13. 結城良治, 木須博行, 境界要素法による弾性解析, 1987.
14. J. C. Newman, I. S. Raju, “Analyses of Surface Cracks in Finite Plates Under Tension or Bending Loads”, NASA Technical Paper, No. 1578, pp. 45, 1979.
15. BWRI冷却系配管の健全性評價に関する研究, ISES8218, 高温構造安全技術組合, 1982.
16. ASME Boiler and Vessel Code, Sec. XI, Rules for Insurvice Inspection of Nuclear Power Plant Compoments, Appendix A, 1980.