

차량의 모델링과 엔진마운트 최적설계값의 적용

The Modelling of Vehicle and Applying the Optimal Design Values of Engine Rubber Mounts

박 철 희*, 오 진 우**
C. H. Pak, J. W. Oh

ABSTRACT

The vibrations of steering wheel are required to be reduced for convenient ride quality and good controllability. This phenomenon, vibration of steering wheel, is occurred by interaction with suspension system, steering system, vehicle body, engine/transmission and tire complicate. But reviewing the current research activities, most researches are performed for the vibration analysis of steering wheel with a simple model, and not easy to be applied to the variation of each component element connected with steering system as well as that of the steering system.

In this study, suspension system and steering system are modelled by the T.L.H coordinate system which is usually used by a passenger car maker. Also, rigid body motions of engine and elastic motions of vehicle body in the previous study⁴⁾ are considered. Derive the equation of motion in 29 d.o.f. and the vibration of steering wheel is analyzed numerically and verify the modelling of steering system by comparison with test results for real car. And then, the optimal design values of the engine mount system obtained from the previous study⁴⁾ are applied to the verified steering system model and investigate the effects of various engine mount design values on the vibration of steering wheel.

주요기술용어 : Steering System(조향계), Suspension System(현가계), Steering Wheel(조향휠), Vibration(진동), Optimal Design Value(최적설계값), Experimental Results(실험결과), Nonlinear Algebra Equation(비선형 대수방정식)

* 정희원, 인하대학교 기계공학과

** 정희원, 인하대학교 대학원

1. 서 론

최근의 자동차 산업은 급격한 기술적 발전과 더불어 차량의 고속화 및 경량화 추세에 있다. 이에 따라 소비자의 만족감 뿐만 아니라 국내 메이커에서 생산한 승용차의 외국 수출을 위하여 선결해야 할 여러 문제중 자동차의 진동·소음문제가 기술의 발전과 더불어 더욱 중요한 문제로 대두되고 있다. 특히, 운전자의 승차감과 관련된 승용차의 조향휠에 나타나는 진동현상은 운전자의 쾌적한 승차감과 고속 주행시 조정성 등을 나쁘게 하기 때문에 그 개선책들이 요구되어 왔다.^{1),2)} 이러한 조향휠의 진동은 승용차의 현가계, 조향계, 차체, 엔진과 트랜스미션 그리고 타이어 등과 서로 복잡하게 상호 관련³⁾되어 나타나고 있으나, 지금까지의 연구동향을 살펴보면, 대부분의 연구가 일반 승용차 구조의 복잡성과 상호부품의 연관성 때문에 간단한 모델링을 통하여 진동해석을 하였기 때문에 조향계와 연계된 각 구성요소의 변화나 새로운 승용차의 모델 변경에 따른 조향계의 변화등에 쉽게 적용할 수 없었다.

본 연구에서는 일반 승용차 메이커에서 사용하고 있는 설계 좌표인 T.L.H. 좌표를 기준으로 하여 현가계와 조향계의 각 부분계(sub-system)를 모델링하였으며 엔진과 트랜스미션의 운동, 차체의 동특성 그리고 타이어의 불균형 질량 등을 고려하여 29자유도의 운동방정식을 유도하였다.⁴⁾⁻⁶⁾ 이를 통하여 조향휠의 진동을 수치적으로 해석하였으며, 그 결과를 실차의 실험결과와 비교하여 타당성을 검증하였다. 이로부터 앞서의 연구⁷⁾에서 얻어진 엔진마운트의 최적설계값을 적용하여, 실차에 어떠한 영향을 주는지를 간접적으로 확인할 수 있도록 하였다. 따라서 실제 모델을 제작하지 않고서도 그 특성을 파악할 수 있게 하였으며, 그 예로서 변경된 설계값이 조향휠의 진동에 미치는 영향을 살펴보았다. 이러한 일련의 과정으로부터 변경된 엔진마운트의 설계 값이나 차량의 주요부재의 물성치 변화에 따른 조향휠 진동의 변화양상을 쉽게 살펴볼 수 있도록 하였다.

2. 시스템의 모델링

조향계는 조향휠과 타이어 그리고 이들사이의 진동을 전달하는 칼럼(column)과 링크계(linkage)를 포함하여, 조향계를 지지하기 위하여 차체와 연결되는 아암(arm)과 부쉬(bush)류와 같은 부재들로 이루어져 있다.⁸⁾ 이때 이들은 각각 질량, 스프링 및 감쇠특성을 갖고 있다. 조향계와 현가계를 구성하는 각 부재의 운동을 19자유도로 나타내었으며 각 부재의 감쇠는 특성에 따라 구조감쇠, 접성감쇠로 모델링하고 볼조인트(B점, H점)부분의 건마찰효과(dry friction effect)⁹⁾를 등가접성감쇠형태로 고려하였다.^{10),11)} 조향계의 진동전달경로는 좌우대칭이지만 랙크의 길이가 양쪽이 다르기 때문에 접종질량(lumped mass)과 등가스프링으로 고려하였다. 따라서 전체 조향계의 모델은 Fig.1과 같다.

엔진의 강체운동(6자유도)과 차체의 탄성운동(4자유도)은 앞서의 연구⁷⁾와 동일하며, 조향계 모델의 겸중을 위한 단계에서는 가진원으로 타이어의 불균형 질량만 고려하였으며, 엔진마운트의 최적설계값의 겸중을 위한 단계에서는 엔진가진력을 고려하여 해석하였다. 각 부재의 물성치는 표 2에 나타내었으며, 시스템 모델링시의 가정은 다음과 같다.

- 1) 조향장치는 랙크와 피니언기어형태이고, 기어의 백래시(backlash)가 없음.
- 2) 스프링효과 적은 링크류는 강체로 가정
- 3) 하중상태는 설계하중상태(design weight state)를 기준으로 하였다.
- 4) 타이어가 받는 횡력과 자동정렬 모멘트(self aligning moment)는 주어진 데이터를 이용하여 스프링력으로 가정(노면마찰과 주행속도를 감안한 타이어의 동력학은 고려하지 않음).
- 5) 엔진 마운트는 재질이 동방질이며 균질하다고 가정하였고 온도에 의한 강성계수의 변화는 무시하였다. 또한, 회전 강성계수를 무시하고 특정한 진동수와 동진폭에서 일정한 강성값을 가진다고 가정하여 4지점의 엔진마운트의 특성을 각각 주축

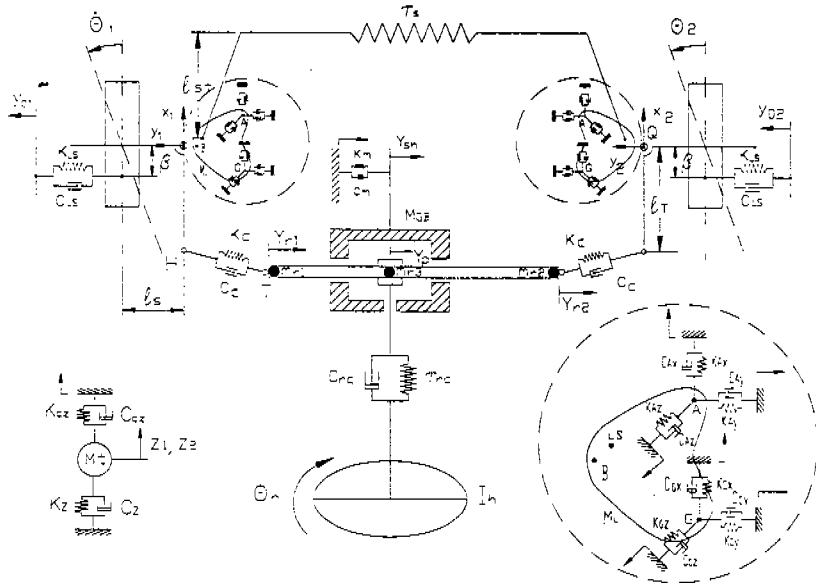


Fig.1 Modeling of the steering sub-system

방향으로 3개의 선형 스프링과 점성감쇠기로 구성하여 모델링.

3. 운동방정식의 유도

3.1 T.L.H. 좌표계와 좌표변환

T.L.H. 좌표는 일반 x, y, z 직각좌표계를 자동차 메이커마다 다른 이름으로 설정한 좌표로서 Fig.2에 스트럿트 형태(strut type)의 현가계 모델과 일반좌표계 x-y-z와 T.L.H. 좌표계와의 관계를 설정하였다.

Fig.2에서 i-j-k는 기준 좌표계의 단위 방향 벡터이며, Q점은 킹핀 회전축과 구동축 간의 공간상 교차점이며, 너클에 고정된 n₁-n₂-n₃ 좌표계의 원점이다. 여기서, n₁-n₂-n₃ 좌표계는 i-j-k 좌표계에 대하여 병진운동(x_i, y_i, z_i)과 회전운동(γ_i, α_i, θ_i)을 한다. 회전각이 작다고 가정할 때 두 좌표간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ -\theta & 1 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1)$$

또한 너클에 고정된 또 다른 단위 벡터 e₁-e₂-e₃와 e_{1'}-e_{2'}-e_{3'}은 킹핀 축과 스트럿트 축에 일치된 방향으로 e₃와 e_{3'}을 향하게 하였을 때의 단위벡터가 된다. 이 단위 벡터들과 n₁-n₂-n₃ 벡터 사이에는 아래와 같은 관계가 있다.

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = [T_k] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서, [T_k]의 각 성분은 Fig.2의 C점과 Q점의 정적인 상태의 좌표(그림에서 점선)로 아래와 같이 표현된다.

$$a_{11} = \frac{a_{32}}{(a_{31}^2 + a_{32}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad a_{12} = \frac{-a_{31}}{(a_{31}^2 + a_{32}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$a_{13} = 0, \quad a_{21} = \frac{a_{31}a_{33}}{(a_{31}^2 + a_{32}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$a_{22} = \frac{a_{32}a_{33}}{(a_{31}^2 + a_{32}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad a_{23} = -(a_{31}^2 + a_{32}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_{31} = \frac{x_{C_o} - x_{Q_o}}{L_{CQ}}, \quad a_{32} = \frac{y_{C_o} - y_{Q_o}}{L_{CQ}},$$

$$a_{33} = \frac{z_{C_o} - z_{Q_o}}{L_{CQ}}$$

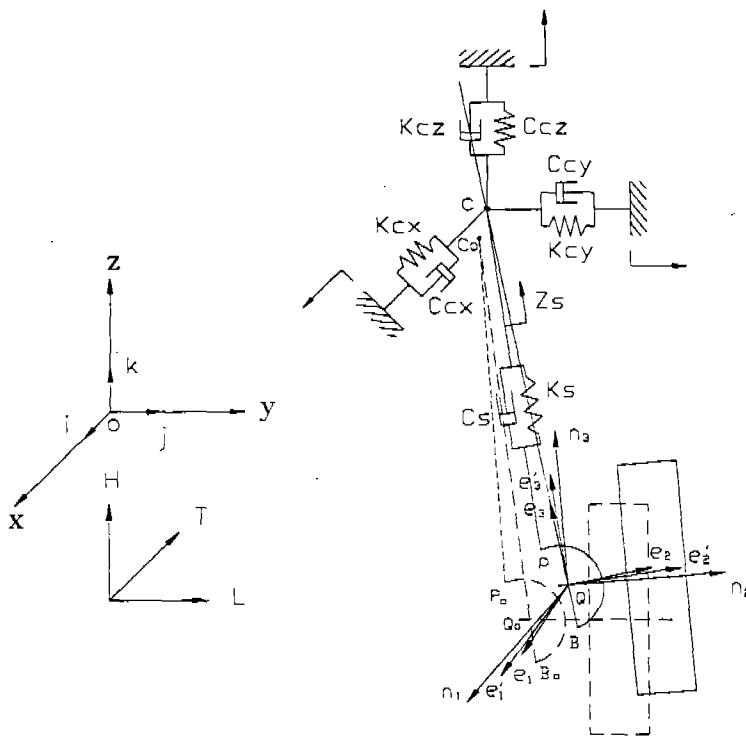


Fig.2 Coordinate systems of the steering system

$$\text{여기서 } L_{CQ} = \left\{ (x_{C_0} - x_{Q_0})^2 + (y_{C_0} - y_{Q_0})^2 + (z_{C_0} - z_{Q_0})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & 0 \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = [T_k] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

[T_k']의 각 성분 역시 C점과 P점의 좌표로 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_{11}' &= \frac{a_{32}'}{(a_{31}'^2 + a_{32}'^2)^{\frac{1}{2}}}, & a_{12}' &= \frac{-a_{31}'}{(a_{31}'^2 + a_{32}'^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ a_{13}' &= 0, & a_{21}' &= \frac{a_{31}' a_{33}'}{(a_{31}'^2 + a_{32}'^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ a_{22}' &= \frac{a_{32}' a_{33}'}{(a_{31}'^2 + a_{32}'^2)^{\frac{1}{2}}}, & a_{23}' &= -(a_{31}'^2 + a_{32}'^2)^{\frac{1}{2}}, \\ a_{31}' &= \frac{x_{C_0} - x_{P_0}}{L_{CP}}, & a_{32}' &= \frac{y_{C_0} - y_{P_0}}{L_{CP}}, \\ a_{33}' &= \frac{z_{C_0} - z_{P_0}}{L_{CP}} \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } L_{CP} = \left\{ (x_{C_0} - x_{P_0})^2 + (y_{C_0} - y_{P_0})^2 + (z_{C_0} - z_{P_0})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3.2 현가계

승용차의 현가장치는 주행중에 노면으로 부터의 진동이나 충격을 차체에 직접 전달되지 않도록 하여 차체의 손상을 방지하고 승차감을 좋게 하는 장치로서 독립식과 차축식이 있다. 독립식 중에서도 현재 가장 많이 사용되는 스트럿트 형태의 각 부분계를 다음과 같이 각각 모델링한 후 운동방정식을 유도하기 위해 각각의 에너지 항과 가상일을 구하였다.

- (1) 타이어의 수직방향 운동에 의한 포텐셜 및 운동에너지와 가상일

Fig.1의 타이어 모델에서 타이어가 지면과 수직한 방향의 변위로 인하여 생기는 포텐셜에너지는 다음과 같이 주어진다.

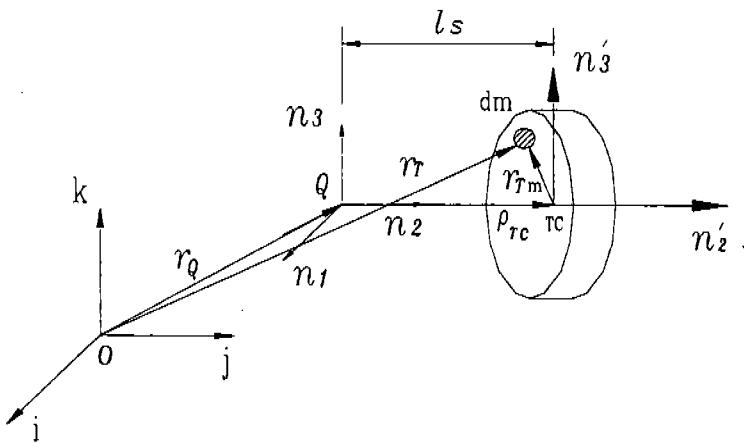


Fig.3 Geometry of the tire

$$V_{TZ} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{TZ} (1 - l_s \cdot C_a)^2 Z_i^2 \quad (4)$$

여기서, C_a 는 Q점의 수직변위당 캠버 변화율
타이어의 운동에너지를 구하기 위하여 로드휠
(road wheel)을 강체로 가정하였다. Fig.3으로
부터 바퀴의 운동에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$T_T = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} M_T \dot{r}_{TCi} \cdot \dot{r}_{TCi} + 2M_T \dot{r}_{TCi} \cdot \left({}^R \Omega_i^{n'} \times r_{TmGi} \right) + \frac{1}{2} {}^R \Omega_i^{n'} \cdot I_T \cdot {}^R \Omega_i^{n'} \right] \quad (5)$$

여기서, $\dot{r}_{TC} = \dot{r}_Q + {}^R \Omega^n \times \rho_{TC}$

$${}^R \Omega^n = \dot{\gamma}_i \hat{i} + \dot{\alpha}_i \hat{j} + \dot{\theta}_i \hat{k}$$

$${}^R \Omega_i^{n'} = \dot{\gamma}_i \hat{i} + \dot{\alpha}_i \hat{j} + \dot{\theta}_i \hat{k} + \dot{\psi} \hat{n}_2$$

I_T = 타이어 중심축에 대한 질량
관성 모우멘트

타이어의 구조 감쇠 C_{TZ} 에 의한 가상일은
다음과 같다.

$$\delta W_{TZ} = - \sum_{i=1}^2 C_{TZ} (\dot{r}_{TCi})_Z \delta (\dot{r}_{TCi})_Z \quad (6)$$

(2) 로어 현가암(lower arm)의 포텐셜 및 운
동에너지와 가상일

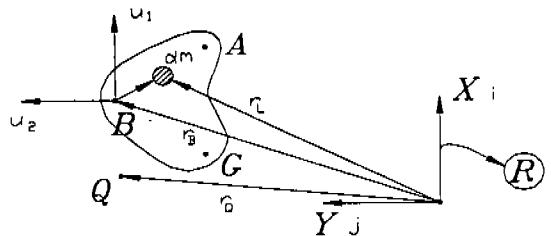


Fig.4 Geometry of the lower arm

Fig.4의 기준좌표계에서 본 A점과 G점을 잇는 거리벡터의 중분량으로 포텐셜 에너지 V_L 을 구하면 다음과 같다.

$$V_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [k_{AX} (\Delta r_{AX})^2 + k_{GX} (\Delta r_{GX})^2 + k_{AY} (\Delta r_{AY})^2 + k_{GY} (\Delta r_{GY})^2 + k_{AZ} (\Delta r_{AZ})^2 + k_{GZ} (\Delta r_{GZ})^2]_i \quad (7)$$

로어 현가암은 기준좌표계에 대하여 병진운동
과 회전운동 (${}^R \Omega^L$)을 하며, 이에 따른 운동에
너지는 다음과 같다.

$$T_L = \sum_{i=1}^2 [M_L \dot{r}_{Bi} \cdot \dot{r}_{Bi} + 2M_L \dot{r}_{Bi} \cdot \left({}^R \Omega_i^L \times r_{LmGi} \right) + {}^R \Omega_i^L \cdot I_L \cdot {}^R \Omega_i^L] \quad (8)$$

$$\text{여기서, } \dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_Q + {}^R\Omega^n \times \mathbf{r}_{B/Q}$$

$${}^R\Omega_i^L = \dot{\phi}_i$$

$\mathbf{r}_{LmQi} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 좌표에서 로어
현가암 중심까지의 위치 벡터

M_L = 로어 현가암의 질량

I_L = 로어 현가암축에 대한 질량
관성 모멘트

로어 현가암 부숴의 구조감쇠에 의한 가상일
은 다음과 같다.

$$\delta W_L = [C_{AX}\dot{\mathbf{r}}_{AX}\delta\mathbf{r}_{AX} + C_{GX}\dot{\mathbf{r}}_{GX}\delta\mathbf{r}_{GX}] + [C_{AY}\dot{\mathbf{r}}_{AY}\delta\mathbf{r}_{AY} + C_{GY}\dot{\mathbf{r}}_{GY}\delta\mathbf{r}_{GY}] + [C_{AZ}\dot{\mathbf{r}}_{AZ}\delta\mathbf{r}_{AZ} + C_{GZ}\dot{\mathbf{r}}_{GZ}\delta\mathbf{r}_{GZ}] \quad (9)$$

(3) 너클(knuckle) 및 속 업소바 실린더(shock absorber cylinder)의 운동에너지

Fig.5에서 너클 및 속 업소바 실린더의 운동
에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_{KS} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} M_{KS} \dot{\mathbf{r}}_{Qi} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{Qi} + M_{KS} \dot{\mathbf{r}}_{Qi} \cdot ({}^R\Omega_i^n \times \rho_{CG_i}) + \frac{1}{2} {}^R\Omega_i^n \cdot I_n \cdot {}^R\Omega_i^n \right] \quad (10)$$

$$\text{여기서, } \dot{\mathbf{r}}_{Qi} = \dot{x}_i \hat{i} + \dot{y}_i \hat{j} + \dot{z}_i \hat{k}$$

$${}^R\Omega_i^n = \dot{\gamma}_i \hat{i} + \dot{\alpha}_i \hat{j} + \dot{\theta}_i \hat{k}$$

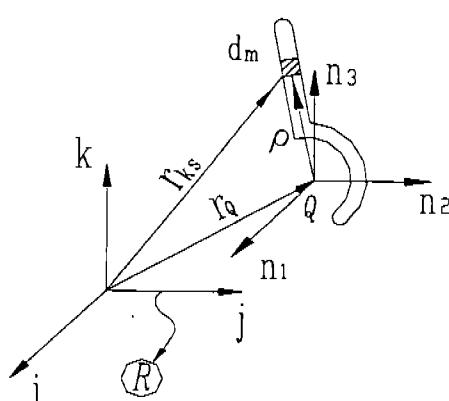


Fig.5 Geometry of the strut cylinder & knuckle

$\rho_{CG_i} = Q$ 점에서의 너클과 속 업소바
실린더의 중심까지의 위치벡터
 $I_n = n_1 - n_2 - n_3$ 축에 대한 질
량관성모멘트

(4) 속 업소바 피스톤(shock absorber piston)
의 운동에너지

Fig.6에서 속 업소바 피스톤의 운동에너지 T_{sp}
는 다음과 같다.

$$T_{sp} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} M_{sp} \dot{\mathbf{r}}_{ci} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ci} + M_{sp} \dot{\mathbf{r}}_{ci} \cdot ({}^R\Omega_i^S \times \mathbf{r}_{spQi}) + \frac{1}{2} {}^R\Omega_i^S \cdot I_p \cdot {}^R\Omega_i^S \right] \quad (11)$$

$$\text{여기서, } \dot{\mathbf{r}}_{ci} = \dot{\mathbf{r}}_{Qi} + \dot{\mathbf{r}}_{c/Qi} + {}^R\Omega_i^n \times \mathbf{r}_{c/Qi}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{c/Qi} = \dot{Z}_i \hat{s}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{x}_i \hat{i} + \dot{y}_i \hat{j} + \dot{z}_i \hat{k}$$

$${}^R\Omega_i^S = \dot{\gamma}_i \hat{i} + \dot{\alpha}_i \hat{j} + \dot{\theta}_i \hat{k}$$

$$\mathbf{r}_{spQi} = C$$
 점에서 피스톤의 질량중심 까
지의 위치벡터

$$I_p = C$$
 점에서의 i, j, k 축에 대한 질
량관성모멘트

$$M_{sp} = \text{피스톤의 질량}$$

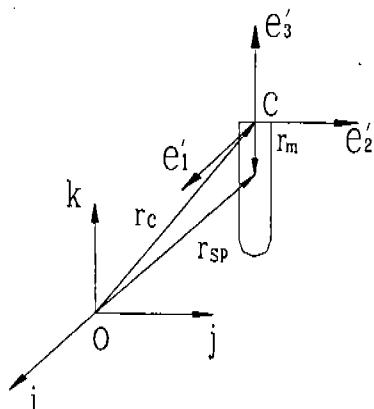


Fig.6 Geometry of the strut piston

(5) 스테빌라이저 바(stabilizer bar)의 포텐셜 에너지

독립현가의 차에서 스프링상수가 작은 스프링을 사용하면 승차감은 좋아지지만 선회시에 작용하는 원심력 때문에 차체가 심하게 기울어지게 된다. 이를 감소시켜 차체의 평형을 유지하기 위해 스테빌라이저 바의 비틀림 스프링힘에 의해 차체의 기울기를 감소할 수 있다.

Fig.1에서 스테빌라이저 바의 역할은 양쪽바퀴의 수직방향 변위차를 줄여 주는데 있으며, 변위가 발생했을 때 두 바퀴의 평형을 맞추어 준다.

LS점(로어 현가암과 스테빌라이저 바가 결합된 점)까지의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_{LS} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}_{B/Q} + \mathbf{r}_{LS/B}$$

따라서, 스테빌라이저 바의 포텐셜 에너지 V_{ST} 는 다음과 같이 주어진다.

$$V_{ST} = \frac{1}{2} \tau_s \left[\frac{\Delta r_{LS}}{I_{st}} \right] \quad (12)$$

$$\text{여기서, } \Delta r_{LS} = (z_1 - z_2) + r_{B/Q} a_{31} (\alpha_1 - \alpha_2) + r_{B/Q} a_{32} (\gamma_1 - \gamma_2) + r_{LS/B} (\phi_1 - \phi_2)$$

(6) 스트럿 인솔레이터 부쉬(strut insulator bush)의 포텐셜 에너지와 가상일

Fig.2에서 스트럿 인솔레이터 부쉬는 속 업소바의 상단에서 C점을 고정하고 있으면서 속 업소바가 자유롭게 회전할 수 있게 되어 있다. Δr_c 는 기준좌표계에 대한 C점의 변위차를 나타내고, 이 변위차로 인한 포텐셜 에너지 V_{sh} 는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$V_{sh} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [k_{cx} \Delta r_{ci}^2 + k_{cy} \Delta r_{ci}^2 + k_{cz} \Delta r_{ci}^2] \quad (13)$$

또한, C점 부쉬의 구조 감쇠에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{sb} = -C_{sh} \sum_{i=1}^2 (\Delta r_{ci}) \delta (\Delta r_{ci}) \quad (14)$$

(7) 타이 로드(tie-rod)의 포텐셜 에너지와 가상일

Fig.7에서 H점과 T점의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Ho/To} &= (x_{Ho} - x_{To})\mathbf{i} + (y_{Ho} - y_{To})\mathbf{j} + (z_{Ho} - z_{To})\mathbf{k} \\ &= A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \end{aligned} \quad (15)$$

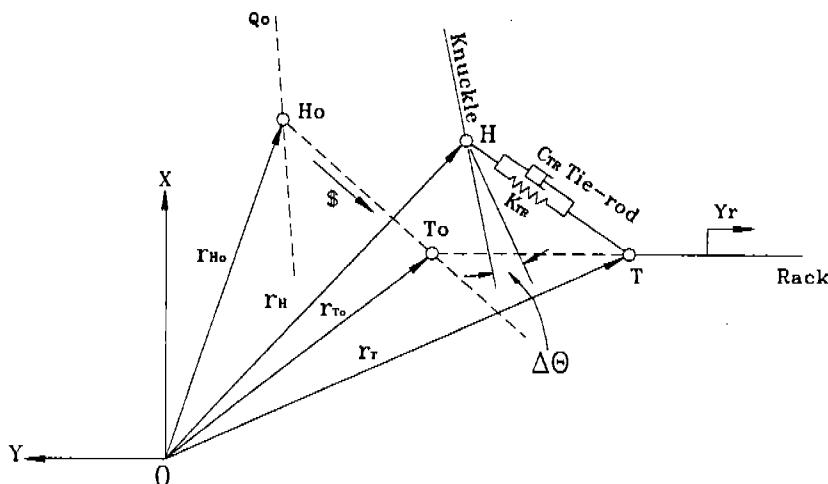


Fig.7 Geometry of the tie-rod

식(15)로부터 $r_{H/T}$ 방향의 단위벡터 $\$$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\$ = \frac{Ai + Bi + Ck}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = s_1 i + (-1)^{i+1} s_2 j + s_3 k \quad (16)$$

타이 로드의 변위벡터 $\Delta r = (r_H - r_T) - (r_{Ho} - r_{To})$ 를 $r_{Ho/To}$ 방향의 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta r \cdot \$ = \{(r_H - r_T) - (r_{Ho} - r_{To})\} \cdot \$ \quad (17)$$

따라서, 타이 로드의 포텐셜 에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$V_{TR} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_c (\Delta r \cdot \$)^2 \quad (18)$$

또한, 구조 감쇠에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{TR} = -C_{TR} (\Delta r \cdot \$) \delta (\Delta r \cdot \$) \quad (19)$$

(8) 랙(rack)의 운동

랙의 모델링은 Fig.8과 같고 랙의 운동방정식을 유도하기 위해 3개의 다른 노드점을 선정하

여, 랙의 구조적 특성인 질량과 강성을 이 노드 점들로 해석하였다. 이때 각 노드점에서 축방향으로만 변위와 힘들이 작용한다고 가정하였다. Fig.8에서 F_1 , F_2 는 타이 로드와의 연결점에서 발생하는 반력이고, F_3 는 랙과 피니언 기어의 연결점에서 발생하는 반력이다.

따라서 랙의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(m_{r1} + m_{r2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_{r1} \\ \dot{y}_p \\ \dot{y}_{r2} \end{bmatrix} + EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 \\ \frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1 + l_2} & -\frac{1}{l_2} \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{r1} \\ y_p \\ y_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(9) 타이어의 불균형질량(unbalance mass)에 의한 운동에너지

타이어의 림에 불균형질량을 부착하였다고 가정할 때, 부착된 형태는 Fig.9와 같으며 불균형질량의 운동에너지 T_u 를 구하면 다음과 같다.

$$T_u = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} M_{ui} \dot{r}_{TCi} \cdot \dot{r}_{TCi} + M_{ui} \dot{r}_{TCi} \cdot (^RQ_i^P \times r_{Tu}) + \frac{1}{2} M_{ui} (^RQ_i^P \times r_{Tu}) \cdot (^RQ_i^P \times r_{Tu}) \right] \quad (21)$$

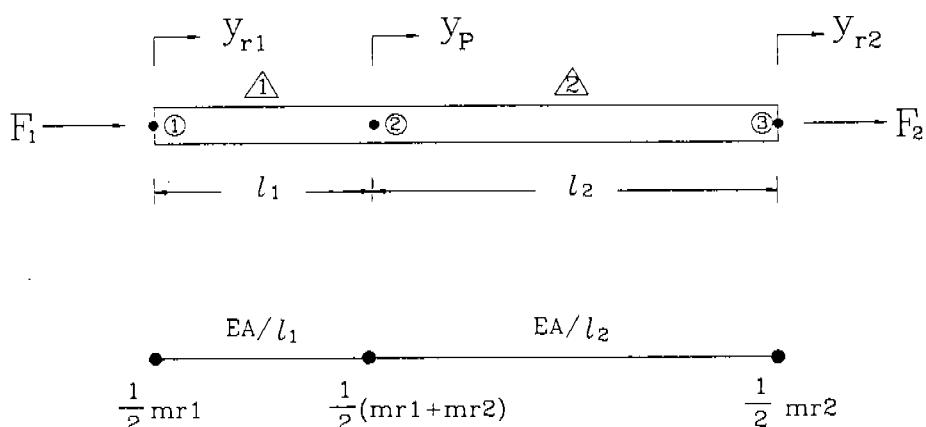


Fig.8 Lumped model of the rack

여기서,

$$\begin{aligned} \dot{r}_{TCi} &= \dot{r}_Q + {}^R\Omega_i^n \times \rho_{TC} \\ &= [\dot{x}_i + (-1)^{i+1} l_s \alpha_i \dot{\gamma}_i - (-1)^{i+1} l_s \theta_i \dot{\theta}_i] \hat{i} \\ &\quad + [\dot{y}_i - (-1)^{i+1} l_s \gamma_i \dot{\gamma}_i - (-1)^{i+1} l_s \theta_i \dot{\theta}_i] \hat{j} \\ &\quad + [\dot{z}_i + (-1)^{i+1} l_s \dot{\gamma}_i + (-1)^{i+1} l_s \theta_i \dot{\alpha}_i] \hat{k} \end{aligned}$$

$$r_{Tui} = (d \sin \Psi_i) \hat{n}_1 + e(-1)^{i+1} \hat{n}_2 + (d \cos \Psi_i) \hat{n}_3$$

$${}^R\Omega^{n'} = {}^R\Omega^n + {}^R\Omega^{n'} = \dot{\gamma}_i \hat{i} + \dot{\alpha}_i \hat{j} + \dot{\theta}_i \hat{k} + \dot{\Psi}_i \hat{n}_2$$

(10) 기어박스(gear box)의 포텐셜에너지, 운동에너지, 가상일

Fig.1의 기어박스는 부숴로 차체에 고정이 되어 있으며, 기어 박스의 변위는 y_{SH} 이다. 따라서, 부숴 강성 k_{GB} 에 의한 기어 박스의 포텐셜 에너지와 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{GB} &= \frac{1}{2} k_{GB} (y_{SH} + Y_1(x_{GB}) q_1(t) \\ &\quad + Y_2(x_{GB}) q_2(t))^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$T_{GB} = \frac{1}{2} M_{GB} \dot{y}_{SH}^2 \quad (23)$$

또한, 부숴의 구조 강쇠에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{GB} &= -C_{SH} (\dot{y}_{SH} + Y_1(x_{GB}) \dot{q}_1(t) \\ &\quad + Y_2(x_{GB}) \dot{q}_2(t)) \cdot \delta(y_{SH} + Y_1(x_{GB}) q_1(t) \\ &\quad + Y_2(x_{GB}) q_2(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

(11) 조향 칼럼(steering column)의 포텐셜 에너지, 운동에너지, 가상일

Fig.1에서 조향 칼럼은 원형단면의 강(steel)봉으로서 비틀림 강성계수 τ_{rc} , 구조 감쇠 C_{rc} 를 갖는 시스템으로 모델링 하였다. 따라서, 조향 칼럼의 포텐셜 에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$V_{rc} = \frac{1}{2} \tau_{rc} (\theta_h + \theta_p)^2 \quad (25)$$

여기서, θ_h : 조향휠의 회전각 범위

$$\theta_p : \text{파니언기어의 회전각 범위} \\ (= (y_r - y_{SH})/rp)$$

또한, 조향휠의 회전운동으로 인한 운동에너지는

$$T_{rc} = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}_h^2 \quad (26)$$

이다. 조향 칼럼의 구조 감쇠에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{rc} = C_{rc} (\dot{\theta}_h + \dot{\theta}_p) \delta(\theta_h + \theta_p) \quad (27)$$

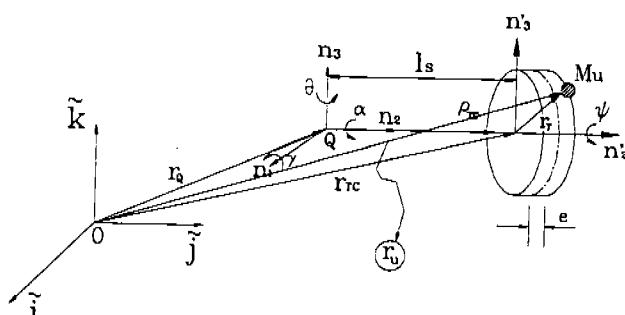


Fig.9 Unbalance mass attached on the tire

(12) 타이어의 횡방향 스프링과 감쇠에 의한 포텐셜 에너지와 가상일

타이어의 미끄럼현상(Fig.1)으로 인한 횡방향 힘의 특성을 나타내기 위해 타이어 횡방향 스프링의 포텐셜 에너지와 감쇄력에 의한 가상일을 구하면 다음과 같다.

$$V_{LC} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{LC} (\Delta r_{L/Q_i})_y^2 \quad (28)$$

$$\delta W_{LC} = - \sum_{i=1}^2 C_{LC} (\Delta r_{L/Q_i})_y \delta (\Delta r_{L/Q_i})_y \quad (29)$$

여기서,

$$\Delta r_{L/Q_i} = (-1)^{i+1} y_{oi} - y_i + l_L ((-1)^{i+1}$$

$$C_a \cdot a_{T3} z_i - a_{T1} \theta_i)$$

또한 타이어에 작용하는 횡방향 힘과 그 힘의 가상일은 아래와 같으며, 이때 k_t 는 횡방향 미끄럼각에 대한 코너링 힘의 기울기로써 코너링 파워(cornering power)이다.

$$F_{sti} = k_t \frac{\dot{y}_{oi}}{v} + (-1)^{i+1} C_a k_{LC} Z_i$$

$$\delta W_i = - F_{sti} \delta y_{oi}$$

(13) 속업소비(shock absorber) 코일스프링의 포텐셜 에너지와 댐퍼에 의한 가상일

Fig.2에서 스트럿트(strut)가 e_3' 방향으로 Z_{is} 만큼 상대변위를 일으켰을 때 상대변위에 따른 속 업소비 코일 스프링의 포텐셜 에너지 V_s 와 댐퍼의 가상일은 다음과 같다.

$$V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_s (b_{33} Z_{is})^2 \quad (30)$$

$$\delta W_s = - C_s \sum_{i=1}^2 Z_{is} \delta Z_{is} \quad (31)$$

여기서, $b_{33} Z_{is}$ 는 e_3' 방향의 상대변위 Z_{is} 를 e_3 방향으로 환산한 값이다.

(14) 볼 조인트(ball joint)부의 전마찰력(dry friction force)

Fig.7의 타이로드의 볼 조인트부(H점)와 Fig.1의 로어 현가암의 볼 조인트부(B점)의 전마찰 감쇠를 등가점성감쇠로 모델링하기 위해 다음과 같이 정의하였다.

ENERGY DISSIPATED PER CYCLE BY VISCOUS DAMPING $\Delta U = \pi C_{eq} \omega X^2$	ENERGY DISSIPATED PER CYCLE BY NON-VISCOUS DAMPING $\Delta U_{NON-viscous}$
--	--

윗 정의로부터 등가 점성 감쇠 계수는 다음과 같이 계산된다.

$$C_{eq} = \frac{U_{NON-VISCOUS}}{\pi} \omega X^2 = \frac{4F_c}{\pi \omega |X|} \quad (32)$$

여기서, F_c 와 X 는 각 조인트부의 마찰토크와 진폭의 크기를 나타낸다.

식(32)를 이용해서 각 볼 조인트부에 발생하는 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W = - C_{eq} \dot{X} \cdot \delta X \quad (33)$$

식(33)으로부터 로어 현가암 볼 조인트의 마찰력 F_{D1} 와 타이로드 볼 조인트의 마찰력 F_{D2} 를 구할 수 있다. 먼저 로어 현가암 볼 조인트부의 전 마찰에 의한 가상일을 구하면

$$\begin{aligned} \delta W_B &= - \left\{ \frac{4R}{\pi \omega A_1} [(-1)^i C_a \dot{Z}_i - \dot{\phi}_i] i + \frac{4R}{\pi \omega A_2} \dot{\alpha}_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{r\$}{\pi \omega A_3} \dot{\theta}_i \hat{k} \right\} \cdot \delta [(-1)^i C_a Z_i - \theta_i] i + \alpha_i \dot{j} + \theta_i \dot{k} \\ &= - \frac{4R}{\pi \omega A_1} (-1)^i C_a [(-1)^i C_a \dot{Z}_i - \dot{\phi}_i] \cdot \delta Z_i \\ &\quad + \frac{4R}{\pi \omega A_1} [(-1)^i C_a \dot{Z}_i - \dot{\phi}_i] \cdot \delta \phi_i \\ &\quad - \frac{4R}{\pi \omega A_2} \dot{\alpha}_i \cdot \delta \alpha_i - \frac{4R}{\pi \omega A_3} \dot{\theta}_i \cdot \delta \theta_i \end{aligned} \quad (34)$$

와 같이 구할 수 있다. 여기서 A_1, A_2, A_3 는 로어 현가암 볼 조인트부의 i, j, k 방향의 전

폭이고, R은 마찰 토오크이다. 또한 타이 로드 불 조인트의 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_T = -C_{eq} \Delta \dot{\theta} \cdot \Delta \theta \quad (35)$$

여기서, $C_{eq} = \frac{4T}{\pi \omega \Delta \theta_i}$

(15) 운동방정식

앞에서 구한 각 부분체와 엔진의 6자유도 강체운동과 차체의 4자유도 탄성운동으로 인한 운동에너지와 포텐셜에너지⁴⁾에 의해 전체에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{tot} = V_{TZ} + V_L + V_{\eta} + V_s + V_{TR} + V_{rc} + V_{GB} \\ + V_{ST} + V_{LC} + V_{eg} + V_{Body} \quad (36)$$

$$T_{tot} = T_{sp} + T_L + T_T + T_{ks} + T_{GB} + T_{rc} \\ + T_u + T_{eg} + T_{Body} \quad (37)$$

또한 감쇠력에 의한 전체 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_{tot} = \delta W_{sb} + \delta W_B + \delta W_{TZ} + \delta W_{LC} + \delta W_s \\ + \delta W_L + \delta W_{GB} + \delta W_{rc} + \delta W_{TR} + \delta W_T \quad (38)$$

운동방정식을 구하기 위해 다음과 같은 해밀تون 식을 사용하였다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_{tot} - \delta V_{tot} + \delta W_{tot}) dt = 0 \quad (39)$$

윗식을 이용하여 행렬식 형태의 운동방정식과 타이어의 횡방향 미끄러짐을 고려한 식을 쓰면 아래와 같다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [G]\{\dot{x}\} + [C_v]\{x\} + [C_H]\{x\} + [K]\{x\} \\ = \{F\} + \{F_{D1}\} + \{F_{D2}\} + \{F_{SLP}\} \quad (40)$$

$$k_{LC}(y_{oi} - y_i + (-1)^i l_L C_a a_{T3} Z_i - l_L a_{T1} \theta_i \\ + C_{LC}(\dot{y}_{oi} - y_i + (-1)^i l_L C_a a_{T3} \dot{Z}_i - l_L a_{T1} \dot{\theta}_i \\ = -\frac{k_t}{v} \dot{y}_{oi} + (-1)^{i+1} C_a K_{LC} Z_i \quad (41)$$

여기서

[M] : 질량행렬, [G] : 차이로스코프행렬

[C_v] : 점성감쇠행렬, [C_H] : 이력감쇠행렬

[K] : 강성행렬

{F} : 타이어 불균형질량에 의한 힘벡터

{F_{D1}}, {F_{D2}} : 마찰력벡터

{F_{SLP}} : 타이어의 횡방향 미끄러짐으로 인한 힘벡터

4. 조향휠의 이론해석결과와 진동실험

4.1 조향휠의 진동실험

조향휠의 회전방향으로의 진동실험을 위하여 설치된 실험장치는 Fig.10과 같다. 여기서 앞타이어는 사시 다이나모미터상(chassis dynamometer)에서 구동되며, 질량불균형량이 각각 3g, 30g인 경우에 대해 실험을 수행하였다. 또한 조향휠에는 두 개의 가속도계를 180° 차로 설치하여 순수한 회전성분만이 검출되도록 하였다. 검출된 가속도계의 신호와 타이어의 회전속도 신호는 트랙킹필터(tracking filter)를 거치게 되어 신호는 타이어의 회전속도에 해당하는 주파수성분만이 기록되게 되므로 이론해석결과와 직접 비교할 수 있도록 하였다.

4.2 조향휠 진동의 이론해석

조향휠에 발생하는 진동 문제는 일반적으로 타이어의 편마모등으로 인한 중량 불균형이 주원인이며, 조향휠의 동적 응답을 고찰하기 위하여 정상상태인 경우 다음과 같이 해를 가정하였다.

$$\{x\} = \{X\} \cdot e^{i\omega t} \quad y_{oi} = Y_{oi} \cdot e^{i\omega t} \quad (42)$$

식(42)를 식(40)에 적용하여 정리하면 다음과 같은 형태의 식이 유도된다.

$$-w^2[M]\{x\} + iw[G]\{x\} + iw[C_v]\{x\} + iw[C_H]\{x\} \\ - iw[C_{SS}]\{x\} - [K_{SS}]\{x\} + [K]\{x\} \\ = \{F\} + \{F_{D1}\} + \{F_{D2}\} \quad (43)$$

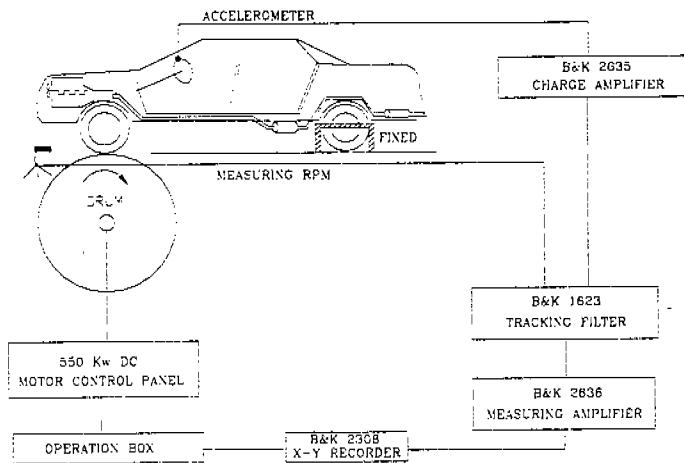


Fig.10 Configuration of experimental set-up for the vibration of steering wheel

식(43)은 $\{F_{D1}\}$ 과 $\{F_{D2}\}$ 항에 의해 비선형 대수방정식이 되므로 이를 풀기 위해 IMSL 서브루우틴 중 DNEQNF를 이용하였다. 타이어의 회전속도에 따른 조향휠의 진동양상에 있어 수치해석결과와 실험결과를 Fig.11, Fig.12에 나타내었다. 즉, 횡축은 차량의 진행속도(km/h)이며 종축은 조향휠의 회전방향으로의 진동기속도(dB)이다. 그림에서 알 수 있듯이 타이어의 회전속도 영역에 걸쳐 조향휠의 진동양상이 유사하며, 진동레벨에 있어 다소 차이를 보이고 있으나 적용한 감쇠계수(고무의 이력감쇠상수 : 0.05)나 볼조인트 부의 마찰토크(B점 : 3N·m, H점 : 1N·m) 등의 오차를 고려할 때 비교적 잘 일치한다고 할 수 있을 것이다.

4.3 최적설계값의 적용

앞서의 연구⁷⁾에서 구한 10자유도 엔진마운트 시스템에 대한 최적설계값을 식(40)의 운동방정식에 적용할 경우 엔진회전수에 따른 조향휠의 진동양상을 Fig.13, 14에 나타내었다. 즉, 1) 엔진마운트에서의 전달력을 목적함수로 할 경우(I), 2) 차체 탄성진동모우드의 일반화좌표의 진동가속도 성분을 목적함수로 할 경우(II), 3) 차체에 위치한 특정부위(랙과 피니언의 연결점)의 진동

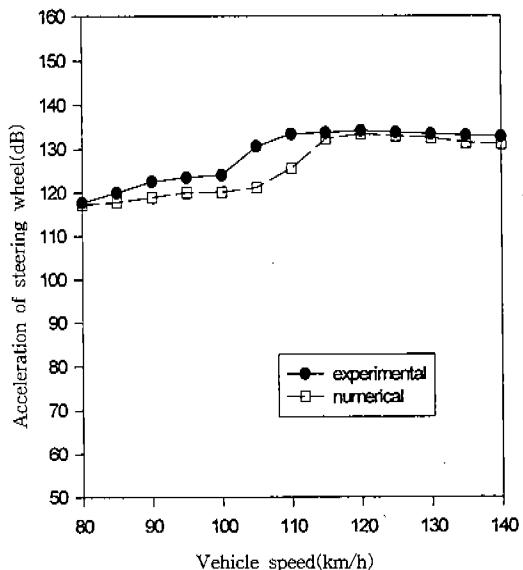


Fig.11 Comparison between experimental and numerical analysis(unbalance mass : 3g)

가속도 성분을 목적함수로 할 경우(III) 등 세 가지 경우에 대해서 얻은 최적설계값을 차량시스템에 적용하여 그 양상을 비교하였다. Fig.13은 토크를 죽이 적용되지 않은 상태에서 얻은 세 가지 경우의 최적설계값을 적용하였을 때의 조향

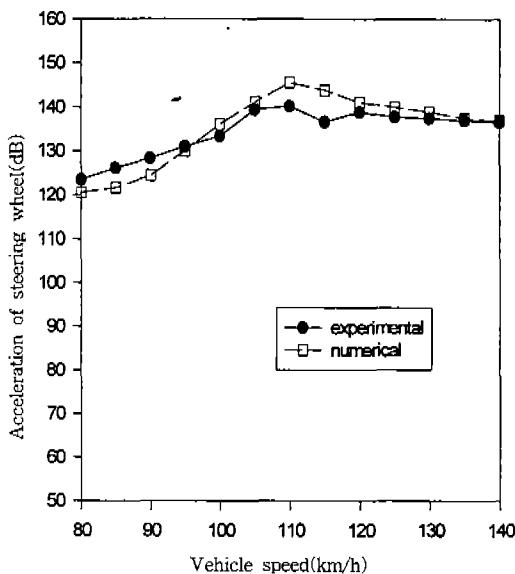


Fig.12 Comparison between experimental and numerical analysis
(unbalance mass : 30g)

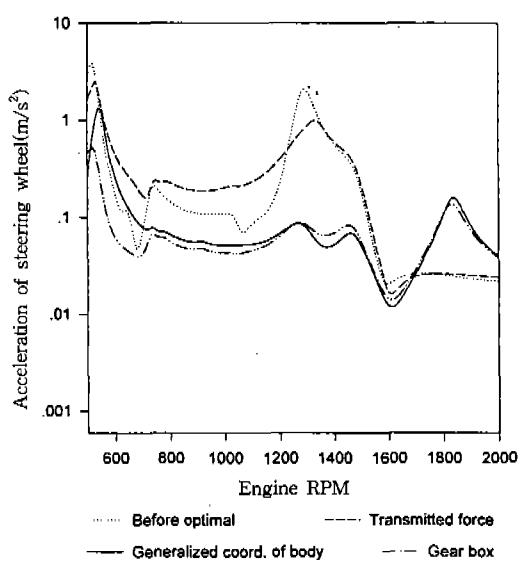


Fig.13 Response of steering wheel for the three optimal design cases
(Ignore the torque roll axis)

휠의 진동양상을 나타낸 것이고 Fig.14는 토크 롤축이 적용되었을 경우의 세가지 최적설계값에 대한 조향휠의 진동양상이다.

최적설계 수행전의 초기 엔진마운트 설계값은 기존 제품의 설계값을 이용하였기 때문에 조향휠의 진동감소가 큰 폭으로 줄고 있지는 않으나, 초기상태보다 진동저감면에서 양호해졌음을 알 수 있다. 즉, 엔진마운트의 최적설계값이 엔진회전수가 700~800rpm인 경우에 대해서 계산된 결과이므로, 이 영역에서 진동가속도를 비교해보면 토크롤축을 고려하지 않는 경우(Fig.13)에는 전달력을 목적함수로 설정한 경우만 제외하고 초기상태보다 진동이 줄었음을 알 수 있다. 토크롤축을 고려한 경우(Fig.14)에는 세가지 경우(I, II, III) 모두 조향휠의 진동저감에 효과적임을 알 수 있다. 이때에도 차체진동을 목적함수로 설정하는 것(II, III)이 유리하며 다른 엔진회전속도영역에서도 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

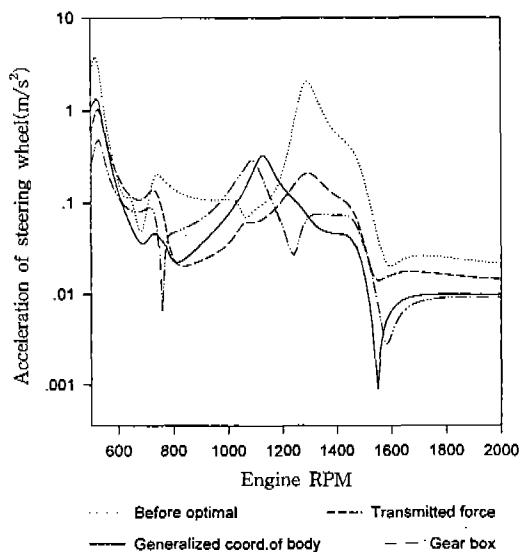


Fig.14 Response of steering wheel for the three optimal design cases
(Apply the torque roll axis)

5. 결 론

조향계와 현가계 그리고 차체와 엔진의 운동이 포함되는 보다 상세한 차량모델링을 수행하여 조향휠의 진동양상을 살펴보았으며, 이를 실차의 실험결과와 비교하여 그 양상이 유사함을 확인할 수 있었다. 이로부터 변경된 설계값을 갖는 차량의 진동특성을 전산 시뮬레이션에 의한 모의실험을 통해 확인할 수 있도록 하였다.

10자유도의 엔진/차체모델에서 구한 엔진마운트의 최적설계값⁷⁾을 실험을 통해 검증된 29자유도의 조향계 모델에 적용해본 결과 조향휠의 진동을 줄이는 데 기여하고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 앞서의 연구결과⁷⁾에서도 알 수 있었듯이 토크를축을 고려한 경우의 마운트의 최적설계값이 조향휠의 진동저감에 효과적임을 재확인할 수 있었다. 엔진마운트에서의 전달력을 목적함수로 설정하는 것 보다는 차체진동 일반화좌표의 가속도성분을 목적함수로 설정(Ⅱ)하는 것이 조향휠의 진동저감에도 유리함을 알 수 있으며, 조향휠 뿐만 아니라 승차감이나 주요부품들의 진동에 의한 영향을 줄이기 위해서도 차체 진동을 저감하도록 엔진마운트의 최적설계값을 결정하는 것이 필요하다.

엔진마운트의 최적설계값을 구하기 위해서 수행한 10자유도의 모델링⁷⁾으로도 엔진마운트의 최적설계값을 구하는 데 있어 좋은 결과를 얻을 수 있으며, 또한 엔진의 가진 특성이 차량의 특정부위에 미치는 영향을 줄이기 위해서는 특정부위의 진동가속도 성분을 차량좌표를 이용하여 목적함수로 설정(Ⅲ)할 수 있도록 하여, 이에 대한 최적설계값을 얻을 수 있도록 하였다.

참 고 문 헌

1. “回轉機械の 振動 騒音 その 原因と 對策, 解析, 調査, 診斷” -綜合技術 資料集-, 世和出版社, 1992.
2. Den Hartog “Mechanical Vibrations”, McGraw-Hill Book Company.Fnc. pp. 170 ~224, 1956.
3. Yasuhico Fujiwara and Miki Nakayasu, “Analysis of Vibration Mode of Vehicle Steering Mechanism”, SAE 710627, pp. 1~16, 1971.
4. Morita, I., Nozawa, Y. and Arai, K. “On Noise and Vibration from Engines Transversely Installed in Front Wheel Drive Cars”, JSAE review, Nov, pp. 24 ~31, 1983.
5. Hiromichi Eishima, Keiichi Hamano, Yoshiki Tanaka and Yoshioribu Kumata, “Method of Front Wheel Drive Car Body Shake Reduction of Engine Idling”, SAE 870630, pp. 1~7.
6. Joong Hee Kim, Seung Gyoong Jung, Ki Sei Kim, “An Investigation of the Steering Wheel Vibration and Its Reduction in Passenger Cars”, SAE paper No. 852267, 1985.
7. 박철희, 오진우, “차체의 탄성진동을 고려한 4기통 엔진고무마운트의 최적설계”, 한국자동차공학회, 논문집, 제6권 제1호, pp. 163~181, 1998.
8. Thomas D. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers, Inc. 1992.
9. H. B. Pacejka, “Analysis of the Shimmmy Phenomenon”, Modeling of the Pneumatic Tyre and Its Impact on Vehicle Dynamic Behaviour, i72B, A7.
10. Donald Bastow, Car Suspension and Handling, Pentech Press, 1987.
11. Mounir M. Kamal and Joseph A. Wolf, “Modern Automotive Structural Analysis”, Van Nostrand Reinhold Company, 1982.
12. James, C. Davis, “Modal Modeling Techniques for Vehicle Shake Analysis”, SAE 720045, pp. 1~11.

$$\Delta r_{AX} = x_i - r_{B/Q} ((-1)^i a_{32} \theta_i + a_{33} \alpha_i)$$

$$\Delta r_{AY} = y_i - r_{B/Q} (-a_{31} \theta_i - a_{32} (-1)^i C_a z_i) - r_{A/Bz} \phi_i \\ - Y_1(x_A) q_1(t) - Y_2(x_A) q_2(t) + l \sin \theta \cdot \Theta(x_A) p(t)$$

$$\Delta r_{AZ} = z_i - r_{B/Q} (-a_{31} \alpha_i - a_{32} (-1)^i C_a z_i) + r_{A/By} \phi_i \\ - Z(x_A) r(t) - l \cos \theta \cdot \Theta(x_A) p(t)$$

$$\Delta r_{GX} = x_i - r_{B/Q} ((-1)^i a_{32} \theta_i + a_{33} \alpha_i)$$

$$\Delta r_{GY} = y_i - r_{B/Q} (-a_{31} \theta_i - a_{32} (-1)^i C_a z_i) - r_{G/Bz} \phi_i \\ - Y_1(x_G) q_1(t) - Y_2(x_G) q_2(t) + l \sin \theta \cdot \Theta(x_G) p(t)$$

$$\Delta r_{GZ} = z_i - r_{B/Q} (-a_{31} \alpha_i - a_{32} (-1)^i C_a z_i) + r_{G/By} \phi_i \\ - Z(x_G) r(t) - l \cos \theta \cdot \Theta(x_G) p(t)$$

$$\Delta r_{CX} = x_i + a_{31}' Z_{is}$$

$$\Delta r_{CY} = Y_1(x_C) q_1(t) + Y_2(x_C) q_2(t) - l \sin \theta \\ \cdot \Theta(x_C) p(t) - y_i + (-1)^i a_{32}' Z_{is}$$

$$\Delta r_{CZ} = Z(x_C) r(t) + l \cos \theta \cdot \Theta(x_C) p(t) - z_i - a_{32}' Z_{is}$$

$$\Delta r \cdot \$ = s_1 x_i + (-1)^{i+1} s_2 y_i + (s_3 - C_a l_T a_{T2} s_3 \\ + s_2 C_a l_T a_{T3}) z_i + (s_1 l_T a_{T3} - s_3 l_T a_{T1}) \alpha_i \\ ((-1)^{i+1} s_1 l_T a_{T2} + s_2 l_T a_{T1}) \theta_i + (-1)^{i+1} s_2 y_n$$