

## 라플라스 변환과 유한요소법의 결합에 의한 확산방정식의 해석

송병철 · 이준호 · 이기식

단국대학교 전기공학과  
서울특별시 용산구 한남동 산 8, 140-714

(1998년 1월 19일 받음, 1998년 5월 30일 최종수정본 받음)

본 논문에서는 라플라스 변환과 유한요소법의 결합에 의하여 확산방정식의 과도해석에 적용이 가능한 알고리즘을 제안하였다. 제안한 방법은 시간항을 라플라스 변환을 이용하여 제거한 후 유한요소법을 적용하여 해를 구한다. 이렇게 주파수 영역에서 구해진 해는 라플라스 역변환을 이용하여 시간영역의 값으로 변환된다. 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 열전도문제를 해석하였으며, 제안한 방법이 해석해와 잘 일치한다는 것을 알 수 있었다. 제안한 방법은 시간 차분이 필요하지 않기 때문에 여러 가지 확산방정식을 해석함에 있어서 매우 유용할 것으로 사료된다.

### I. 서 론

전기기의 설계 및 제작에 있어서 최적 설계와 효율 향상을 위해서는 마찰이나 와전류 혹은 히스테리시스 현상에 의하여 발생하는 온도문제를 고려한 해석이 필요하다.

온도문제는 확산방정식으로 표현되므로 지배방정식에 시간에 대한 미분항이 포함되어 있어서 과도상태에 대한 해석이 필요하다. 과도상태해석은 계산이 어렵고 시간이 많이 걸리기 때문에 그 중요성에 비하여 연구가 활발히 진행되지 않고 있다.

확산방정식의 해를 구하는 일반적인 방법으로는 시간차분법을 이용한 수치해석적인 방법이 있는데 이것은 모든 시간에 대하여 연속인 해를 구하는 대신에 각각의 차분된 시간에서의 근사해를 구하는 것이다. 이산화된 근사해는 두 개 이상의 근사해 사이의 대수적인 방정식에 의하여 얻을 수 있다[1]. 시간차분법은 초기시간에서부터 차분된 시간마다 순차적으로 해를 구하므로 계산량이 많고 또한 구한 해는 이산화된 근사해이기 때문에 차분된 시간사이의 임의의 시간에서의 해를 알고자 하는 경우에는 또 다른 과정을 거쳐야 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 유한요소법과 라플라스 변환을 결합하여 확산방정식의 해를 구하는 방법을 제시하였다. 제시한 방법은 지배방정식의 시간항을 라플라스 변환을 이용하여 제거하고 유한요소법을 적용하여 해를 구한다. 이렇게 주파수 영역에서 얻은 해를 라플라스 역

변환을 이용하여 시간영역의 값으로 변환하여 해를 얻는 기법이다.

본 논문에서는 해석해가 있는 모델을 해석함으로써 제안한 알고리즘의 타당성을 검증 하였다.

### II. 본 론

확산방정식은 전자계나 열전도, 전자의 확산 등의 현상에 나타나며, 해는 공간과 시간에 대한 함수이다. 그러므로 이러한 확산방정식을 해석하기 위해서는 초기시간  $t_0$ 에서부터 그 이후의 시간에 대하여 순차적으로 해를 구하여야 한다.

본 장에서는 확산방정식으로 표현되는 현상 중에서 고체내의 열전도 현상을 해석하기 위한 알고리즘을 제안하였다.

#### 2.1 확산방정식

열전도의 기본법칙은 실험적 관찰에 근거하여 Biot로부터 유도되었으나, 일반적으로 그것을 열의 이론적 해석에 사용한 것은 프랑스 수리물리학자 Joseph Fourier에 의해서 정립되었다[2].

1차원일 경우, 온도는 공간의  $x$ 방향으로만 변하므로 열류(heat flux)는  $x$ 방향으로만 존재한다. 매질이 등방성인 경우, 온도를  $\theta$ , 매질의 열전달율을  $k$ 라고 할 때, 열전도 현상에서의 온도에 대한 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + g = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

**2.2 라플라스 변환**

식 (1)은 시간에 대한 함수인데 이것을 주파수에 대한 함수로 만들기 위하여 라플라스 변환을 적용한다.  $t < 0$ 일 때,  $f(t)=0$ 이고  $f: R \rightarrow R$ 인 함수에 대한 라플라스 변환과 역변환은 다음과 같이 정의된다[3].

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu-j\infty}^{\nu+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (3)$$

이때,  $s = \nu + j\omega$ ,  $\nu \in R$ ,  $\omega \in R$ 이며,  $\nu$ 는  $F(s)$ 의 특이점에서의 실수부분보다 크다면 어느 것이라도 상관없다.

열전도 현상의 온도에 대한 미분방정식에 라플라스 변환을 적용하려면 시간에 대한 미분항에 1계 도함수에 대한 라플라스 변환을 적용하여야 한다.  $y = f(t)$ ,  $t > 0$ ,  $y_0 = f(0)$ 인 경우, 1계 도함수에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$L[y'] = sL[y] - y_0 \quad (4)$$

라플라스 변환된 열전도 현상의 온도에 대한 미분방정식을 유도하기 위하여 식 (2.1)에 식 (4)를 적용한다. 온도에 대한 라플라스 변환을  $\Theta(x, s) = L[\theta(x, t)]$ , 내부 열원에 대한 라플라스 변환을  $G(x, s) = L[g(x, t)]$ , 그리고 초기온도를  $\theta_0 = \theta(x, t=0)$ 이라 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + G = \rho c (s \Theta - \theta_0) \quad (5)$$

**2.3 유한요소 정식화**

해석대상을  $m$ 개의 요소로 분할한 후 온도분포가 각각의 요소 내에서 선형적으로 변화한다고 가정하면, 요소  $e$ 내의 라플라스 변환된 온도분포는 다음과 같다.

$$\Theta^e = \sum_{i=1}^2 N_i^e \Theta_i^e \quad (6)$$

여기서  $N_i^e$ 는  $i$ 번째 절점에서의 형상함수이다.

전체 절점수가  $n$ 개이고 절점에서의 라플라스 변환된 온도를  $\Theta$ 라 할 때, 전체해석영역에서 라플라스 변환된 온도의 근사치  $\hat{\Theta}$ 를 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\hat{\Theta} = \sum_{i=1}^n N_i \Theta_i \quad (7)$$

갤러킨법에 의한 정식화를 위하여 열전도 현상에서의 온도에 대한 미분방정식에 라플라스 변환을 적용하여 얻은 식 (5)에 대하여 잔차  $R$ 을 정의한다. 만일  $\hat{\Theta}$ 가 실제 해라면  $R$ 은 0이 된다.

$$R = k \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x^2} + G - \rho c (s \hat{\Theta} - \theta_0) \quad (8)$$

식 (8)에서 구한 잔차에 형상함수를 가중함수로 하여 해석영역에 대해 적분한 가중잔차를 '0'으로 하는 해를 구하면 지배방정식에 대한 근사해를 구할 수 있다.

$$R = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^2 N_i \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{j=1}^2 N_j \Theta_j + G \right\} d\Omega - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^2 N_i \{ \rho c (s \Theta - \theta_0) \} d\Omega \quad (9)$$

가우스-그린의 적분공식과 Fourier법칙을 이용하여 식 (9)의 2계 편미분항을 변형한다.

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Omega^e} k \sum_{i=1}^2 N_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{j=1}^2 N_j \Theta_j d\Omega = - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^e} k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \Theta_j d\Omega + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \dots \quad (10)$$

여기서  $n$ 은 경계상에서의 외향법선이고  $\Gamma$ 는 해석영역의 경계이다. 그리고  $Q$ 는 라플라스 변환된 열전달률이다.

식 (10)을 이용하면 식 (9)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R = - \sum_{k=li=1}^m \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^e} k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \Theta_j d\Omega + \sum_{k=li=1}^m \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} Q N_i d\Gamma + \sum_{k=li=1}^m \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^e} G N_i d\Omega - \sum_{k=li=1}^m \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^e} \rho c s N_i N_j d\Omega \Theta_j + \sum_{k=li=1}^m \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^e} \rho c \theta_0 N_i d\Omega \quad (11)$$

식 (11)의 우변 제2항은 해석대상의 외부경계를 갖는 요소로부터의 기여분이다. 이러한 기여분, 즉 경계조건의 도입은 다음과 같이 적용한다.

경계면  $\Gamma_1$ 의 온도가 주어지는 온도규정 경계조건은 계행렬식 구성시 주어진 온도에 상수에 대한 라플라스 변환을 적용하여 대입한다[4].

경계면  $\Gamma_2$ 에서 열류  $\bar{q}$ 의 값이 주어진 경우, 그 값을

$q$ 라고 하면 상수에 대한 라플라스 변환을 적용하여  $Q$ 에 대입한다. 따라서 경계조건은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_2^e} Q N_i d\Gamma = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_2^e} \frac{\bar{q}}{s} N_i d\Gamma \quad (12)$$

여기서  $G_2^e$ 는 요소가  $G_2$ 상에서 점유하고 있는 경계면이다.

경계면  $\Gamma_3$ 에서 주어진 온도를 갖는 매체로 대류에 의하여 열이 전달될 경우, 열류  $q$ 는 Newton의 냉각법칙에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$q = h_c A (\theta - \theta_\infty) \quad (13)$$

여기서  $h_c$ 는 대류열전달계수이고,  $\theta_\infty$ 는 외부 유체의 온도,  $A$ 는 요소가 주위의 유체와 접하고 있는 면적이다.

대류경계조건에 의하여 열이 주위 유체로 전달되는 경우, 주위 유체의 온도는 해석영역에서 대류에 의하여 전달받는 열에 의하여 변하지 않는다. 따라서 상수에 대한 라플라스 변환을 적용하여 라플라스 변환된 열전달률은 다음과 같이 정의된다.

$$Q = h_c A \left( \Theta - \frac{\theta_\infty}{s} \right) \quad (14)$$

식 (14)에 의하여 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_3^e} Q N_i d\Gamma = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_3^e} h_c A N_i N_j d\Gamma \Theta_j - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_3^e} h_c A \frac{\theta_\infty}{s} N_i d\Gamma \quad (16)$$

여기서  $\Gamma_3^e$ 는 요소가  $\Gamma_3$ 상에서 점유하고 있는 경계면이다.

식 (11)에 경계조건식 (12)와 (16)을 적용한 후, 전체 요소에 대한 가중함수를 간략하게 나타내면 다음과 같은 계행렬식을 얻을 수 있다.

$$[K] \{\Theta\} = \{f\} \quad (17)$$

여기서,  $[K]$ 와  $\{f\}$ 는 각각 다음과 같다.

$$[K] = \sum_{k=1}^m [K^e] \quad (18)$$

$$\{f\} = \sum_{k=1}^m \{f^e\} \quad (19)$$

이 때,  $m$ 은 전체 요소의 수이며  $[K^e]$ 와  $\{f^e\}$ 는 각각 다음과 같다.

$$[K^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (20)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \rho c s N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_3} h_c N_i N_j d\Gamma$$

$$\{f^e\} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} G N_i d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho c \theta_0 N_i d\Omega \quad (21)$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_2} \frac{\bar{q}}{s} N_i d\Gamma + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_3} h_c \frac{\theta_\infty}{s} N_i d\Gamma$$

식 (17)을 풀면 주파수 영역에서의 온도분포  $\Theta$ 를 얻을 수 있다. 여기에 라플라스 역변환을 적용하면 시간 영역에서의 온도분포  $\theta$ 를 구할 수 있다.

## 2.4 라플라스 역변환

라플라스 역변환을 수치적으로 수행하기 위한 방법은 여러 논문에서 제시되어왔다[5]. 본 논문에서는 G. Honig, U. Hirdes가 제시한 방법을 적용하였다[6]. G. Honig & U. Hirdes법은 라플라스 역변환식의 적분 구간을 바꾸기 위하여 다음과 같은 과정을 거친다. 라플라스 역변환을 나타내는 식 (2)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{v-j\infty}^{v+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (22)$$

라플라스 변환의 형태는 삼각함수의 적분형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) [\cos(\alpha t) - j \sin(\alpha t)] dt \quad (23)$$

$$F(s) = \text{Re}\{F(v+j\omega)\} + j \text{Im}\{F(v+j\omega)\} \quad (24)$$

식 (24)를 식 (22)에 대입하여 전개하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Re}\{F(s)\} \cos(\alpha t) - \text{Im}\{F(s)\} \sin(\alpha t)) d\omega \right. \\ \left. + j \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Im}\{F(s)\} \cos(\alpha t) + \text{Re}\{F(s)\} \sin(\alpha t)) d\omega \right] \quad (25)$$

식 (23)과 식 (24)에서부터  $\text{Re}\{F(s)\}$ 와  $\text{Im}\{F(s)\}$ 에 대한 식을 얻을 수 있으며 이 식을 식 (25)에 대입하면

식 (26)과 같다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-v\tau} f(\tau) \cos(\alpha(\tau-t)) d\tau d\omega \right] \quad (26)$$

$$- j \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-v\tau} f(\tau) \sin(\alpha(\tau-t)) d\tau d\omega$$

여기서  $\tau$ 는  $\text{Re}\{F(s)\}$ 와  $\text{Im}\{F(s)\}$ 의  $t$ 이고, 이것은 적분변수이므로 어느 한 시간을 의미하는 식 (26)의  $t$ 와 구별하기 위해 사용하였다.

$\sin(\alpha(\tau-t))$ 는  $\omega$ 에 대하여 기함수이므로 식 (26)에서 우변의 두번째 적분항을 항상 '0'이다. 따라서 식 (25)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \{ \text{Re}\{F(s)\} \cos(\alpha t) - \text{Im}\{F(s)\} \sin(\alpha t) \} d\omega \right] \quad (27)$$

여기서  $s=v+j\omega$ 이며,  $v$ 는 상수로 주고  $\omega$ 가 적분변수이다.

식 (17)을 풀어서 얻은  $\Theta$ 를 식 (27)의  $F(s)$ 에 대입한 후  $\omega$ 에 대하여 적분을 하면 시간영역에서의 온도분포  $\Theta$ 를 얻을 수 있다.

식 (27)을 수치적으로 적분하는 경우  $v$ 는  $F(s)$ 의 특이점 보다 크다면 어느 값이라도 상관없다. 그러나  $F(s)$ 의 특이점을 구한다는 것이 쉽지 않으므로, 식 (27)에 세 개의  $v$ 의 값을 적용하여 구한 해가 모두 같다면  $v$ 는 특이점이 아니라고 보았다.

식 (27)에서  $\omega$ 의 적분구간은  $0 \sim \infty$ 이다. 하지만 식 (27)의 피적분함수값이 어떠한  $\omega$  이상에서 '0'으로 수렴한다면 그  $\omega$ 까지만 적분하면 된다.

피적분함수는  $\cos(\alpha\omega)$ 항과  $\sin(\alpha\omega)$ 항의 영향으로  $\omega$ 의 증가에 따라 부호가 바뀌는 것이 반복된다. 따라서 같은 부호를 갖는 면적들을 계산하여 면적들의 최대값을 구하고  $\omega$ 의 증가에 따른 최대값에 대한 면적의 비가  $10^{-5}$ 이하면 피적분함수가 수렴하였다고 판정하였다.

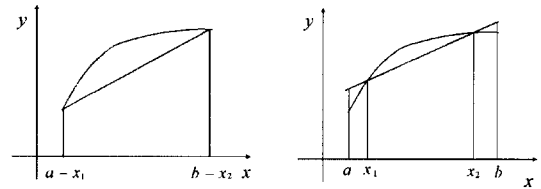
식 (27)의 적분구간을 길이가 1인 구간으로 나누고 각각의 구간 내에서 가우스 구적법을 사용하여 적분을 수행하였다.

가우스 구적법은 Fig. 1과 같이 등간격점에서의 값 대신에 최적의 점들을 선택한다.

즉, 임의의 함수에 대한 근사

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (28)$$

를 구할 때 예상되는 오차가 최소가 되도록 구간  $a$ 부



(a) Trapezoidal integral method (b) Gaussian quadrature  
Fig. 1. Comparison of integral method.

터  $b$ 사이의 노드  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 과 계수  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ 을 선택한다.

가우스 구적법에서의 노드와 계수는 집합내의 임의의 두 함수의 곱에 대한 특정한 정적분이 '0'이 되는 성질을 갖는 직교 다항식의 집합 중에서 르장드르 다항식의 근과 계수를 이용한다. 다항식의 근은 -1부터 1사이에서 대칭이고 거의 다 계산되어있다.

임의의 구간에 대하여 적분할 경우 선형변환을 통하여 구간을 변경할 수 있으므로 르장드르 다항식의 근과 계수를 이용한 가우스 구적법은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n c_{n,j} f\left(\frac{(b-a)r_{n,j} + b + a}{2}\right) \quad (29)$$

여기서  $r_{n,j}$ 와  $c_{n,j}$ 는 각각 르장드르의 근과 계수이다[7].

### III. 시뮬레이션 및 검증

본 장에서는 앞장에서 제시한 방법을 두 가지의 열전달 문제들에 적용하여 보았다. 첫번째 예제는 제안한 방법의 검증을 위하여 해석해가 있는 모델을 설정하였고, 두번째 예제는 제안한 방법이 실제적인 문제에도 적용될 수 있는지 알아보기 위한 것으로 정상상태의 해석해만이 존재하는 fin의 해석에 적용하였다.

#### 3.1 내부열원을 포함한 모델

중심에  $g=1$ 인 내부열원을 포함하고 있는 평판을 고려한다. 평판의 초기온도는  $0^\circ\text{C}$ 이고, 평판의 양 끝점에서는 시간에 관계없이 항상  $0^\circ\text{C}$ 를 유지한다. 문제를 간단히 하기 위하여  $k=1 \text{ kcal}/(\text{sm}^\circ\text{C})$ ,  $L=1 \text{ mm}$ ,  $\rho c=1 \text{ kcal}/(\text{m}^3^\circ\text{C})$ 라고 가정하였다. 이 모델의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + g(x-0.5) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \quad (30)$$

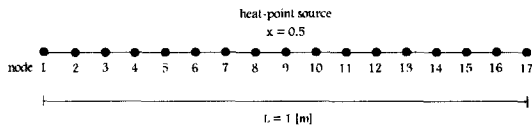


Fig. 2. Analysis model with heat point source.

Fig. 2는 해석모델의 요소분할도이고, Fig. 3은 각 절점에서 주파수의 변화에 따라 유한 요소법을 적용하여 구한 값이다. 주파수가 증가함에 따라 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 4는  $x=0.5$ , 시간  $0.06[s]$ 에서 주파수의 변화에 따른 식 (27)의 피적분함수값의 변화를 나타낸다.

Fig. 5는 위치와 시간에 따른 해석모델의 온도분포를 나타내고 있다. 내부열원이 위치한  $x=0.5$ 에서 온도가 가장 높다는 것을 알 수 있다. 시간에 따라 각 위치에서 온도가 증가하지만 해석모델의 양끝은 온도규정 경계조건을 만족해야 하기 때문에  $0^{\circ}C$ 를 유지한다.

Fig. 6은 제안된 방법으로 구한 온도와 해석해를 비교한 것이며, 각 위치에서 최대값에 대한 해석해와의 오차를 시간에 따라서 나타낸 것이다.

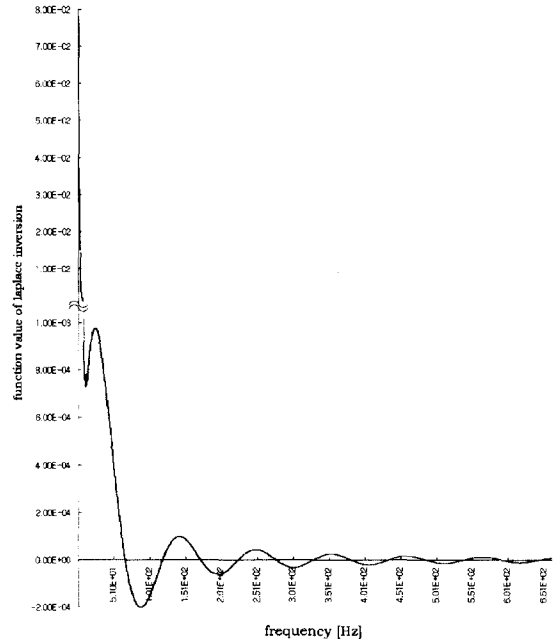
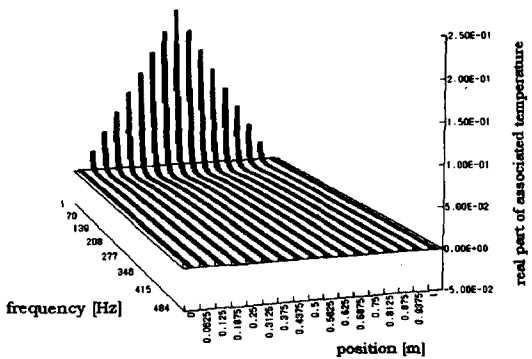


Fig. 4. Integrated function for Laplace inversion at  $x=0.5$ ,  $t=0.06 [s]$ .



(a) Real part of associated temperature.

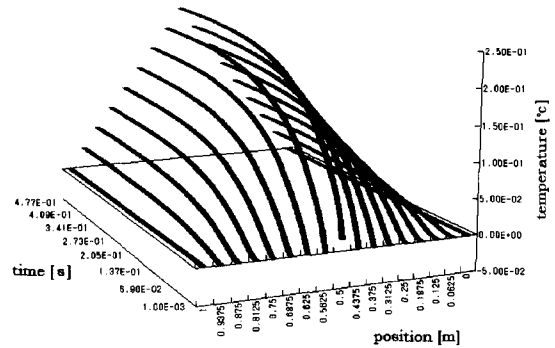
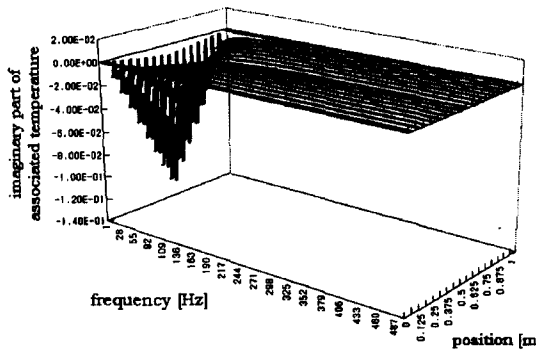


Fig. 5. Temperature distribution of nodes.



(b) imaginary part of associated temperature

Fig. 3. Real part and imaginary part of associated temperature.

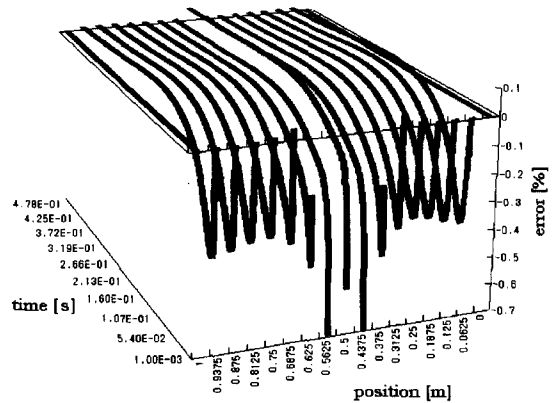


Fig. 6. Error ratio of each nodes compared with analytic solutions.

내부열원을 포함한 모델의 해석해와 오차는 각각 다음과 같다.

$$\theta(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-(\omega t)^2}}{(\omega \pi)^2} \sin\left(\frac{\omega \pi}{2}\right) \sin(\omega \pi x) d\omega \quad (31)$$

$$\text{오차} = \frac{\text{시간에 따른 해석해 - 시뮬레이션치}}{\text{전시간영역에서 해석해의 최대값}} \times 100[\%] \quad (32)$$

과도상태의 초기에 상대적으로 오차가 크게 나타남을 알 수 있다. 이 오차는 시간이 지남에 따라 감소하지만 최대오차가 0.7%를 넘지 않는다. 따라서 제안된 방법에 의한 해가 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다.

### 3.2 온도 규정 경계조건과 대류 경계조건을 갖는 fin의 해석

외부유체와의 접촉면적을 증가시킴으로써 물체표면에서의 열전달을 증가시키기 위하여 원래의 표면에 달아주는 부분을 fin이라고 하며, 본 예제는 제안한 알고리즘을 실제로 존재하는 모델에 대하여 적용한 것이다.

길이가 7.5 cm이고 반지름이 1 cm인 원통형 fin의 온도분포를 해석한다. 복사열전달은 없으며 열전도율  $k$ 는  $72 \text{ W}/(\text{cm} \cdot \text{K})$ , 외부유체의 온도  $\theta_{\infty}$ 는  $40 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , 대류 열전달계수  $h_c$ 는  $10 \text{ W}/(\text{cm} \cdot \text{K})$ 이다. 이 fin의 한끝은 시간에 관계없이  $150 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 를 유지하며, 원통형 fin의 초기온도는  $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 이다.

Fig. 7은 원통형 fin의 형상을 나타내고 있다. 이 원통형 fin을 열이  $x$ 축 방향으로만 전도된다고 가정하여 1차원 해석을 하였으며, 30개의 요소로 분할하였다.

원통의 둘레와 오른쪽 단면에서의 대류에 의한 공기로의 열전도를 고려하기 위하여 1번 절점을 제외 한 모든 절점에 대류경계조건을 주었다.

Fig. 9는 각 절점에서 주파수의 변화에 따라 유한요소법을 적용하여 구한 값이며, 주파수가 증가함에 따

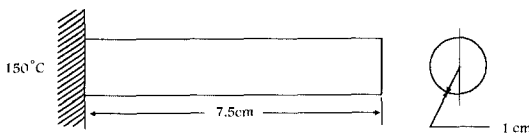


Fig. 7. Shape of cylindrical fin.

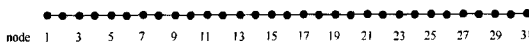
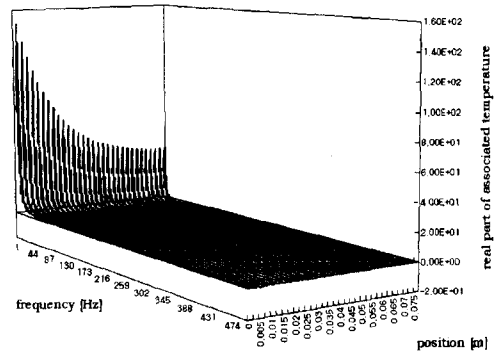
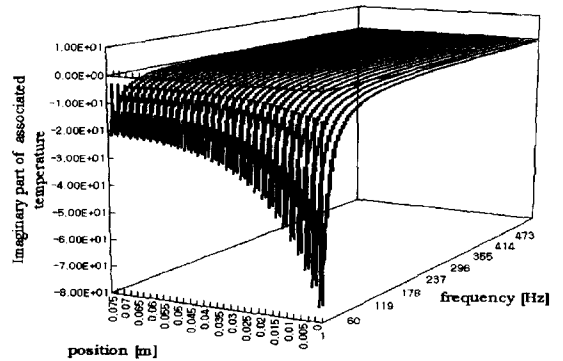


Fig. 8. Analysis model of cylindrical fin.



(a) Real part of associated temperature.



(b) imaginary part of associated temperature

Fig. 9. Real part and imaginary part of associated temperature.

라 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 10은  $x=0.0325$ , 시간 21.6[s]에서 주파수의 변화에 따른 식 (27)의 피적분함수값의 변화를 나타낸다.

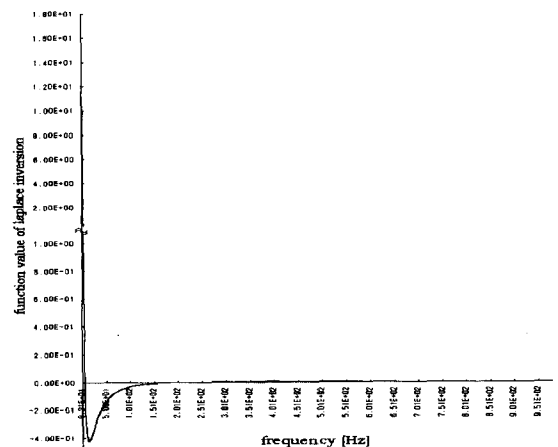


Fig. 10. Intergrated function for Laplace inversion at  $x=0.0325$ ,  $t=21.6$  [s].

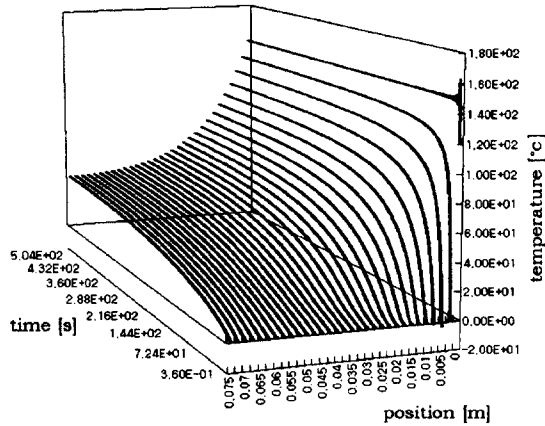


Fig. 11. Temperature distribution of nodes.

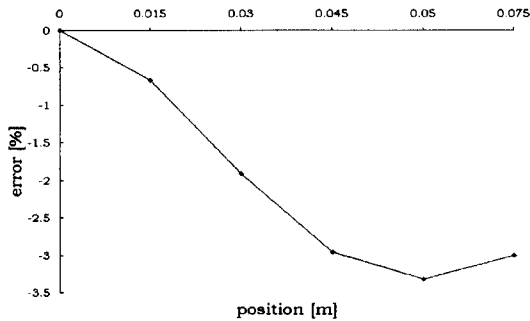


Fig. 12. Error ratio of each nodes compared with analytic solutions at steady state.

Fig. 11은 위치와 시간에 따른 해석모델의 온도분포를 나타내고 있으며, 시간이 지남에 따라 각 위치에서 온도가 증가하고 있다. 두 개의 온도규정 경계조건을 갖는 모델과는 달리 정상상태의 온도가 높은 쪽에서부터 낮은 쪽으로 선형적으로 감소하지 않고 원통의 끝으로 갈수록 온도차이가 적어짐을 알 수 있다. 이것은 대류에 의하여 열이 공기로 전달되기 때문이다.

Fig. 12는 정상상태에서 제안된 방법으로 구한 온도와 해석해를 비교한 것이며, 각 위치에서 최대값에 대한 해석해와의 오차를 나타낸 것이다. 오차율이 최대 -3.32%를 넘지 않으므로 해석해와 비교적 잘 일치하고, 실제적인 모델의 해석에 제안한 방법이 잘 적용될 수 있음을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 시간항이 들어있는 확산방정식으로 표현되는 과도현상을 유한요소법을 이용하여 해석할 수 있는 방법을 제시하였다.

라플라스 변환된 지배방정식에 대하여 유한요소법을 적용하여 주파수 영역의 해를 구하고, 이를 라플라스 역변환을 이용하여 시간영역에서의 값으로 환산하였다. 라플라스 역변환에는 가우스 구적법을 이용하였다.

해석해가 존재하는 열전도문제에 제시한 방법을 적용하여 해석하였다. 과도상태의 초기부분에서 오차가 상대적으로 크게 나타나지만 전체적으로 해석해와 잘 일치함을 알 수 있었다.

제안한 방법은 비선형 문제에는 적용될 수 없는 단점이 있지만 긴 시간에 대하여 해석하는 경우에 시간차분법에 비하여 계산량이 적고, 관심 있는 시간영역만 해석할 수도 있으며, 제안한 방법의 2차원 및 3차원 문제의 확장적용은 결합과정에서 각 차원에 대한 유한요소법을 적용하면 된다. 그러므로 전선 제작시 전선피복의 가소시간에 대한 해석이나 와전류 문제의 해석과 같이 확산방정식의 형태로 표현되는 과도현상을 해석하는데 유용하게 적용될 수 있으리라 사료된다.

제안한 알고리즘의 효과적인 적용을 위하여 라플라스 역변환시의 특징점과 수렴판정에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

#### 참 고 문 헌

- [1] David S. Burnett, Finite element analysis, Addison-Wesley (1988).
- [2] 최인규 공역, 열전달, 普成文化社 (1985).
- [3] Mary L. Boas, 강주상譯 수리 물리학, 圖書出版 漢東 (1992).
- [4] 홍준표, 열전도·확산의 수치해석, 半島出版社 (1991).
- [5] 조찬희, 석사학위논문, 충남대학교 (1993).
- [6] G. Honig and U. Hirdes, J. Comput. Appl. Math. 9, 113 (1984).
- [7] Faires Burden 저, 김규철 역, 알기쉬운 수치해석, 시그마프레스 (1996).
- [8] 이준호, 석사학위논문, 단국대학교 (1994).
- [9] 김영선, 이준호, 이기식, 이복용, 한국차기학회지 6(5), 281 (1996).

## **Analysis of Diffusion Equations by Coupling of Laplace Transform and Finite Element Method**

**Byoung-Chul Song , Joon-Ho Lee , Ki-Sik Lee**

*Dept. of Electrical Engineering, Dankook University, Seoul 140-714, Korea*

(Received 19 January 1998, in final form 30 May 1998)

In this paper, a algorithm is proposed, which is applicable to the transient analysis of diffusion equations by combined use of the Laplace transform and the finite element method. The proposed method removes the time terms using the Laplace transform and then solves the associated equation with the finite element method. The solution which is solved at frequency domain is transformed into time domain by use of the Laplace inversion. To verify the proposed algorithm, a heat conduction problem is analysed. And the solution showed a good agreement with analytic solution. Because the time-step method is not needed, the proposed method is very useful in solving various kinds of diffusion equations.