

축약 행렬법을 적용한 차체 결합부 해석

Application of Condensed Joint Matrix Method to the Joint Structure of Vehicle Body

서 종 환*, 서 명 원**, 양 원 호**
J. H. Shu, M. W. Shu, Y. H. Yang

ABSTRACT

The joint characteristics are necessary to be determined in the early stage of the vehicle body design. Researches on identification of joints in a vehicle body have been performed until the recent year. In this study, the joint characteristics of vehicle structure were expressed as condensed forms from the full joint stiffness and mass matrix. The condensed joint stiffness and mass matrix were applied to typical T-type and Edge-type joints, and the usefulness was confirmed. In addition, those were applied to center pillar and full vehicle body to validate the practical application.

주요기술용어 : Joint Characteristics(결합부 특성), Joint Stiffness Matrix(결합 강성 행렬), Joint Mass Matrix(결합 질량 행렬), Condensation(축약), Condensed Joint Matrix(결합부 축약 행렬)

1. 서 론

자동차의 차체구조는 다양한 형태의 여러 가지 접합 방법으로 결합되어 있다. 복잡한 구조로 된 차체의 필라(pillar)와 루프레일(roof rail) 등의 접합부가 전형적인 결합부 형태라 할 수 있다. 이들 결합부는 일반적으로 내판(inner panel), 외판(outer panel), 보강판(reinforcement)으로

구성되어 있으며, 각각의 판재는 점용접(spot welding)으로 서로 결합되어 있다.

결합부의 특성이 차체 전체의 정적 및 동적 성능에 크게 기여하고 있음이 알려져 있다. 결합부를 강체요소와 더불어 스프링이나 강성행렬로 표현하는데 있어서 그 강성값의 도출방법에 대한 연구들이 수행되어왔다. Chang¹⁾ 은 차체 구조의 정적해석에 결합부의 유연성을 고려하기 위한 회전스프링의 사용을 주장하였다. 김윤영²⁾ 등은 T형 결합부재에 대하여 변형에너지관점에서 서 결합 강성을 얻어내는 방법을 제시하였다.

* 한국타이어 중앙연구소

** 정회원, 성균관대학교 기계공학부

Hirozuki³⁾ 등은 유한요소법을 이용하여 결합부를 공간 내의 한 점으로 가정하여 모멘트와 회전각의 상호관계로부터 결합 강성을 행렬로 표현하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 각 부재간에 특정하중들에 의한 변위계산의 번거로운 과정이 요구되어진다. 문용모⁴⁾ 등은 감도해석을 이용하여 결합부 강성값을 실험값과 일치시키는 알고리즘을 제안하였다. 이상범⁵⁾ 등은 차체 결합부의 인자들이 강성도에 기여하는 민감도 해석을 통해 결합부에 대한 최적설계를 수행할 수 있음을 보였다.

위와 같은 다양한 연구결과에도 불구하고 그 적용법의 번거로움으로 인하여 실제 차량구조 해석에서는 일반적으로 결합부를 상세유한요소 모델이나 실제 현물에 특정 하중을 가하여 물리적인 스프링으로 변환하여 해석하는데, 이는 강성행렬로 보면 대각항만을 고려하는 방법이어서 실제 무시될 수 없는 비대각항(coupled term)으로 인한 하중에 대응되는 정확한 변위해석이나 측정의 어려움과 함께 근본적인 오차의 가능성을 안고 있다.

본 연구에서는 결합부의 특성 행렬을 특정하중을 가하거나 별도의 변위 계산 없이 비교적 간단하게 추출할 수 있으며, 향상된 정밀도를 갖는 축약 강성 행렬과 축약 질량 행렬을 이용하여 일반적인 결합부를 표현하고자 한다.

2. 축약 이론

축약이론(Condensation⁶⁾)은 유한요소해석시에 계의 자유도 수를 줄여 계산시간을 절약하면서 원하는 결과를 얻고자 할 때 이용되는 방법이다. 초기에는 행렬의 축약 없이는 계산할 수 없는 큰 행렬을 계산할 때 사용되어왔다. 근래에는 컴퓨터의 발달과 더불어 그러한 문제는 해결되었으나, 경제성을 고려해 필요이상으로 행렬의 크기가 큰 경우에 이용되는 방법중의 하나가 축약이론이다.

정해석에서 강성행렬을 축약하여 간략계산하는 정해석 축약기법(Static Condensation)을 Guyan⁸⁾은 동해석 분야까지 확장하였다. 전체자유도 보다 작은수의 자유도로 표현되는 질량 및

강성행렬을 도출하였다. 즉 전체 자유도를 독립자유도와 종속 자유도로 나누고 지배방정식을 독립 자유도만으로 표현 가능하게 하였다. 즉 계의 전체 자유도 $\{u\}$ 를 다음과 같이 나누어 표현한다.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 $\{u_a\}$ 는 독립(master) 자유도, 그리고 $\{u_o\}$ 는 종속(slave) 자유도이다.

다음의 자유진동에 대한 운동방정식 (2)는 식 (3)과 같이 독립(master)과 종속(slave) 자유도로 나누어 표현될 수 있다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} [M_{aa}] & [M_{ao}] \\ [M_{oa}] & [M_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ao}] \\ [K_{oa}] & [K_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3)$$

식(3)의 두 번째 방정식에서 $\{u_a\}$ 와 $\{u_o\}$ 의 관계에서 관성력의 영향을 무시하면, 즉 $[M_{aa}]$ 를 제외한 질량행렬을 무시하면, $\{u_a\}$ 와 $\{u_o\}$ 사이에 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$[K_{oa}]\{u_a\} + [K_{oo}]\{u_o\} = \{0\} \quad (4)$$

위 식으로부터 $\{u_o\}$ 를 $\{u_a\}$ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{u_o\} = -[K_{oo}]^{-1}[K_{oa}]\{u_a\} \quad (5)$$

식(1)과 위 식으로부터 다음과 같이 전체 계의 자유도 $\{u\}$ 를 $\{u_a\}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} = [R]\{u_a\} \quad (6)$$

여기서, $[R] = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{oo}]^{-1}[K_{oa}] \end{bmatrix}$ 이며, I 는 단위행렬이다.

식 (6)으로부터 독립 자유도만으로 전체 계에 대한 운동에너지와 변형에너지를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_a \}^T [M]^R \{ \dot{u}_a \} \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \{ u_a \}^T [K]^R \{ u_a \} \quad (8)$$

여기서, $[M]^R = [R]^T [M] [R]$, $[K]^R = [R]^T [K] [R]$ 이며, 다음의 두 식으로 구체화 될 수 있다.

$$\begin{aligned} [M]^R &= [M_{aa}] - [M_{ao}] [K_{oo}]^{-1} [K_{oa}] \\ &\quad - [K_{ao}] [K_{oo}]^{-1} [M_{oa}] \\ &\quad + [K_{ao}] [K_{oo}]^{-1} [M_{oo}] [K_{oo}]^{-1} [K_{oa}] \end{aligned} \quad (9)$$

$$[K]^R = [K_{aa}] - [K_{ao}] [K_{oo}]^{-1} [K_{oa}] \quad (10)$$

식(7)과 식(8)은 각각 전체 자유도로 표현된 계의 운동에너지와 변형에너지를 등가 되어야 하므로 다음의 자유진동 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]^R \{ \ddot{u}_a \} + [K]^R \{ u_a \} = \{ 0 \} \quad (11)$$

여기서 얻어진 축약된 $[K]^R$, $[M]^R$ 의 행렬은 대칭행렬이 되며, $[K]$ 는 banded matrix이고, $[M]$ 이 대각행렬일지라도 일반적으로 축약된 행렬들은 full matrix가 된다. 또한, $[M]^R$ 은 $[M]$ 의 계수들과 $[K]$ 의 계수들의 조합으로 구성된다. 한편, 독립(master)과 종속(slave)자유도를 선정하는 방법에 대하여 G. C. Wright와 G. A. Miles⁶⁾는 이 방법의 정확도에 대한 연구를 하였으며, 종속(slave)자유도는 강성이 높은 것으로 독립(master)

자유도는 연성이 높은 것으로 선정해야 함을 주장한 바 있다.

3. 결합부 축약행렬법(CJM법)

편의상 부재 단의 수가 3개인 경우를 고려하여 보자. 물론 부재 단의 수가 n개일 경우도 같은 방법으로 적용 가능하다. 이 결합부를 셀요소로 모델링하고, 각 부재 끝단면의 모든 절점들을 한 절점으로 대표하게 하면, 각 부재 끝단 절점의 자유도는 3축방향의 병진과 회전성분의 6개 자유도를 가지게 된다. 이 때 축약이론을 적용하기 위하여 3개의 부재 끝단에 대표된 절점의 6개의 자유도 중에서 독립(master)자유도로 각 방향의 회전자유도 3개를 선정한다면 다음과 같이 표현된다. 결합부가 회전강성으로 그 특성을 잘 표현될 수 있음은 기존의 많은 연구^{1,2,3,4,7)}에서 밝혀진 바가 있다.

$$\begin{aligned} \{ \theta \}_a &= \{ \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \theta_z^{(1)}, \theta_x^{(2)}, \theta_y^{(2)}, \\ &\quad \theta_z^{(2)}, \theta_x^{(3)}, \theta_y^{(3)}, \theta_z^{(3)} \}^T \end{aligned} \quad (12)$$

윗첨자 (1), (2), (3)은 3개의 부재단을 나타내며, 아래첨자 x, y, z는 3축을 나타낸다. 부재 전체의 강성행렬을 식(10)을 이용하면 자유도 9개만으로 표현 가능한 다음의 9×9 축약된 결합부 강성 행렬(Condensed joint stiffness matrix)을 구할 수 있다.

$$[K]_J = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, 소행렬 $[K_{ij}]$ 은 3×3의 행렬이다.

마찬가지로 결합부의 축약 질량 행렬(condensed joint mass matrix)도 식(9)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[M]_J = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] & [M_{23}] \\ [M_{31}] & [M_{32}] & [M_{33}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

이와 같이, 아무리 복잡한 결합부의 유한요소 모델이라도 식(12)과 같이 선정된 자유도에 대해 축약된 강성 행렬과 질량 행렬로 결합부 특성을 표현할 수 있다. 이러한 결합부 해석의 접근법을 본 연구에서는 결합부 축약 행렬(CJM : Condensed joint matrix)법이라 하겠다.

이 방법은 다른 연구의 경우처럼 별도의 하중, 변위계산을 위한 추가적인 프로그래밍이 필요 없으며, 일반적인 결합부에 쉽게 적용 가능하다. 또한 구속조건으로 인한 영향이 결합부에 미치지 않는다.

4. 축약행렬법의 단순결합부의 적용

CJM법의 타당성검토를 위하여, 그림 1의 T-type과 그림 2의 Edge-type의 결합부재 해석에 적용하여 보았다.

4.1 축약행렬의 도출

T-type과 Edge-type 부재에 대하여 결합부의 길이를 그 부재단면의 폭 만큼으로 간주하고, 그 결합부를 쉘요소로 구성하였다. 각 부재 끝단의 절점들을 한 절점으로 대표하게 하고, 그 점들의 회전자유도를 독립 자유도로 선정한다. 총 9개의 자유도로서 각각의 9×9의 축약 강성 행렬과 축약 질량 행렬을 도출한다. 일반적으로 결

합부의 강성행렬 구성시 병진강성이 무시된 회전강성으로만 구성되는 것은 앞에서 언급한바 있는데, 본 연구에서도 병진강성 값들이 회전강성 값에 비하여 10⁴배이상 크게 나타남을 확인하여 결합부가 회전강성 값에 큰 영향을 받음을 확인할 수 있었다.

4.2 결합부재 해석

결합부재 해석을 위하여 그림 1과 같은 T-type 부재와 그림 2의 Edge-type 결합부재에 대하여 정적 강성해석 및 동적 강성해석을 수행하였다.

해석에 사용한 유한요소 프로그램은 NASTRAN이다. 사용된 해석모델은 세가지로 구성되었다. 즉, 그림 1과 그림 2와 같이 결합부는 쉘요소를 일반부는 보요소를 사용한 “셀+보” 모델과 모두를 보요소로 처리하고 결합부의 보요소를 강결합시킨 강결합 모델 그리고 강결합 모델에서 결합부에 강결합대신 CJM을 적용시킨 CJM 모델을 사용하여 정적 및 동적 강성의 정밀도를 비교하였다.

각 모델에 대하여 정적 강성해석 수행 시에는 그림 1과 그림 2에서의 부재 1단과 3단의 자유도들을 모두 구속하고, 부재 2의 끝단에 3 방향의 모멘트를 가하였으며, 동적 강성평가를 위한 해석은 자유경계조건하에서 수행하였다.

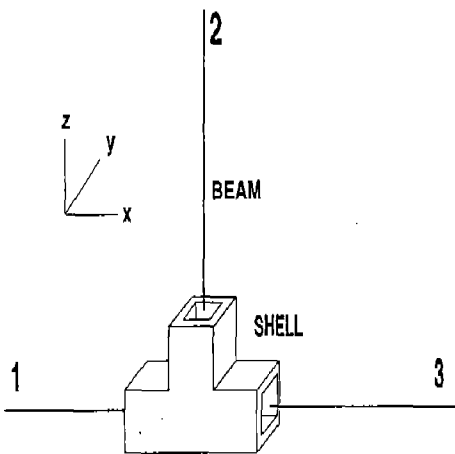


Fig.1 T-type joint

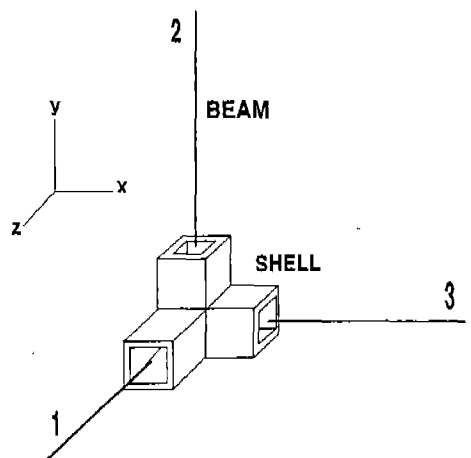


Fig.2 Edge-type joint

4.3 해석 결과 및 고찰

T-type 및 Edge-type에 대한 정적 및 동적 강성해석의 세가지 모델에 대한 강성비교를 표 1 에서 표 4까지에 나타내었다.

표 1과 3으로부터 T-type 및 Edge-type 모두에 대해 강결합 모델이 실제 모델에 가깝다고 볼 수 있는 셸+보 모델과 비교할때 대체로 큰 정적 강성 값을 가짐과 CJM 모델의 경우는 강결합 모델보다는 셸+보 모델에 보다 가까운 정적 강성을 가짐을 알 수 있다. 표 2와 표 4에는 동적 강성으로 볼 수 있는 고유진동수를 나타내었다. 정적 강성해석에서와 같이 강결합 모델은 셸+보 모델보다 대체로 큰 동적 강성 값을 가지며, CJM 모델이 보다 우수함을 알 수 있다.

대체로 강결합 모델이 정적, 동적으로 실제보다 높은 강성을 갖는다는 일반적인 경향을 확인할 수 있었다. 그러나, Edge-type에 대한 표 3의 정강성 해석결과에서 강결합 모델이 z방향의 회전성분 강성이 일반적인 경향과 달리 낮은 값을 갖는 것과 T-type에 대한 표 2의 동강성 해석결과와 3번째 모드의 주파수가 일반적인 경향과 달리 낮은 결과를 보이는 것은 셸+보 모델의 접합부의 국부적인 변형의 영향으로 보여진다.

Edge-type의 경우 결합부 질량 행렬까지 포함한 CJM 모델의 동적 강성해석을 수행하였는

데, 표 4에서와 같이 결합부 질량이 동적 강성에 미치는 영향이 미미함을 확인하였지만, 결합부의 질량 또한 CJM법으로 고려될 수 있음을 보여주고 있다.

그림 1과 그림 2에서 처럼 세 결합단자가 균일한 형상을 유지하며 결합부를 형성하는 경우는 응력집중을 피하기 위해 곡률을 갖고 결합되는 경우에서와는 달리 강결합 모델이 좋은 결과를 낼 수 있다는 일반적인 견해를 뒷받침할 정도로 단순 T-type이나 Edge-type 모델에서는 강결합 모델도 좋은 결과를 보여주고 있다.

5. 축약행렬법의 센터 필라에의 적용

CJM 방법을 실차에 적용하기 위하여 실차의 센터 필라부분을 셸의 사각형, 삼각형 요소를 각각 2,422개와 363개를 사용하고, 점용접부는 강체요소로 모델링된 그림 3의 결합부에 대해 적용하였다. 그림 3의 유한요소모델로부터 축약행렬을 도출해내고, 일반부는 모두 보요소를 이용하여 셸+보 모델, 강결합 모델, 그리고 CJM 모델에 대하여 각각 정적 강성해석 및 동적 강성 해석을 수행하였다. 셸+보 모델의 총자유도는 7393개이고, 강결합 모델의 총자유도는 192개이며, CJM 모델은 결합부의 9개의 독립 자유도를

Table 1 Normalized displacement of T-type joint for static stiffness

	셸+보	강결합	CJM
$\theta_x / \{\theta_x\}_s$	1.0	0.954	1.0
$\theta_y / \{\theta_y\}_s$	1.0	0.910	1.019
$\theta_z / \{\theta_z\}_s$	1.0	0.972	1.017

Table 3 Normalized displacement of Edge-type joint for static stiffness

	셸+보	강결합	CJM 모델
$\theta_x / \{\theta_x\}_s$	1.0	0.889	0.997
$\theta_y / \{\theta_y\}_s$	1.0	0.890	0.892
$\theta_z / \{\theta_z\}_s$	1.0	1.014	0.992

Table 2 Natural frequency(Hz) of T-type joint for dynamic stiffness

모드	셸+보	강결합	CJM
1	157.7	179.1	152.3
2	250.4	263.6	251.1
3	306.9	298.3	325.3

Table 4 Natural frequency(Hz) of edge-type joint for dynamic stiffness

모드	셸+보	강결합	CJM	CJM(w/[M])*
1	141.6	161.2	138.1	137.4
2	159.9	181.9	155.1	153.8
3	167.8	206.4	166.8	166.0

(* : condensed joint mass matrix도 고려한 해석)

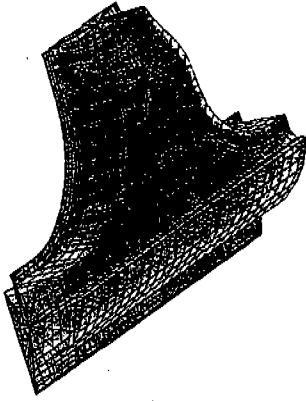


Fig.3 The finite element model of the lower center pillar

Table 5 Normalized displacement of lower center pillar for static stiffness

	셀+보	강결합	CJM 모델
$\theta_x / \{\theta_x\}_s$	1.0	8.862E-5	1.028
$\theta_y / \{\theta_y\}_s$	1.0	0.151	1.087
$\theta_z / \{\theta_z\}_s$	1.0	1.545E-2	1.067

Table 6 Natural frequency(Hz) of lower center pillar for dynamic stiffness

모드	셀+보	강결합	CJM 모델
1	1.51	1.98	1.34
2	2.42	-	2.34
3	2.89	3.18	2.82

포함하여 총 222개이다.

정적 강성해석의 경우 표 5와 같이 강결합모델이 셀+보 모델의 거동에 아주 큰 오차를 발생한 반면 CJM 모델은 강결합에 비해 월등하게 유사한 거동을 나타내고 있음을 확인하였고, 강결합의 경우 x방향 회전강성이 지나치게 크게 평가됨을 알 수 있었다. 또한 표 6의 결과로부터 3차까지의 고유진동수에서 강결합모델의 거동에 비하여 CJM 모델의 거동이 셀+보 모델의 거동에 잘 일치하였으며, 셀+보 모델의 2번째 모드는 강결합 모델에서 나타나지 않았다. 표 6의 결

과에서 CJM 모델이 강성행렬만을 적용하여도 우수한 결과를 나타내었으므로 질량행렬까지는 고려하지 않았다.

4장의 강결합 모델에 비해 본 장의 강결합이 보다 큰 오차를 보이는데 이는 앞에서도 언급한 바와 같이 4장의 경우 균일한 단면을 갖는 각단이 만나 결합부를 이루지만 여기서의 강결합은 그림 3과 같이 곡률을 갖고 결합부를 이루므로 오차가 클 것이라는 예상을 확인시켜 주었다.

6. 축약행렬법의 실차에의 적용

일반적인 차체결합부에 CJM법을 적용할때는 5장의 그림 3과 같이 결합부 단면의 연속성이 끝나는 곳까지를 결합부로 정의하고 그 결합부를 셀요소로 상세 모델링한다. 또한, 각 부재단 단면의 도심점에 가상의 절점을 부가적으로 정의한다. 여기서 독립(master)자유도를 이 도심점의 각 방향 병진과 회전성분의 6개의 자유도 중 각 방향의 회전성분만을 독립(master)자유도로 선정하여 축약된 결합부 강성행렬과 질량행렬을 도출할 수 있다.

본 연구에서 제안한 CJM법을 차체에 적용하기 위하여 단순화시킨 차체구조의 모델을 그림 4와 같이 구성하였다. 그림 1과 같이 박스(box) T형 결합부인 차체 상단과 하단의 센터 필라를 대상으로 하여, 각각 4개의 결합부를 상세 모델링하였다. 위에서 언급한 바와 같이 각 도심점의 회전 자유도를 독립(master)자유도로 선정하여 이들만으로 강성 및 질량 행렬을 도출한다.

이와 같이 결합부가 셀로 상세 모델링된 것을

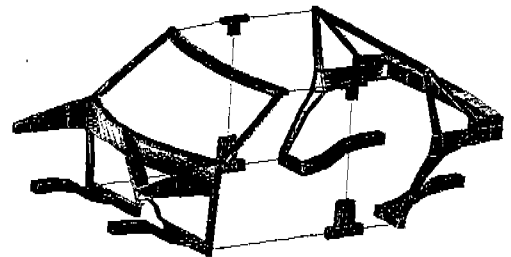


Fig.4 Model I : beam and joint shell

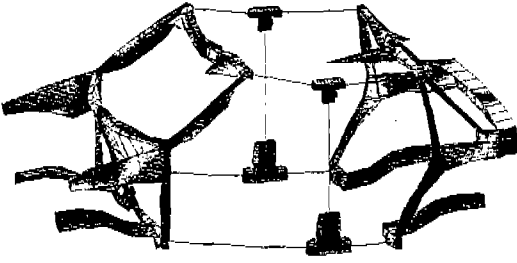


Fig.5 Overall bending mode

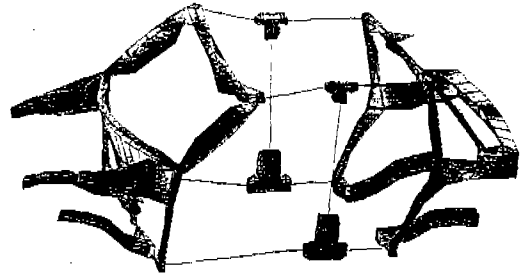


Fig.6 Overall twisting mode

Table 7 Natural frequency(Hz) of BIW

	모델 I	모델 II	모델 III
Bending Mode	40.70	49.80	39.13
Twisting Mode	41.61	50.84	39.88

모델 I 이라 하였다. 또한 결합부를 강결합한 모델 II와 결합부에 CJM법을 적용한 모델 III를 구성하였다. 각 모델에 사용한 총 자유도 수는 모델 I 이 2803, 모델 II가 2103, 그리고 모델 III가 1947이다.

각 모델에 대하여 자유경계조건하에서 진동해석을 수행하여, 차체의 overall 모드인 굽힘 모드(그림 5)와 비틀림 모드(그림 6)에 대한 고유진동수를 비교해 보았다. 표 7에서와 같이 강결합 모델이 쉘모델에 비하여 고유진동수가 전체적으로 높게 나타남을 알 수 있었으며, 약 22%의 오차를 발생하였다. 이에 반하여 CJM 모델은 고유진동수가 다소 낮게 나타나고 있는 있으나, 4% 내외의 오차를 발생함으로써 쉘모델의 거동에 상당히 유사한 경향을 나타내고 있다. 모델 III의 CJM은 결합부 축약 질량행렬을 무시하였고, 강성행렬만을 사용하였다.

7. 결 론

결합부재에 대하여 제안된 축약행렬(CJM : Condensed joint matrix)법을 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 제안한 결합부 축약행렬법(CJM법)은 기존의 연구결과보다 좀더 일

반적인 문제에 별도의 작용하중 및 변위 계산 없이 비교적 간단히 적용가능하며, 경제성 있는 해석결과를 얻을 수 있다.

- 2) 균일 단면의 부재와 실제의 센터 필라 모델, 그리고 실차구조에 CJM법을 적용하여 접합부에 일반적으로 사용할 수 있음을 알았다. 또한 결합부의 질량을 무시하여도 결합부의 특성을 훌륭히 표현 할 수 있음도 확인하였다.
- 3) 실차의 센터 필라 모델과 차체 구조물 모델에 결합부 축약행렬법을 적용하여 본 결과, 결합부 모델이 복잡한 형상을 가지고 있더라도 CJM법에 의해 정밀도에 손상이 결합부가 표현될 수 있었다.
- 4) 만약 결합부의 질량이 특별히 무시될 수 없다면 논리의 비약없이 결합부의 질량 행렬을 CJM법으로 구성하여 해의 정밀도를 높일 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Chang, D. C., "Effect of Flexible Connections on Body Structural Response", SAE Transactions, Vol. 83, pp. 233~244, 1974.

2. 김윤영, 임홍재, 강정훈, 김진홍, “박스 보 T형 조인트의 강성 평가에 관한 연구”, 한국자동차공학회 추계학술대회논문집, pp. 377~384, 1993.
3. 小野裕行 外, 日本自動車技術論文集, No. 43, pp. 138~142, 1990.
4. 문용모, 지태한, 박영필, “차체구조 모형의 조인트해석”, 대한기계학회 추계학술대회논문집 (I), pp. 701~706, 1995.
5. 이상범, 임홍재, 권성은, 박재건, “강성도 설계인자 기여도 분석을 통한 차체 결합부의 최적설계”, 한국자동차공학회 추계학술대회논문집, pp. 135~141, 1995.
6. Maurice Petyt, “Introduction to finite element vibration analysis”, Cambridge pp. 364~369, 1980.
7. 小野裕行 外, 日本自動車技術論文集, No. 43, pp. 143~147, 1990.
8. Guyan.,R.J., “Reduction of Stiffness and Mass Matrices”, AIAA Journal, Vol. 3, No.2, 1965.