

## 차체구조물의 붕괴거동

### Collapse Behavior of Vehicle Structures

김 천 육\*, 한 병 기\*\*, 원 종 진\*\*\*, 이 종 선\*\*\*\*  
C. W. Kim, B. K. Han, C. J. Won, J. S. Lee

#### ABSTRACT

In this study, collapse behavior of frame composed of thin-walled rectangular tube is investigated.

Considering the collapse of frame, the bending and compression members undergo large deformation.

The stiffness of the compound element is obtained from analytical moment-rotation relationship and approximated load-deflection relationship of thin-walled rectangular tube.

A computer program is developed for the large deformation analysis of frame. An incremental displacement method is used in the program and at each incremental stage, the stiffness matrix of the total structure is checked with the state of each element for bending and compression.

주요기술용어 : Thin-walled rectangular tube(박판 4각튜브), Bending collapse(굽힘붕괴), Axial collapse(압축붕괴), Large deformation analysis(대변형해석), Stiffness matrix(강성 행렬)

#### 1. 서 론

오늘날 자동차산업은 차체설계와 시작차시험, 생산기획으로 이어지는 개발기간 단축의 필요성이 부각되고 있으며 특히 차체설계는 개발기간의 초기단계로서 정밀한 설계가 요구된다. 그러

\* 정회원, 연세대학교 기계공학과

\*\* 정회원, 홍익대학교 기계공학과

\*\*\* 정회원, 국민대학교 기계·자동차공학부

\*\*\*\* 정회원, 대진대학교 기계설계공학과

나 개발초기단계에는 차체의 외형 그리고 승차 정원과 중량 등 기본적인 사항외에 확정된 자료가 없어 완벽한 차체설계가 불가능하므로 그동안 스틱모델에 대해 많은 연구가 이루어져 왔다.<sup>1~4)</sup>

자동차 사고시 승객의 안전을 확보하기 위한 내 충돌성 연구들은 외부의 정적하중에 의한 차체 구조의 붕괴하중을 결정하는 연구였다.<sup>5)</sup> 그런데 자동차의 충돌시 충돌에너지의 대부분이 부재 차체의 변형으로 흡수되어야 하는 문제에서는 붕괴거동이 주요 관심사가 된다. 즉 에너지흡수에 관한 연구로 구조물이 붕괴되는 과정의 힘과 변위선도를 정확히 예측할 필요가 있다.

McIvor<sup>6)</sup> 등은 박판부재로 실제 차체프레임과 유사한 구조를 제작하여 실험한 결과와 소성 힌지를 이용한 이론해가 비교적 근사함을 보였다. 그러나 소성힌지를 이용한 해석들도 박판부재의 단면에서 국부좌굴이 일어난 후의 변형거동을 해석하기는 어려웠다.

프레임 구조의 정확한 붕괴거동을 예측하기 위하여 결합부의 유연도를 고려한 연구로 Chang<sup>7)</sup>은 차체를 평면프레임구조로 가정하고 철점에 유연이음을 주어 결합부에서의 유연도가 구조물의 정적 거동에 미치는 영향을 연구하였다. 그러나 차체와 같이 박판부재로 이루어진 프레임구조의 붕괴거동을 정확하게 예측하기 위해서는 박판부재의 굽힘과 압축에 의한 붕괴거동의 연구가 필요하다.

Kecman<sup>8)</sup>은 박판 4각튜브의 굽힘변형에너지로부터 굽힘붕괴시 모멘트-회전각 관계를 이론적으로 구하였으며 Wierzbicki<sup>9)</sup>는 박판 4각튜브의 압괴특성에 관해 Kecman이 실험을 통하여 결정한 변수들을 이론적으로 구하여 굽힘변형시 모멘트-회전각 관계를 제시하였다.

Mahmood<sup>10)</sup>는 모자형 단면부재의 붕괴거동을 해석할 때 부재의 좌굴특성을 이용하여 변형을 예측할 수 있는 방법을 제안하였다. 그는 박판 4각튜브에 축력과 굽힘하중이 작용할 때 붕괴모드를 4가지 영역(elastic, post-buckling, crippling, deep collapse)으로 구분하였으며 각 영역의 힘-변위 또는 모멘트-회전각 선도를 근

사적으로 가정하고 그 기울기 값으로부터 전체 구조물의 강성행렬을 재구성하는 3차원 구조해석 프로그램을 개발하여 실험결과와 비교하였다.

본 논문에서는 순수굽힘과 순수압축을 받는 박판 4각튜브로 이루어진 프레임구조물에 대해 전반적 붕괴를 수반하는 대변형해석 프로그램을 개발하여 3차원 형상의 차체구조물에 대해서 적용하며 해석의 타당성 검증을 위하여 간단한 프레임에 대한 실험을 실시하고 그 결과를 수치해석결과와 비교한다.

## 2. 이 론

### 2.1 박판 4각튜브의 붕괴이론

#### 2.1.1 박판 4각튜브의 굽힘붕괴특성

일반적인 박판 4각튜브의 모멘트-회전각 관계는 Fig.1과 같다. 모멘트-회전각 관계는 세개의 구간으로 나눌 수 있으며 OA구간은 탄성구간, AB구간은 부재의 좌굴이나 항복에 의해 비선형 거동을 하는 후좌굴구간 또는 비탄성구간이며 BC구간은 모멘트가 최대점에 이른 후 계속 감소하는 붕괴구간이다.

박판 4각튜브에 모멘트가 작용할 때 부재단면의 모멘트-회전각 관계는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

탄성구간(elastic region) :

$$M = \frac{EI}{L} \theta \quad (1)$$

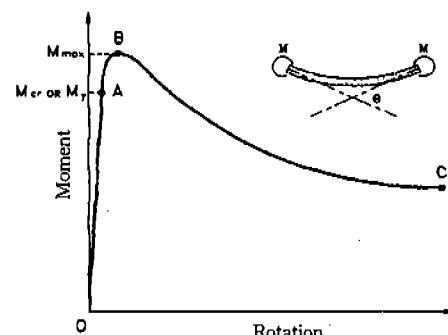


Fig.1 Moment-rotation relationship of thin-walled rectangular tube

후좌굴구간(post-buckling region) :

$$\frac{\theta}{\theta_{cr}} = \frac{M_{cr}}{M} + \frac{1}{(0.9\alpha^2 + 2.6\alpha + 1)} \left[ -2.1(\alpha+1)\left(1 - \frac{M_{cr}}{M}\right) + \frac{(3\alpha+1)(1.3\alpha+2)}{2(\alpha+1)} \left( \frac{M}{M_{cr}} - \frac{M_{cr}}{M} \right) \right] \quad (M_{cr} \leq M \leq M_{max}) \quad (2)$$

$$M_{cr} = \sigma_{cr}(b + \frac{c}{3}) \quad (3)$$

$$M_{max} = \sigma_y t c^2 \left[ \frac{2b + c + b_e(3\alpha + 2)}{3(b + c)} \right] \quad (4)$$

비탄성구간(inelastic region) :

$$\frac{\theta}{\theta_Y} = \frac{M}{M_Y} \left( \frac{1}{3\alpha + 1} \right) [3(\alpha + 1) - 2\sqrt{6\alpha + 3 - (6\alpha + 2)\frac{M}{M_Y}}] \quad (M_Y \leq M \leq M_{max}) \quad (5)$$

$$M_Y = \sigma_Y t \left( cb + \frac{c^2}{3} + 2t^2 - 2ct - bt \right) \quad (6)$$

$$M_{max} = \sigma_Y t \left( cb + \frac{c^2}{2} + 2t^2 - 2ct - bt \right) \quad (7)$$

붕괴구간(crippling region) :

$$M = M_{flange-c} + M_{flange-t} + M_{web} \quad (8)$$

$$M_{flange-c} = \sigma_i b t (c - \bar{y}) + 2 \left[ (\sigma_1 - \sigma_i) \frac{(s_1 + s_2)}{2} + \left( \frac{s_1}{2} + s_2 \right) \sigma_i t (c - \bar{y}) \right] \quad (9)$$

$$M_{flange-t} = \sigma_Y b t \bar{y} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_{web} &= (\sigma_Y - \sigma_i) s_1 t \left( c - \bar{y} - \frac{s_1}{4} \right) \\ &+ (\sigma_1 - \sigma_i) s_2 t \left( c - \bar{y} - \frac{s_1}{2} - \frac{s_2}{3} \right) \\ &+ 2\sigma_i s_3 t \left( c - \frac{s_3}{2} - \bar{y} \right) \\ &+ (\sigma_i + \sigma_j) s_4 t \left[ s_5 + s_4 \frac{(2\sigma_i + \sigma_j)}{3(\sigma_i + \sigma_j)} \right] \\ &+ \frac{2}{3} \sigma_i t s_5^2 + \sigma_Y b t \bar{y} \end{aligned} \quad (11)$$

### 2.1.2 박판 4각튜브의 압축붕괴특성

박판 4각튜브가 하중  $P$ 를 받아  $\delta$ 의 변위로 압괴될 때 하중-변위 선도를 근사적으로 나타내면 Fig.2와 같다.<sup>4)</sup> 박판 4각튜브의 하중-변위 관계는 주름형성과정에 따라 몇 개의 구간으로 나눌 수 있는데 각 구간에서의 하중-변위 관계는 최대·최소압괴하중과 최대·최소압괴거리로 부터 근사적으로 결정된다.

Fig.2에서 하중-변위 관계는 탄성구간과 후좌굴구간을 거쳐 최대압괴하중상태에 이르는 OA 구간, 하중이 감소하면서 1차주름이 형성되기 시작하는 AB구간, 그리고 변위의 증가에 따라 하중이 그 구간내 최대·최소압괴하중 사이에서 증가-감소를 반복하면서 주름이 규칙적으로 점히는 BCD와 DEF구간으로 나눌 수 있다.

각 구간의 하중-변위 관계를 근사식으로 나타내면 다음과 같다.

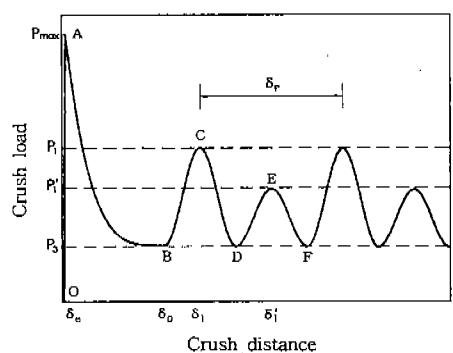


Fig.2 Approximated curve of crush distance vs. crush load of a thin-walled rectangular tube

OA 구간( $0 \leq \delta \leq \delta_e$ ) :

$$P = \frac{AE}{L} \delta \quad (12)$$

AB 구간( $\delta_e \leq \delta \leq \delta_0$ ) :

$$P = \frac{P_{max} - P_3}{\delta_0^4} (\delta - \delta_0)^4 + P_3 \quad (13)$$

BCD 구간  $\left( \delta_1 + \frac{\delta_p}{4}(4l-5) \leq \delta \leq \delta_1 \right.$

$$\left. + \frac{\delta_p}{4}(4l-3) \right) :$$

$$P = \frac{P_1 - P_3}{2} \cos \left[ \frac{4\pi}{\delta_p} [\delta - \{\delta_1 + (l-1)\delta_p\}] \right] + \frac{P_1 + P_3}{2} \quad (14)$$

DEF 구간  $\left( \delta_1 + \frac{\delta_p}{4}(4l-3) \leq \delta \leq \delta_1 \right.$

$$\left. + \frac{\delta_p}{4}(4l-1) \right) :$$

$$P = \frac{P_1 - P_3}{2} \cos \left[ \frac{4\pi}{\delta_p} [\delta - \{\delta_1 + (l-\frac{1}{2})\delta_p\}] \right] + \frac{P_1 + P_3}{2} \quad (15)$$

여기서 각 구간내의 특성하중값  $P_{max}$ ,  $P_1$ ,

$P_2$ ,  $P_3$ 와 특성변위량  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_1'$ ,  $\delta_p$  등은 실험적인 관찰과 박판 4각튜브의 압괴기구의 분석을 통하여 구할 수 있다.

## 2.2 프레임 해석법

### 2.2.1 강성행렬

박판 4각튜브는 부재가 최대모멘트에 도달한 이후에는 부재의 연결부나 부재 내에서 국부적 붕괴가 일어나 모멘트가 급격하게 감소하는 특징을 보인다. 이에 박판 4각튜브를 Fig.3과 같이 축방향으로 비선형강성을 갖는 스프링을 포함한 탄성보의 양단에 서로 다른 특성을 가진 회전스프링요소가 연결된 복합부재로 모델링하여 부재의 굽힘강성과 압축강성의 비선형성을 표현할 수 있도록 한다. 이 때 탄성보에 포함된 비선형 압축스프링은 오직 축력에 대해서만 비선형성을 보이는 요소로 가정하며 회전스프링요소는 모멘트만 받는 요소로 가정한다.

좌표축의 중심을 부재의 오른쪽 끝단에 놓으면 각 요소의 유연도행렬과 평행행렬은 다음과 같다.

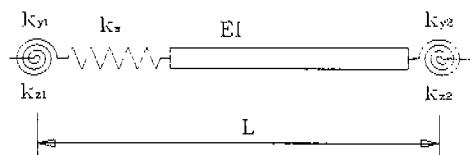


Fig.3 Compound beam-spring element

$$\begin{aligned} [F_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k_{z1} \end{bmatrix} & [H_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 & 1 \end{bmatrix} & [F_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k_{z2} \end{bmatrix} & [H_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$[F_m] = \begin{bmatrix} 1/k_s + L/AE & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3/3EI_z & 0 & 0 & L^2/2EI_z \\ 0 & 0 & L^3/3EI_y & 0 & -L^2/2EI_y \\ 0 & 0 & 0 & L/GI_x & 0 \\ 0 & 0 & -L^2/2EI_y & 0 & L/EI_y \\ 0 & L^2/2EI_z & 0 & 0 & -L/EI_z \end{bmatrix}$$

여기서  $[F_1]$ ,  $[F_2]$ ,  $[F_m]$ 는 각각 회전스프링요소 1, 2와 비선형 압축스프링과 탄성보의 유연도행렬이고,  $[H]$ 는 평행행렬이다.  $k_{y1}$ ,  $k_{y2}$ ,  $k_{z1}$ ,  $k_{z2}$ 는 회전스프링요소의 회전강성을 나타내며 모멘트-회전각 선도에서의 비선형 구간의 기울기이다. 또한  $k_s$ 는 비선형 압축스프링의 축방향강성을 나타내며 하중-변위 선도의 기울기이다.

각 요소를 합성한 전체유연도행렬  $[F_{22}]$ 는 다음과 같다.

$$[F_{22}] = [H_1]^T [F_1] [H_1] + [F_m] \\ + [H_2]^T [F_2] [H_2] \quad (17)$$

만일  $[K_{22}]$ 의 값을 안다면 Livesley<sup>11)</sup>가 제안한 방법을 이용하여 요소의 완전한 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[K_{ij}] = [H_i][K_{22}][H_j]^T; i, j = 1, 2 \quad (18)$$

여기서  $[K_{22}]$ 는 식(17)에서 얻은  $[F_{22}]$ 와 다음과 같은 관계이다.

$$[K_{22}] = [F_{22}]^{-1} \quad (19)$$

식(16), (17), (18)로부터  $[K_{22}]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{k_x}{AE + Lk_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3} \frac{EI_x(k_{y1} + k_{y2}) + Lk_{y1}k_{y2}}{Z} & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} \frac{k_{y2}(2EI_x + Lk_{y1})}{Z} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} \frac{EI_y(k_{z1} + k_{z2}) + Lk_{z1}k_{z2}}{Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \frac{k_{z2}(2EI_y + Lk_{z1})}{Y} & 0 \\ \frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} \frac{k_{y2}(3EI_y + Lk_{y1})}{Y} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \frac{k_{z2}(3EI_z + Lk_{z1})}{Z} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{여기서 } Y = 4EI_y(k_{y1} + k_{y2}) + Lk_{y1}k_{y2} + \frac{12E^2I_y^2}{L}, \quad Z = 4EI_z(k_{z1} + k_{z2}) + Lk_{z1}k_{z2} + \frac{12E^2I_z^2}{L}$$

## 2.2.2 프로그래밍

본 논문에서는 변위중분법을 사용하여 국부좌표로 인한 봉괴구간에서 해를 구하기 위한 프로그램은 유도된 강성행렬을 이용하여 박판 4각튜브로 이루어진 평면프레임의 봉괴거동을 해석할 수 있도록 개발하였으며 FORTRAN 77으로 작성되었다. 입력데이터로는 구조물의 치수, 경계조건, 하중조건, 재료의 물성치 등과 박판 4각튜브의 단면치수등이 주어지고 이를 중분 반복계산

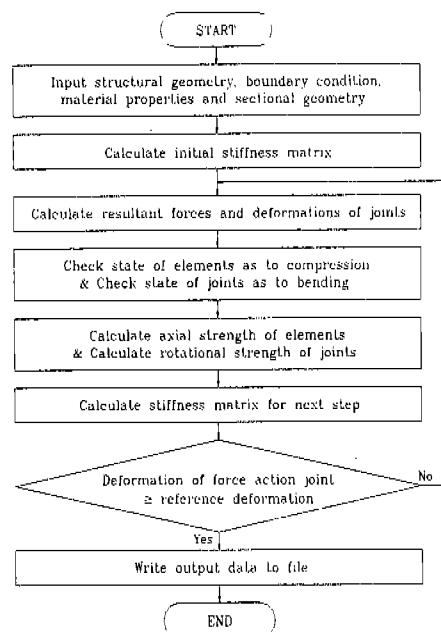


Fig.4 Analysis flow chart

수행전에 처리하였다. 또한 매 증분과정에서 계산한 모멘트와 압축력으로부터 굽힘과 압축에 대해 절점이나 부재가 각각 어느 영역에 속하는가를 판단하여 그 영역에 해당하는 모멘트-회전각, 하중-변위 관계식으로부터 부재의 굽힘강성과 측강성을 결정하고 다음 증분 계산과정을 위해 강성해렬을 재구성하였으며 현 증분과정에서 계산된 하중작용점에서의 변위가 입력데이터로부터 주어진 기준변위를 넘어설 때 증분과정을 종료하고 계산된 결과를 저장하도록 하였다. 본 논문에서 개발한 프로그램의 흐름도는 Fig.4와 같다.

### 3. 수치예

portal 프레임과 차체구조물을 각각 2차원과 3차원으로 구분하여 4가지 모델에 대해 해석한다. 부재의 단면치수는 Table 1에 나타내었다. portal 프레임 모델의 형상과 해석후 변형된 형상을 Fig.5~6에 나타내었고 차체구조물 모델의 형상과 변형된 형상을 Fig.7에 나타내었다. Fig. 8은 3차원 차체구조물을 해석하기 위한 유한요

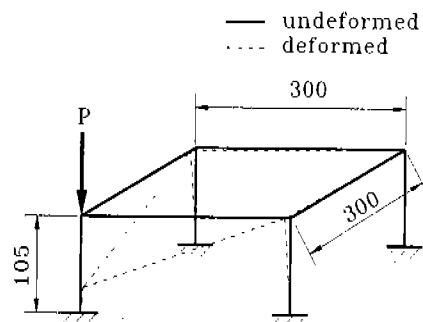


Fig.6 Portal frame(3D)

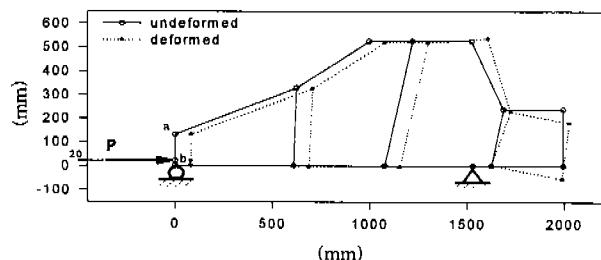


Fig.7 Vehicle structure(2D)

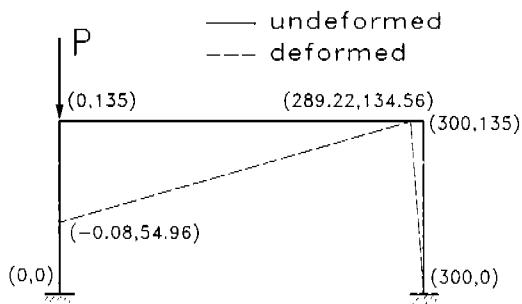


Fig.5 Portal frame(2D)

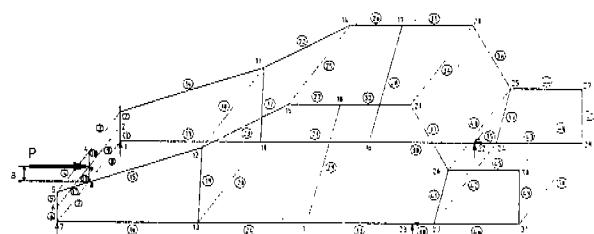


Fig.8 Vehicle structure of FE-analysis(3D)

Table 1 Dimensions of specimen

		Portal Frame	Vehicle Structure
Width	b (mm)	30	30
Height	h (mm)	30	30
Thickness	t (mm)	1.5	1.4
Area	A (mm <sup>2</sup> )	171	160.16
Polar Moment of Inertia	I <sub>x</sub> (mm <sup>4</sup> )	40,500	37,800
Second Moment of Area	I <sub>y</sub> , I <sub>z</sub> (mm <sup>4</sup> )	23,213.3	21,886.4

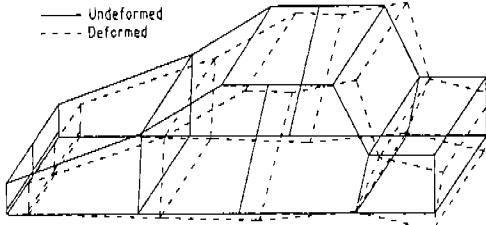


Fig.9 Vehicle structure(3D)

소모델이며 Fig.7의 a~b부재와 Fig.8의 1~12번 부재의 단면치수는  $b=100\text{mm}$ ,  $c=100\text{mm}$ ,  $t=27.7\text{mm}$ 이다. 3차원 차체구조물의 하중이 가해지는 곳은 바닥으로부터의 거리  $h=21\text{mm}$ 인 지점이며 변형전의 형상과 변형후의 형상을 Fig.9에 나타내었다.

#### 4. 실험 및 결과

본 논문에서는 해석프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 2차원 및 3차원 portal 프레임에 대해 실험을 실시하였으며 실험장치는 Fig.10~11에 나타내었다. 재질은 일반 구조용강으로 기계적 성질은 Table 2와 같고 사용된 재료의 단면치수는 수치해석에 사용된 데이터와 같다. 실험은 Shimazu사의 만능시험기를 이용하였으며 하중은 준정적상태를 만족시키기 위하여  $10\text{mm/s}$  속도로 천천히 가하였다. 각 실험의 하중·변위 선도는 만능시험기에서 처리되는 하중신호와 변위신호를 PC에 interfacing하여 전용 소프트웨어를 이용하여 구하였다.

portal 프레임의 해석결과와 실험결과를 비교



Fig.10 Experimental setup of portal frame(2D)

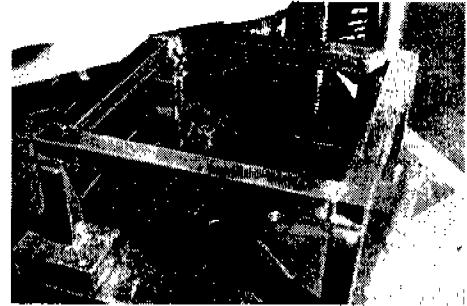


Fig.11 Experimental setup of portal frame(3D)

Table 2 Mechanical properties of specimen

Young's Modulus	$E (\text{kg}/\text{mm}^2)$	20,000
Shear Modulus	$G (\text{kg}/\text{mm}^2)$	8,077
Poisson's Ratio	$\nu$	0.3
Yielding Strength	$\sigma_Y (\text{kg}/\text{mm}^2)$	28.8
Ultimate Strength	$\sigma_u (\text{kg}/\text{mm}^2)$	40.7

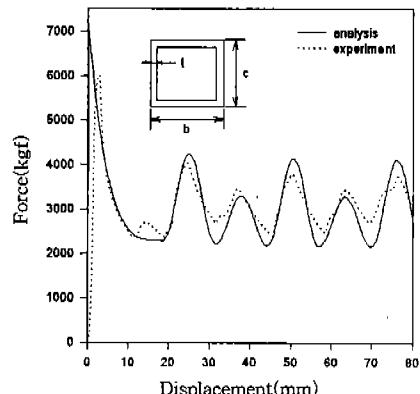


Fig.12 Force-deflection curve of portal frame(2D)

하여 Fig.12~13에 나타내었으며 비교결과가 비교적 잘 일치하며 이 해석방법을 2차원 및 3차원 차체구조물에도 적용하여 결과를 Fig.14~15에 나타내었다.

#### 5. 결 론

본 논문에서는 굽힘과 압축에 의한 국부적 붕괴를 수반하는 프레임의 붕괴거동을 예측하기

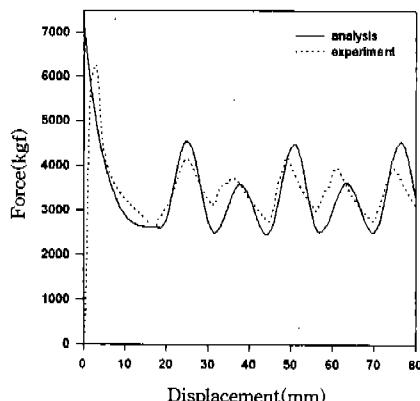


Fig.13 Force-deflection curve of portal frame(3D)

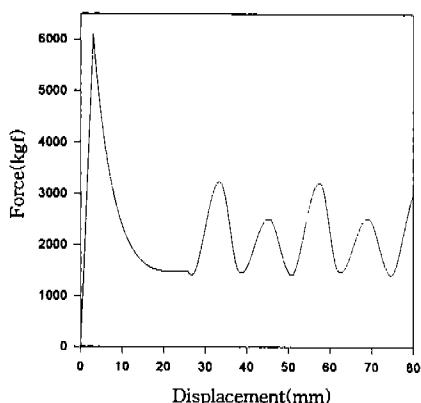


Fig.14 Force-deflection curve of vehicle structure(2D)

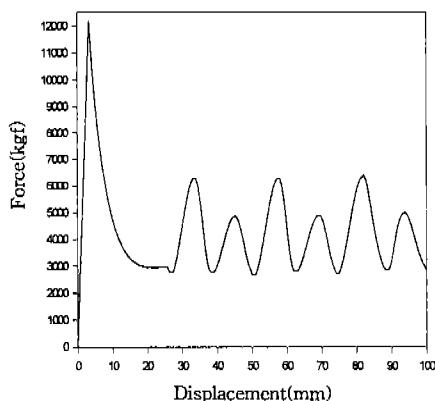


Fig.15 Force-deflection curve of vehicle structure(3D)

위하여 박판 4각튜브의 굽힘붕괴와 압축붕괴에 대한 특성으로부터 비선형 회전스프링-비선형 압축스프링-탄성보이소로 된 부재의 강성행렬을 결정하고 변위증분법을 이용하여 프레임구조물의 봉괴거동해석 프로그램을 개발하였다.

이상의 연구결과를 바탕으로 개발한 해석프로그램을 이용하여 프레임에 대한 봉괴거동을 해석하고 실험결과와 비교 검토하였으며 결과가 2 차원 뿐만 아니라 3차원에서도 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Choon T. Chon, Homa Mohammadrab and Mohamed El-Essawi, "Generic Stick Model of a Vehicle Structure", Vehicle Structural Mechanics Conference and Exposition, Detroit, Michigan, April 22-24, SAE 860825.
2. 김천욱, 김지홍, "스틱모델에 의한 차체경량화설계", 한국자동차공학회, Vol. 12, No. 5, pp. 97~106, 1990.
3. 김천욱, 김지홍, "개선된 스틱모델에 의한 차체구조해석", 한국자동차공학회 차체부분 학술강연초록집, pp. 15~20, 1991.
4. C.W.Kim, B.K.Han, C.J.Won, C.H.Lim, "A Study on Crushing Behavior and Energy Absorption Capacity of a Thin-walled Rectangular Tube under Axial Compression", IJCrash, Vol. 1, No 3, pp. 273~283, 1996.
5. Majid, K. I., Theory of Structures with Matrix Notation, Newness-Butterworths, 1978.
6. McIvor, I. K., Wienman, A. S. and Wang, H. C., "Plastic Collapse of General Frames", Int. J. of Solids Structures, Vol. 13, pp. 197~210, 1977.
7. Chang, D. C., "Effects of Flexible Connections on Body Structural Response",

- SAE 740041.
- 8. Kecman, D., "Bending Collapse of Rectangular and Square Section Tubes", Int. J. Mech. Sci, Vol. 25, No. 9-10, pp. 623~636, 1983.
  - 9. Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W., Gholami, T. and Huang, J., "Stress Profiles in Thin Walled Prismatic Columns Subjected to Crush Loading -II. Bending", Computers & Structures, Vol. 51, No. 6, pp. 625~641, 1994.
  - 10. Mahmood, H. F., Paluszny, A. and Tang, X., "Crash Analysis of Thin Walled Beam-Type Structures", SAE 880894.
  - 11. Livesley, R. K., Matrix Methods of Structural Analysis, 2nd Ed., Pergamon Press, 1975.