

# 직접방사형 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명 및 고차 주파수 응답특성에 관한 실험연구

## Experimental Researches on the Nonlinear Parameter Identifications and Higher Frequency Response Characteristics of Direct-Radiating Loudspeaker

박 석 태\*, 채 장 범\*\*, 홍 식 윤\*\*\*

(Seok Tae Park\*, Jang Bom Chai\*\*, Suk Yoon Hong\*\*\*)

### 요 약

라우드스피커의 비선형 음향특성을 해석하기 위하여 라우드스피커 다이어프램의 비선형특성을 실험적으로 분석하였다. 라우드스피커를 집중질량계로 모델링하고, 출력소음이 없을 때 적용이 가능한 하모닉 발란스법과 출력소음이 있을 때도 적용할 수 있는 통계적 방법인 라그란지 배수법을 사용하여 비선형 매개변수를 규명하였다. 70Hz 이하의 주파수 영역에서는 라그란지 배수법이 2차 하모닉 왜곡특성에서 상대적으로 좋은 결과를 보였으며, 3차 하모닉 왜곡특성에서는 하모닉 발란스법이 실험결과와 잘 일치하였다. 전압가진 및 전류 가진실험을 통하여, 일반화된 주파수 응답함수를 유도하였고 하모닉 왜곡 및 상호변조 특성을 고찰하였다. 고차 주파수 응답특성은 라우드스피커 비선형 매개변수의 변동에 따른 다이어프램의 비선형특성을 해석하는데 유용한 수단이 될 수 있음도 확인하였다.

### ABSTRACT

To analyze the nonlinear acoustic characteristics of a loudspeaker, we examined the nonlinear behaviors of its diaphragm analytically and experimentally. We, first, modeled the loudspeaker as a lumped system and identified the nonlinear parameters by the harmonic balance method and the Lagrange multiplier method, respectively. The former is applicable to the systems without output noises and the latter with and without output noises. Below 70 Hz, Lagrange multiplier method showed better results in the distortion characteristics of the second harmonic component. Harmonic balance method, however, agreed well with experimental results in the third harmonic characteristics. In both voltage-driven and current-driven experiments, the generalized frequency response functions(GFRF) were derived, and harmonic distortion and intermodulation phenomena were studied. It was also verified that GFRF could be a good tool in analyzing the nonlinear characteristics of a diaphragm according to the variations of nonlinear physical parameters of a loudspeaker.

### I. 서 론

오디오시스템은 방송을 수신하는 수신부와 이를 증폭하는 앰프부 및 소리를 발생하는 라우드스피커로 구성된다. 전자공학의 발달로 수신부와 앰프부는 고출력화하고 있으나 이에 따라 발생음의 찌그러짐 현상이 나타나게 되는데, 많은 경우 라우드스피커의 비선형특성에 의한 것으로 판단된다. 이러한 비선형특성이 적은 오디오시스템이 고급품으로 인식되어 지므로 오디오시스템 제작회사들은 이를 위해 많은 노력을 기울이고 있다.

라우드스피커의 비선형특성을 개선하기 위하여는 비선

형특성을 규명하고 이를 분석한 후 개선방향을 설정하게 된다. 일반적으로 비선형특성을 규명하는 방법으로는, 대상이 되는 계를 블랙박스로 가정하고 여기에 입력을 주어 발생하는 출력을 이용하는 비선형 시계열 모델링방법<sup>(1-4)</sup>과 라우드스피커를 집중질량계로 모델링하고 라우드스피커에 정현파 가진을 주어 매개변수를 규명하는 하모닉 발란스법<sup>(5-7)</sup> 및 고차 주파수응답을 이용하여 구하는 방법 등이 있다<sup>(8,9,10,11)</sup>. 시계열 모델링방법은 전압입력에 대한 변위출력을 이용한 NARMAX (Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input)법으로 이 방법은 계를 변위에 대한 다항식으로 모델링하고 모델과 시험데이터의 오차를 최소화하는 기법을 사용하므로 비선형특성을 잘 나타낼 수 있다. 그러나 전반적으로 오차를 최소화하는 방법을 사용하므로 선형특성이 실재하는 다를 수가 있다. 이를 보완하기 위해서 비선형특성이 선형특성에

\* 아주대학교 시스템공학과, 고등기술연구원

\*\* 아주대학교 기계 및 산업공학부

\*\*\* 서울대학교 조선해양공학과

접수일자 : 1998년 7월 11일

지배받는다라는 점을 이용하여 선형계를 먼저 모델링하고 비선형응답에서 선형응답의 영향을 제거하고 남은 부분에 대하여 NARMAX 법을 적용하는 연구가 수행되었으며<sup>[11]</sup> 또한 입력에 대한 변위출력인 단일 입, 출력관계에서 입력에 대한 가속도-속도-변위를 모델링하는 단일입력-다출력 모델에 대한 연구도 진행되었다<sup>[12]</sup>. 이러한 연구들은 블랙박스 모델하에서 원하는 최종 출력값을 설계하는 콘트롤 문제등에서 사용되었으며 적은 양의 실험데이터로 비선형특성을 분석할 수 있다는 장점이 있는 반면, 계의 물리적 매개변수 변동에 따른 특성해석은 기본적으로 불가능하다는 단점이 있다. 하모닉 발란스법은 계의 특성이 방정식 형태로 알려져 있고 변위의 다항식 형태로 표현할 수 있을 때에 그 계를 규명할 수 있는 방법으로 Kaizer<sup>[13]</sup>는 정적실험을 통하여 얻어진 데이터를 이용하여 라우드스피커의 선형 및 비선형 매개변수를 구한 후에 비선형 특성과 실험결과를 비교하여 최적화하는 방법으로 비선형계수들을 추정하였고, Klippel<sup>[14]</sup>은 인클로저에 장착된 라우드스피커를 대상으로 Kaizer의 해석방법을 이용하되 선형계수는 정적실험을 통하여 구하였고 비선형 매개변수는 라우드스피커를 2개의 정현파로 가진하여 얻어지는 하모닉 왜곡 및 상호변조 특성을 분석하여 구하였다. 이 계수들로 표현되는 사물변 비선형 미분방정식에 Volterra 급수 전개를 이용하여 고차 주파수응답을 구한 후 하모닉 왜곡 및 상호변조(intermodulation)분석을 수행하였다. 앞서의 연구자들은 매개변수를 정적 및 동적 방법으로 구한 후에 비선형 특성을 살펴보기 위하여 비선형 미분방정식의 해를 구하는 방법을 사용하였으며 감쇠계수, 강성계수 및 힘 요소가 변위의 다항식으로 표현 될 수 있다는 가정하에 하모닉 발란스법으로 비선형계수를 구하는 연구도 수행 되었으나<sup>[5]</sup>, 출력에 소음을 고려하지는 못하였다. Yasuda<sup>[7]</sup> 등은 비선형 매개변수 규명을 위하여 하모닉 발란스법을 이용시 출력소음이 있는 계에 대하여 발생하는 오차에 대하여 논하였고 Duffing 진자 및 2자유도 계에 대하여 개선된 방법인 통계적 접근법을 이용한 라그란지 배수법을 사용하여 좋은 결과를 얻었다. 한편, 하모닉 발란스법과 Yasuda 방법을 라우드스피커에 적용하여 규명된 비선형 매개변수들의 특성 및 비선형계에 대한 민감도 해석에 대한 연구도 최근에 수행된 바 있다<sup>[6]</sup>.

본 논문에서는 실험적인 비교분석을 위해, 하모닉 발란스법 및 출력소음이 있는 경우에도 적용할 수 있는 개선된 방법인 통계적방법을 이용하여 라우드스피커의 비선형 매개변수를 실험적으로 규명하였고, 규명된 매개변수와 조화탐사법을 이용하여 라우드스피커 비선형 미분방정식에 적용하여 일반화된 주파수 응답함수(Generalized Frequency Response Function, GFRF)를 쉽게 유도하는 방법도 제시하였다. 또한 유도된 고차 주파수응답함수를 이용하여 라우드스피커의 비선형 특성인 하모닉 왜곡과 상호변조 특성도 고찰하였다. 고차 주파수 응답함수를 이용하면 비선형 미분방정식을 직접 계산하지 않고도 라우드스피커의 물리적 매개변수 변동에 따른 비선형 특성을 빠른 시간에 파악할 수 있음을 알 수 있었다.

## II. 비선형 라우드스피커의 매개변수 규명

### 2.1 하모닉 발란스법

라우드스피커의 경우 저주파수 영역에서는 집중질량계로서 모델링을 할 수 있으며 매개변수의 비선형 특성은 대략 변위의 2차항까지를 고려하면 된다고 알려져 있다. 이러한 라우드스피커에 대한 비선형 미분방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>[5]</sup>.

$$L \ddot{x} + R \dot{x} + d(x) \dot{x} = e \tag{1}$$

$$m \ddot{x} + b(x) \dot{x} + c(x)x = d(x) \dot{x} \tag{2}$$

여기서,

$L$  : 자기 인덕턴스

$R$  : 저항

$m$  : 운동부의 질량으로 다이어프램 + 주변공기의 질량

$e$  : 가진 전압

$i$  : 전류

$x$  : 다이어프램의 변위

를 의미하며

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2, \text{ 비선형 감쇠계수} \tag{3a}$$

$$c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2, \text{ 비선형 강성계수(스프링 계수)} \tag{3b}$$

$$d(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2, \text{ 비선형 힘 요소} \tag{3c}$$

로 표현된다. 하모닉 발란스 방법용 윗 식에 적용하기 위하여 주파수 성분의 3차 하모닉 성분까지를 고려하고 입력 전압을  $e(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0 + |E_1| \cos(\omega t + \phi_{E_1}) + |E_2| \cos(2\omega t + \phi_{E_2}) \\ &\quad + |E_3| \cos(3\omega t + \phi_{E_3}) \\ &= E_0 + \frac{1}{2} (E_1 e^{j\omega t} + E_2 e^{j2\omega t} + E_3 e^{j3\omega t} \\ &\quad + E_1^* e^{-j\omega t} + E_2^* e^{-j2\omega t} + E_3^* e^{-j3\omega t}) \end{aligned} \tag{4}$$

이 되고 출력전류  $i(t)$ 와 다이어프램변위  $x(t)$ 도 같은 형태로 표현할 수 있으며 식(3) ~ (4)를 식(1), (2)에 대입하고 같은 차수의 하모닉계수를 비교하여 정리하면

$$A S = B \tag{5}$$

이 되며, 식(5)의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = [A^T A]^{-1} A^T B \tag{6}$$

여기서,

$$S = \{L R m b_0 b_1 b_2 c_0 c_1 c_2 d_0 d_1 d_2\}^T \quad 12 \times 1 \quad (7a)$$

$$A = [A_1^T \dots A_i^T \dots A_N^T]^T \quad (8 \times N) \times 12 \quad (7b)$$

$$B = \{B_1^T \dots B_i^T \dots B_N^T\} \quad (8 \times N) \times 1 \quad (7c)$$

$N$  : 가진 주파수의 경우 수

를 의미한다. 식(7a ~ c)를 보면 행렬  $A$ 와 벡터  $B$ 의 성분들은 복소수이고  $S$ 의 성분들은 실수가 되므로 식(5)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C S = D \quad (8)$$

여기서,

$$C = [C_1^T \dots C_i^T \dots C_N^T]^T \quad (16 \times N) \times 12 \quad (9a)$$

$$C_i = [Re(A_i^T) \quad Im(A_i^T)]^T \quad 16 \times 12 \quad (9b)$$

$$D = [D_1^T \dots D_i^T \dots D_N^T]^T \quad (16 \times N) \times 1 \quad (9c)$$

$$D_i = [Re(D_i^T) \quad Im(D_i^T)]^T \quad 16 \times 1 \quad (9d)$$

을 의미하며  $A_i$ 와  $B_i$ 는 참고문헌<sup>6)</sup>에 정리되어 있다. 실험의 경우수를 적절히 선택하면, 식(8)은 미지수보다 방정식의 수가 많으므로 최소자승 오차법과 같이 표현되는 식(10)을 사용하여 매개변수 벡터  $S$ 를 계산할 수 있다.

$$S = [C^T C]^{-1} C^T D \quad (10)$$

5장에서는 실험적으로 비선형 매개변수를 구하는 방법과 그 결과를 보여준다.

### 2.2 통계적 접근법

2.1절의 하모닉 발란스법은 출력에 소음이 섞여 있을 경우 매개변수 규명시에 부정확한 결과를 보일 수 있다<sup>6)</sup>. 이러한 단점을 보완하기 위하여 본 논문에서는 통계적인 접근법을 적용하였다. 이 방법은 실험에서 얻게 되는 출력 신호에 포함된 소음의 평균값이 0이고 Gauss 랜덤분포를 한다고 가정하였으며 실험 데이터의 통계적인 특성을 이용하여 최대 우도법(Maximum Likelihood Estimation, MLE)과 라그랑지 배수법(Lagrange Multiplier Method)을 사용하여 제의 비선형 매개변수를 규명하고 있다<sup>7)</sup>. 여기서는 실험에서 얻어진 출력의 시간영역 데이터인  $i(t)$ ,  $x(t)$ 에 랜덤소음 성분이 섞이게 되고 동일한 시간에서 반복적으로 데이터를 얻을 수 있는 여러 경우에  $i(t)$ ,  $x(t)$ 가 정규분포를 갖는다면  $i(t)$ ,  $x(t)$ 를 푸리에변환에 의해 주파수 영역으로 변환하여 얻은 복소 하모닉 주파수성분인  $I(f)$ ,  $X(f)$ 도 정규분포를 한다고 볼 수 있다.  $\omega_i$ 로 가진하여  $H$ 차 하모닉 성분 ( $H=3$ )까지만을 고려할 때, 출력의 복소 하모닉 성분은 다음과 같다.

$$\{Y_{ij}\} = \{Re(Y_{ik}) \quad Im(Y_{ij})\}$$

$$i=1, N, \quad j=1, 2+4 \times H, \quad k=1, H+1, \quad l=1, H \quad (11)$$

여기서,

$$Re(Y_{ij}) = (Re(X_{i1}) \quad Re(X_{i2}) \quad Re(X_{i3}) \quad Re(X_{i4}) \quad Re(X_{i5}) \quad Re(X_{i6}) \quad Re(X_{i7}) \quad Re(X_{i8}) \quad Re(X_{i9}) \quad Re(X_{i10}) \quad Re(X_{i11}) \quad Re(X_{i12})) \quad (12a)$$

$$Im(Y_{ij}) = (Im(X_{i1}) \quad Im(X_{i2}) \quad Im(X_{i3}) \quad Im(X_{i4}) \quad Im(X_{i5}) \quad Im(X_{i6}) \quad Im(X_{i7}) \quad Im(X_{i8}) \quad Im(X_{i9}) \quad Im(X_{i10}) \quad Im(X_{i11}) \quad Im(X_{i12})) \quad (12b)$$

이다. 또한 확률변수  $\{Y_{ij}\}$ 는 식(13)과 같은 Gauss 확률 밀도함수를 갖는 분포를 하는데

$$f = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{2+4 \times H} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}}} \exp \left\{ -\frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right] \quad (13)$$

여기서,

- $Y_{ij}$  :  $\{Y\}$ 의 요소로  $\omega = \omega_i$ 로 계를 가진하여 얻은 출력의  $j$ 번째 하모닉 성분
- $\bar{Y}_{ij}$  :  $\{\bar{Y}\}$ 의 요소로  $Y_{ij}$ 의 추정치
- $\sigma_{ij}^2$  :  $Y_{ij}$ 의 분산
- $N$  : 가진 주파수의 경우 수
- $H$  : 하모닉 성분의 차수

를 각각 의미한다. 많은 실험을 하게 되면  $Y_{ij}$ 는 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 를 평균값으로 하고 분산이  $\sigma_{ij}^2$ 인 정규분포를 갖게 된다. 따라서 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 는 확률  $f$ 가 최대일 때 얻어지며, 이 값은 모집단의 참값의 최적 불편 추정치(best unbiased estimate)가 된다.  $f$ 가 최대로 되기 위한 조건은 식(14)의  $T(\geq 0)$ 값이 최소가 되어야 하는데

$$T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2+4 \times H} \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \quad (14)$$

여기서,

- $N$  : 사용된 가진 주파수 경우의 수
- $H$  : 하모닉 차수

을 의미한다. 또한 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 는 다음 식을 만족하여야 하며

$$C S = D \quad (15)$$

라그랑지 함수(Lagrangian Function)  $L$ 을 정의하면 다음과 같다.

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2+4+\dots+n} \left\{ \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} + (\zeta)^T (C S - D) \quad (16)$$

여기서,  $\zeta$ 는 라그랑지 계수이다. 한편,  $L$ 을 최소화하여 규명하려는 변수들인  $\bar{Y}_{ij}$ ,  $S$  및  $\{\zeta\}$ 을 얻기 위하여 식(16)을 이들 변수들로 편미분하여 구할 수 있는데 이렇게 하여 얻은 결과 식들은 식(17)-(19)와 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{Y}_{ij}} = \frac{\bar{Y}_{ij} - Y_{ij}}{\sigma_{ij}^2} + \{\zeta\}^T \left[ \frac{\partial C}{\partial \bar{Y}_{ij}} \right] S = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = C^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \{\zeta\}} = C S - D = \{0\} \quad (19)$$

식(17)을 정리하고 확장하면

$$\{\bar{Y}\} - \{Y\} + [\sigma^2] E^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (20)$$

로 표현된다. 이것은 비선형 다중 매개변수 방정식이므로 직접 해를 구하기가 대단히 어려우므로 Gauss-Seidel 반복 대입법을 사용하여 매개변수를 구하였다. 여기서  $\{\bar{Y}\}$ ,  $S$ 의 초기치는 하모닉 발란스에서 얻은 값을 사용하여  $\{\bar{Y}\}_0$ ,  $S_0$ 로 가정하였고 식(21)의 관계로 표현될 수 있다.

$$\{\bar{Y}\} = \{\bar{Y}\}_0 + (\Delta \bar{Y}) \quad (21)$$

식(21)을 식(17)-(19)에 반복적으로 대입함으로써 라우트스피커의 비선형 매개변수 벡터  $S$ 를 구하게 된다.

### III. 라우드스피커에 대한 주파수 응답특성 해석

#### 3.1 비선형계의 일반화된 주파수 응답함수

입력이  $e(t)$ 이고 출력이  $x(t)$ 인 비선형계를 Volterra급수로 표시하면 다음과 같다<sup>15,16</sup>.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n e(t - \tau_i) d\tau_i \quad (22)$$

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n e(t - \tau_i) d\tau_i \quad (23)$$

여기서,  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ 은 1차원의 충격응답과 유사한 개념을 갖는  $n$ 차 비선형 충격 응답 또는  $n$ 차 Volterra 커널이다. 식(23)에서  $n$ 차 Volterra 커널을 다중 푸리에변환한  $n$ 차 주파수응답함수와 역 푸리에 변환한 결과는 각각 식(24)와 (25)와 같다.

$$H_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) e^{-j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2 + \dots + f_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (24)$$

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(f_1, f_2, \dots, f_n) e^{j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2 + \dots + f_n\tau_n)} df_1 \dots df_n \quad (25)$$

이 얻어지며, 식(25)을 식(23)에 대입하면

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(f_1, \dots, f_n) \prod_{i=1}^n E(f_i) e^{j2\pi f_i t} df_i \quad (26)$$

으로 표현된다. 한편, 대칭성에 의하여 일반성을 잃지 않으면서<sup>16</sup>

$$H_n^*(f_1, f_2, \dots, f_n) = H_n(-f_1, -f_2, \dots, -f_n) \quad (27)$$

이 성립하며, 대칭특성도 갖는다. 따라서,

$$H_1(-f_1) = H_1(f_1) \quad (28a)$$

$$H_2(-f_1, f_2) = H_2^*(f_1, -f_2) \quad (28b)$$

$$H_2(-f_1, -f_2) = H_2^*(f_1, f_2) \quad (28c)$$

$$H_1(f_1), \quad 0 \leq f_1 \leq \infty \quad (29a)$$

$$H_2(f_1, f_2), \quad 0 \leq f_1 \leq \infty, \quad -\infty \leq f_2 \leq \infty \quad (29b)$$

가 성립하게 된다. 예로  $H_2(f_1, f_2)$ 의 모든 특성은 식(29b)의 주파수 범위내에서 해석해도 타당하다. 조화탐사법을 사용하여 일반화된 주파수 응답함수를 해석적으로 구하는 방법은 다음과 같다. 계의 입력을  $e(t)$ 라 할 때

$$e(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{j2\pi f_i t} \quad (30)$$

로 표현되는 식(30)을 식(23)에 대입한 결과에 식(25)를 대입하고 정리하면

$$x_n(t) = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N [A_{k_1} \dots A_{k_n} H_n(f_{k_1}, \dots, f_{k_n})] e^{j2\pi(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})t} \quad (31)$$

을 얻는다.  $N = n$ ,  $A_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )이면

$$x_n(t) = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n H_n(f_{k_1}, \dots, f_{k_n}) e^{j2\pi(f_{k_1} + f_{k_2} + \dots + f_{k_n})t} \quad (32)$$

의 관계를 얻는다. 식(32)에서  $H_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 은  $n$ 개의 변수  $f_1, f_2, \dots, f_n$ 의 함수이므로 이들이 서로 다름 경우에는 전체  $n!$ 개의 형태가 존재할 수 있으며 그중 일부는

중복된 값을 가질 수도 있다. 따라서, 서로 다른  $n$ 개의 주파수들의 합인  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ 에서의  $n$ 차 주파수 응답인  $H_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 의 계수는  $n! e^{j2\pi(f_1 + f_2 + \dots + f_n)t}$ 이므로 주어진 계에서 같은 계수들로 묶어서 항등식을 풀면  $H_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 을 구할 수 있는데, 구체적인 예는 3.2절에서 논의한다. 한편, 임의의 주파수  $f_M$ 은

$$f_M = m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_k f_k \quad (33)$$

과 같이 표시할 수 있는데 여기서,  $m_i (\geq 0, i=1, 2, \dots, k)$ 은 정수이며, 벡터  $M$ 은  $M=(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 로 정의한다. 만일,  $\sum_{k=1}^k m_k = n (n > 0)$ 이면  $f_M$ 은  $H_n(f_1, \dots, f_n)$ 에 의해 만들어진  $n$ 차 출력의 주파수이고,  $H_n(f_1, \dots, f_n)$ 은  $n$ 차 주파수 응답함수이다.  $n$ 차 출력인  $x_n(t)$ 에서 주파수  $f_M$ 을 갖는 모든 항들의 값을  $x_n(t; f_M)$ 이라 놓으면<sup>[2],[6]</sup>

$$x_n(t; f_M) = n! \left[ \prod_{k=1}^k \frac{A_k^{m_k}}{m_k!} \right] H_n(m_1 f_1, \dots, m_k f_k) e^{j2\pi f_M t} \quad (34)$$

이 되는데, 여기서  $m_k \{f_k\}$ 는 동일한 주파수  $f_k$ 가  $H_n(\cdot)$ 에  $m_k$ 개 존재함을 의미한다. 따라서,  $x_n(t)$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{\text{all possible } M} x_n(t; f_M) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_k=0}^{\infty} x_n(t; f_M) \end{aligned} \quad (35)$$

일반적으로 각 항들은 겹쳐지는 주파수 성분들을 갖지 않는다. 식(35)에서  $x_n(t; f_M)$ 는 복소수 항들이지만, 복소수 공액쌍으로 존재하여  $x_n(t)$ 는 실수값을 갖는다. 식(30)을 식(34)에 대입하여 식(35)와 같이  $x_n(t)$ 를 구한후, 규명하려는 계에 대입하여  $n! e^{j2\pi(f_1 + f_2 + \dots + f_n)t}$ 의 계수를 갖는  $H_n(\cdot)$ 를 구할 수 있다. 한편 입력이 식(30)과 같이 해석적인 경우가 아닌 정현파 입력의 경우에는 참고문헌에 있다<sup>[2],[6]</sup>. 다음 절에서는 이 방법을 라우드스피커에 적용하여 1차, 2차 및 3차 주파수 응답을 구하는 방법을 기술하였다.

3.2 전압가진에 대한 변위의 일반화된 주파수 응답함수 앞에서 기술한 조화탐사법을 사용하여 라우드스피커에 대한 일반화된 주파수 응답함수를 구할 수 있는데, 전압가진에 대한 라우드스피커 다이아프램 변위의 전달함수를 구하는 과정은 다음과 같다. 식(1)과 (2)에서 전압과 변위의 관계로 정돈하면

$$\begin{aligned} & d(x) L m \ddot{x} + \{ b(x) d(x) L + d(x) m R - \dot{d}(x) L m \} \dot{x} \\ & + \{ b(x) d(x) L + c(x) d(x) L + b(x) d(x) R - b(x) \dot{d}(x) L + d(x)^2 \} x \\ & + \{ c(x) d(x) L + c(x) d(x) R - c(x) \dot{d}(x) L \} x - u d(x)^2 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

을 얻게 되고, 식(36)을 다항식으로 전개하여  $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, e$  및 각각의 곱의 3차항 이하만 고려하여 각 다항식의 계수들을 구할 수 있는데 이렇게 하여 구한 다항식은 다음과 같다.

$$\sum_i A(i) B(i) = 0 \quad (37)$$

여기서,  $A(i)$ 는  $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, e$ 의 곱으로 이루어지며,  $B(i)$ 는 라우드스피커의 매개변수들로 이루어진 함수이다. 위식에 조화탐사법을 적용하여 일반화된 주파수 응답함수  $H_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 을 구할 수 있는데 이렇게 구한 결과는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sum_i B(i) C(i) = 0 \quad (38)$$

여기서,  $C(i)$ 는 일반화된 주파수 응답함수중에서 3차까지만 고려할 때에는  $H_1(f_1), H_2(f_1, f_2), H_3(f_1, f_2, f_3)$  및  $f_1, f_2, f_3$ 로 이루어진 함수가 된다.

- 1차 주파수 응답함수  $H_1(f_1)$ 를 구하는 법  
조화탐사법을  $A(i)$ 에 적용하는데, 즉 입력전압과 출력변위가 각각  $e = e^{j2\pi f_1 t}$  및  $x = H_1(f_1) e^{j2\pi f_1 t}$ 를 대입하여  $1! e^{j2\pi f_1 t}$ 의 계수들만을 취하여 얻은  $C(i)$ 와 다항식의 계수항들인  $B(i)$ 를 식(38)에 적용하면

$$H_1(f_1) = \frac{d_0}{mLJ^3 + (b_0L + mR)J^2 + (b_0R + c_0L + d_0^2)J + c_0R} \quad (39)$$

이 얻어진다. 여기서,  $J = j\omega_i = j2\pi f_i$ 이다.

- 2차 주파수 응답함수  $H_2(f_1, f_2)$  구하는 법  
조화탐사법을  $A(i)$ 에 적용하는데, 즉

$$e = e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} x &= H_1(f_1) e^{j2\pi f_1 t} + H_1(f_2) e^{j2\pi f_2 t} \\ &+ 2! H_2(f_1, f_2) e^{j2\pi(f_1 + f_2)t} \end{aligned} \quad (40b)$$

를 대입하여,  $e^{j2\pi(f_1 + f_2)t}$ 의 계수들만을 취하여 얻은  $C(i)$ 와  $B(i)$ 를 식(38)에 대입하여 정돈한 후  $H_2(f_1, f_2)$ 를 구하면

$$H_2(f_1, f_2) = -\frac{H_1(f_1 + f_2)}{2d_0^2} \sum_{i=5}^b B(i) C(i) \quad (41)$$

이 된다. Table 1에는  $A(i)$ ,  $B(i)$  및  $C(i)$ 가 정리되어 있다.

표 1. 변위/전압의 2차 주파수응답함수를 위한 다항식의 항들의 계수들

Table 1. Coefficients and polynomial terms for the second order FRF of displacement/voltage.

No	Poly-nomial term, A(i)	Polynomial coefficient, B(i)	Coefficient of $e^{i2\pi(f_1+f_2)t}$ for A(i), C(i)
1	$x$	$c_0 d_0 R$	$2H_2(f_1, f_2)$
2	$\dot{x}$	$b_0 d_0 R + c_0 d_0 L + d_0^3$	$2H_2(f_1, f_2)(J_1 + J_2)$
3	$\ddot{x}$	$b_0 d_0 L + d_0 m R$	$2H_2(f_1, f_2)(J_1 + J_2)^2$
4	$\ddot{\ddot{x}}$	$d_0 L m$	$2H_2(f_1, f_2)(J_1 + J_2)^3$
5	$x^2$	$c_0 d_1 R + c_1 d_0 R$	$2H_1(f_1)H_1(f_2)$
6	$x \dot{x}$	$b_0 d_1 R + b_1 d_0 R + 2c_1 d_0 L + 3d_0^2 d_1$	$H_1(f_1)H_1(f_2)(J_1 + J_2)$
7	$x \ddot{x}$	$b_0 d_1 L + b_1 d_0 L + d_1 m R$	$H_1(f_1)H_1(f_2)(J_1^2 + J_2^2)$
8	$x \ddot{\ddot{x}}$	$d_1 L m$	$H_1(f_1)H_1(f_2)(J_1 + J_2)(J_1^2 - J_1 J_2 + J_2^2)$
9	$x u$	$-2d_0 d_1$	$H_1(f_1) - H_1(f_2)$
10	$\dot{x}^2$	$-b_0 d_1 L + b_1 d_0 L$	$2H_1(f_1)H_1(f_2)J_1 J_2$
11	$\dot{x} \ddot{x}$	$-d_1 L m$	$H_1(f_1)H_1(f_2)J_1 J_2(J_1 + J_2)$

$$J_1 = j2\pi f_1, \quad J_2 = j2\pi f_2$$

• 3차 주파수 응답함수  $H_3(f_1, f_2, f_3)$ 를 구하는 법  
조화탐사법을  $A(i)$ 에 적용하는데, 즉

$$e = e^{i2\pi f_1 t} + e^{i2\pi f_2 t} + e^{i2\pi f_3 t} \quad (42a)$$

$$x = H_1(f_1)e^{i2\pi f_1 t} + H_1(f_2)e^{i2\pi f_2 t} + H_1(f_3)e^{i2\pi f_3 t} + 2! H_2(f_1, f_2)e^{i2\pi(f_1+f_2)t} + 2! H_2(f_1, f_3)e^{i2\pi(f_1+f_3)t} + 2! H_2(f_2, f_3)e^{i2\pi(f_2+f_3)t} + 3! H_3(f_1, f_2, f_3)e^{i2\pi(f_1+f_2+f_3)t} \quad (42b)$$

를 대입하여,  $e^{i2\pi(f_1+f_2+f_3)t}$ 의 계수들만을 취하여 얻은  $C(i)$ 와  $B(i)$ 를 식(38)에 대입하여 정돈한 후  $H_3(f_1, f_2, f_3)$ 를 구하면

$$H_3(f_1, f_2, f_3) = -\frac{H_1(f_1 + f_2 + f_3)}{6d_0^2} \sum_{i=5}^b B(i) C(i) \quad (43)$$

이 된다. Table 2에는  $A(i)$ ,  $B(i)$  및  $C(i)$ 가 정리되어 있다.

### 3.3 전류가진에 대한 변위의 일반화된 주파수 응답함수

3.2절에서 유도한 전압가진에 대한 일반화된 주파수응답함수는 상당히 복잡한 형태를 나타내며 특히 선형(1차) 주파수 응답함수의 경우 일반적으로 예측되는 공진현상이 뚜렷이 나타나지 않으므로, 대응 방법으로 전류가진에 대한 일반화된 주파수 응답함수를 유도하였다. 앞절에서와 같은 조화탐사법을 식(2)에 적용하여 1차, 2차 및 3차 주파수 응답함수를 구하면 각각 다음과 같다.

$$H_1(f) = \frac{d_0}{m J^2 + b_0 J + c_0} \quad (44)$$

$$H_2(f_1, f_2) = -\frac{1}{2d_0} H_1(f_1 + f_2) \sum_{i=5}^b B(i) C(i) \quad (45)$$

$$= \frac{1}{2d_0} H_1(f_1 + f_2) [d_1 \{H_1(f_1) + H_1(f_2)\} - H_1(f_1)H_1(f_2) \{-b_1(J_1 + J_2) - 2c_1\}]$$

$$H_3(f_1, f_2, f_3) = -\frac{1}{6d_0} H_1(f_1 + f_2 + f_3) \sum_{i=5}^b B(i) C(i) \quad (46)$$

여기서,  $B(i)$ ,  $C(i)$ 는 Table 3에 정리되어 있다. 식(44)를 보면 전형적인 1 자유도계를 나타내며 비감쇠 공진주파수는

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_0}{m}} \quad (47)$$

로 되어 전류가진법을 사용시에  $f_0$ 에서 공진이 일어남을 알 수 있다. 전류가진에 의한 2차와 3차 주파수 응답함수인 식(45)와 식(46)을 전압가진에 대한 식(41)과 식(43)으로 각각 비교하여도 전류가진에 대한 주파수 응답함수가 간편한 형태인 것을 알 수 있다.

## IV. 하모닉 왜곡특성 해석

### 4.1 고차 주파수 응답함수를 이용한 하모닉 왜곡특성 해석

선형계에서는 입력에 대한 응답이 선형적으로 나타나고, 여러 주파수로 가진시에는 각각의 주파수로 가진한 응답들의 선형결합으로 표시할 수가 있다. 그러나, 비선형계에서는 이러한 특성들이 성립하지 않는데, 만일 입력 전압이  $e(t) = A \cos(2\pi ft + \theta)$ 일때의 하모닉 특성은 식(34)에 의하여 다음과 같은 식(48)-(50)로 표현된다.

$$x(t; f) = A |H_1(f)| \cos\{2\pi ft + \theta + \Theta_1(f)\} \quad (48)$$

$$x(t; 2f) = 0.5 A^2 |H_2(f, f)| \cos\{2\pi(2f)t + 2\theta + \Theta_2(f, f)\} \quad (49)$$

$$x(t; 3f) = 0.25 A^3 |H_3(f, f, f)| \cos\{2\pi(3f)t + 3\theta + \Theta_3(f, f, f)\} \quad (50)$$

표 2. 변위/전압의 3차 주파수응답함수를 위한 다항식의 항들의 계수들

Table 2. Coefficients and polynomial terms for the third order FRF of displacement/voltage.

No	Polynomial term A(i)	Polynomial coefficient B(i)	Coefficient of $e^{j2\pi(f_1+f_2+f_3)t}$ for A(i), C(i)
1	$x$	$c_0 d_0 R$	$6 H_3(f_1, f_2, f_3)$
2	$\dot{x}$	$b_0 d_0 R + c_0 d_0 L + d_0^2$	$6 H_3(f_1, f_2, f_3)(J_1 + J_2 + J_3)$
3	$\ddot{x}$	$b_0 D_0 L + d_0 m R$	$6 H_3(f_1, f_2, f_3)(J_1 + J_2 + J_3)^2$
4	$\ddot{\dot{x}}$	$d_0 L m$	$6 H_3(f_1, f_2, f_3)(J_1 + J_2 + J_3)^3$
5	$x^2$	$c_0 d_1 R + c_1 d_0 R$	$4(H_1(f_1)H_2(f_2, f_3) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2))$
6	$x \dot{x}$	$b_0 d_1 R + b_1 d_0 R + 2c_1 d_0 L + 3d_0^2 d_1$	$2(H_1(f_2)H_2(f_1, f_3) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2))(J_1 + J_2 + J_3)$
7	$x \ddot{x}$	$b_0 d_1 L + b_1 d_0 L + d_1 m R$	$2(H_1(f_1)H_2(f_2, f_3)(J_1^2 + (J_2 + J_3)^2) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3)(J_2^2 + (J_1 + J_3)^2) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2)(J_3^2 + (J_1 + J_2)^2))$
8	$x \ddot{\dot{x}}$	$d_1 L m$	$2(J_1 + J_2 + J_3)(H_1(f_1)H_2(f_2, f_3)(-J_1(-J_1 + J_2 + J_3) + (J_2 + J_3)^2) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3)(-J_2(J_1 - J_2 + J_3) + (J_1 + J_3)^2) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2)(-J_3(J_1 + J_2 - J_3) + (J_1 + J_2)^2))$
9	$x u$	$-2d_0 d_1$	$2(H_2(f_1, f_2) + H_2(f_1, f_3) + H_2(f_2, f_3))$
10	$\dot{x}^2$	$-b_0 d_1 L + b_1 d_0 L$	$4H_1(f_1)H_2(f_2, f_3)J_1(J_2 + J_3) + 4H_1(f_2)H_2(f_1, f_3)J_2(J_1 + J_3) + 4H_1(f_3)H_2(f_1, f_2)J_3(J_1 + J_2)$
11	$\dot{x} \ddot{x}$	$-d_1 L m$	$2(J_1 + J_2 + J_3)(H_1(f_1)H_2(f_2, f_3)J_1(J_2 + J_3) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3)J_2(J_1 + J_3) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2)J_3(J_1 + J_2))$
12	$x^3$	$c_0 d_2 R + c_1 d_1 R + c_2 d_0 R$	$6H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)$
13	$x^2 \dot{x}$	$b_0 d_2 R + b_1 d_1 R + b_2 d_0 R - c_0 d_2 L + c_1 d_1 L + 3c_2 d_0 L + 3d_0 d_1^2 + 3d_0^2 d_2$	$2H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)(J_1 + J_2 + J_3)$
14	$x^2 \ddot{x}$	$b_0 d_2 L + b_1 d_1 L + b_2 d_0 L + d_2 m R$	$2H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$
15	$x^2 \ddot{\dot{x}}$	$d_2 L m$	$2H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)(J_1^3 + J_2^3 + J_3^3)$
16	$x^2 u$	$-2d_0 d_2 - d_1^2$	$2(H_1(f_1)H_1(f_2) + H_1(f_1)H_1(f_3) + H_1(f_2)H_1(f_3))$
17	$\dot{x}^2 x$	$-2b_0 d_2 L + 2b_2 d_0 L$	$2H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)(J_1 J_2 + J_2 J_3 + J_1 J_3)$
18	$x \dot{x} \ddot{x}$	$-2d_2 L m$	$H_1(f_1)H_2(f_2)H(f_3)(J_1 J_2(J_1 + J_2) + J_1 J_3(J_1 + J_3) + J_2 J_3(J_2 + J_3))$

$$J_1 = j2\pi f_1, \quad J_2 = j2\pi f_2, \quad J_3 = j2\pi f_3$$

표 3. 변위/전류의 3차 주파수응답함수를 위한 다항식의 항들의 계수들

Table 3. Coefficients and polynomial terms for the third order FRF of displacement/current.

No	Polynomial term, A(i)	Polynomial coefficient, B(i)	Coefficient of $e^{j2\pi(f_1+f_2+f_3)t}$ for A(i), C(i)
1	$x$	$c_0$	$6H_3(f_1, f_2, f_3)$
2	$\dot{x}$	$b_0$	$6H_3(f_1, f_2, f_3)(J_1 + J_2 + J_3)$
3	$\ddot{x}$	$m$	$6H_3(f_1, f_2, f_3)(J_1 + J_2 + J_3)^2$
4	$i$	$-d_0$	0
5	$x^2$	$c_1$	$4(H_1(f_3)H_2(f_1, f_2) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2))$
6	$x \dot{x}$	$b_1$	$2(J_1 + J_2 + J_3)(H_1(f_3)H_2(f_1, f_2) + H_1(f_2)H_2(f_1, f_3) + H_1(f_3)H_2(f_1, f_2))$
7	$x i$	$-d_1$	$2(H_2(f_1, f_2) + H_2(f_1, f_3) + H_1(f_2, f_3))$
8	$x^3$	$c_2$	$6H_1(f_1)H_1(f_2)H_1(f_3)$
9	$x^2 \dot{x}$	$b_2$	$2(J_1 + J_2 + J_3)H_1(f_1)H_1(f_2)H_1(f_3)$
10	$x^2 i$	$-d_2$	$2(H_1(f_1)H_1(f_2) + H_1(f_1)H_1(f_3) + H_1(f_2)H_1(f_3))$

$$J_1 = j2\pi f_1, \quad J_2 = j2\pi f_2, \quad J_3 = j2\pi f_3$$

즉, 고차 주파수 응답함수를 이용하여 계의 하모닉 왜곡 특성을 분석할 수 있다. 하모닉 왜곡은 하나의 주파수 조제를 가진할 때, 이 주파수 성분뿐만 아니라 배수 형태의 주파수 성분이 나타나는 것으로 어느 정도의 하모닉 왜곡은 음을 풍부히 해주기도 한다. 비선형 시계열 분석법인 NARMAX법에 비해 장점으로는 물리적 매개변수 변동에 따른 비선형 주파수 응답특성을 알 수 있어서 시스템 설계시에 직접 적용할 수 있다.

비선형계의 또 다른 특성은 다중 주파수 성분의 입력이 있을 때에 각 주파수 성분간의 에너지전달 현상이 나타나게 되며 이러한 현상을 상호변조(intermodulation)라 한다. 일례로 2명의 연주자가 각각 첼로와 플루트를 연주하는 것을 녹음한 후에 이를 전체 주파수 영역에서 재생시키기 위하여 1개의 전역역(full-range) 라우드스피커로 재생할 때, 저음역의 첼로음이 고음역의 플루트와 상호변조를 일으켜 두 악기소리가 잘 구분되지 못하는 현상이 있는데 저음역이 고음역을 변조시키는 상호변조현상 때문이다<sup>17)</sup>.

#### 4.2 고차 주파수 응답함수를 이용한 상호변조 특성 해석

각각 주파수  $f_1$ 과  $f_2$ 인 정현파로 비선형계를 동시에 가진 할 때 출력은 Table 4와 같이 여러 주파수 성분들이 섞여 나오게 된다. 2차 상호변조(Im + 2)는  $f_1$ 을 특정 주파수에 고정시키고  $f_2$ 를 소인(sweep)할 때의 주파수  $f_1 + f_2$ 에서의 출력으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t; f_1 + f_2) = A_1 A_2 |H_2(f_1, f_2)| \cos\{2\pi(f_1 + f_2)t + \theta_1 + \theta_2 + \Theta_2(f_1, f_2)\} \quad (51)$$

3차 상호변조(Im + 3)는 출력 주파수  $2f_1 + f_2$  ( $f_1$ 은 고정 주파수)에서의 출력으로 정의된다. 일례로 입력이  $e(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$ 에서  $f_1$ 을 특정 주파수에 고정시키고  $f_2$ 의 함수인  $2f_1 + f_2$ 에서의 출력응답은 다음과 같다<sup>[6]</sup>.

$$x(t; 2f_1 + f_2) = 0.75 A_1^2 A_2 |H_3(f_1, f_2, f_1)| \cos\{2\pi(2f_1 + f_2)t + 2\theta_1 + \theta_2 + \Theta_3(f_1, f_2, f_1)\} \quad (52)$$

### V. 실험 및 분석

#### 5.1 선형 매개변수 규명 실험

선형 매개변수 규명을 위하여 라우드스피커에 대한 전기 임피던스 실험을 수행하였다. 다이어프램과 지지스프링으로 구성되는 1자유도 모델에서 질량 부가에 따른 공진주파수의 변화 특성을 이용하여 선형 매개변수를 규명하였다<sup>[18,19]</sup>. 부가되는 질량으로는 동전을 사용하였고, 같은 모델인 2개의 라우드스피커(모델명 SR-08B100, 임피던스 8 ohm, 공칭과워 100 Watt)를 오디오 분석기(B&K 2012)로 전기 임피던스를 측정하였으며, 개발한 분석 알고리즘을<sup>[18]</sup> 이용하여 구한 결과는 Table 4와 같다. 동일 모델에서의 매개변수 편차가 크게 나타남을 알 수 있으며, 특히 컴플라이언스 값에 많은 차이가 있음을 보여준다. 이러한 차이는 주로 제품의 생산과정중에 다이어프램 압착 및 기타 제작과정의 불균일성으로 인한 지지스프링의 변동( $3.439 \times 10^{-4} - 5.377 \times 10^{-4} m/N$ )에 원인이 있다고 판단된다. 여기서 얻은 결과를 하모닉 발산법과 통계적방법을 이용하여 규명된 비선형 매개변수와 비교하였는데(Table 5), 언급할 라그랑지법을 이용한 비선형 매개변수법 및 선형매개변수 규명법을 이용한 결과를 비교해 보면, 선형 힘 요소인  $d_0$ (자장밀도 \* 코일 길이)는 3% 정도의 오차를 보여주고 있으며 다이어프램의 질량(같이 움직이는 공기부게도 포함) 및 선형 감쇠계수는 각각 7% 및 6%의 오차로 비교적 정확한 결과를 보여준다. 반면, 감쇠계수인  $c_0$ 는 100% 이상의 오차가 나타나므로 선형 및 비선형 매개변수 규명법에 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

#### 5.2 비선형 매개변수 규명 실험

Fig. 1에서는 개략적인 실험구성을 보여주고 있다.

표 4. 모델 SR-08B100에 대한 라우드스피커 선형매개변수 추정  
Table 4. Estimation of loudspeaker linear parameters for model SR-08B100.

	Symbol, Unit	Sample 1	Sample 2
1. DC Resistance	Re, ohm	6.9	6.6
2. Resonance Frequency	Fo, Hz	62.19	49.29
3. Total Q Factor	Qts	0.37	0.28
4. Electrical Q Factor	Qes	0.39	0.30
5. Mechanical Q Factor	Qms	11.88	5.4
6. Equivalent Acoustic Compliance	Vas, Liters	35.7	55.81
7. Piston Area	Sd, m <sup>2</sup>	0.027	0.027
8. Reference Efficiency	Rcf Eff. Percent	2.12	2.18
9. Moving Mass of Diaphragm only	Mmd, g	16.5	16.82
10. Moving Mass of Diaphragm, Air load	Mms, g	19.04	19.39
11. Mass of Air load on Diaphragm	Ma, g	2.54	2.57
12. Compliance(*10e-4)	Cms, m/N	3.439	5.377
13. BL Product	BL, N/A	11.47	11.49
14. Rms	N*sec/m	0.626	1.112

표 5. 모델 SR-08B100에 대한 라우드스피커 선형 및 비선형 매개변수 추정  
Table 5. Estimation of loudspeaker linear and nonlinear parameters for model SR-08B100.

	Linear method	Nonlinear method	
	Resonant frequency method	Harmonic balance	Lagrange multiplier method
$L, H$		0.1483E-2	0.2891E-2
$R, \Omega$	6.6	0.7494E+1	0.7451E+1
$m, kg$	0.1939E-1	0.2044E-1	0.1809E-1
$b_0, N \cdot s/m$	0.1112E+1	0.8216E+0	0.1052E+1
$b_1, N \cdot s/m^2$	0	-0.1895E+2	-0.8437E+2
$b_2, N \cdot s/m^3$	0	0.4209E+5	0.9333E+5
$c_0, N/m$	0.1860E+4	0.1308E+4	0.8996E+3
$c_1, N/m^2$	0	-0.1304E+6	-0.1418E+6
$c_2, N/m^3$	0	0.2810E+8	0.4137E+8
$d_0, N/A$	0.1149E+2	0.1164E+2	0.1178E+2
$d_1, N/A^2$	0	0.8355E+3	0.8139E+3
$d_2, N/A^3$	0	-0.2308E+6	-0.2844E+6

실험 샘플로는 2번째 라우드스피커를 사용하였다. 가진 주파수는 선형 매개변수 규명 결과 공진주파수(49Hz 부근) 포함되도록 34Hz에서 96Hz까지 임의의 10가지 경우를 선정하여 전압가진법을 사용하였고 비선형 특성이 나타나도록 8 Vrms로 가진하였다. 8채널 신호분석기(SA 390)에서 정현파를 발생시키고 파워앰프(B&K 2706)로 증폭시켜서 라우드스피커에 연결하였다. 변위 측정을 위하여 레이저변위계(Keyence LC-2400A, ±8mm 측정가능)를 사용하였으며 진류는 직접 측정할 수 없으므로, 2채널 간의 전압차이를 사용된 저항값(1 ohm)으로 나누어 계산

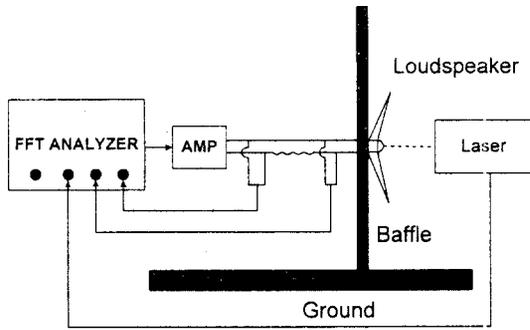
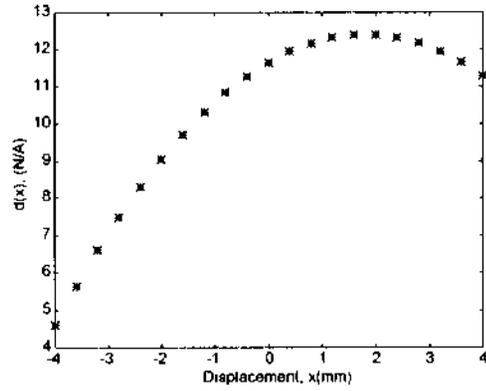


그림 1. 시험장치  
Fig. 1 Test setup.

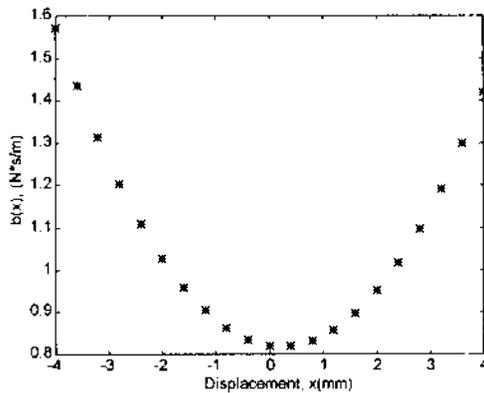
하였다. 비선형 매개 변수법을 사용하기 위하여 샘플링 주파수를 1024Hz로 하고 시간압축 데이터를 4초씩 받은 후에 푸리에변환을 통해 복소 푸리에계수를 구하여 매개 변수 규명에 사용하였다. 비선형 매개변수 규명은 하모닉 발란스법과 출력소음이 있을 경우에도 가능한 통계적방법(라그랑지 배수법)을 모두 사용하여 비교하였다. Table 5는 5.1절에서 규명한 선형 매개변수와의 비교결과를 보여준다. 강성계수를 제외하고는 비선형법으로 규명된 계수들이 선형 매개변수 규명방법의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 2에서는 규명된 감쇠계수, 강성



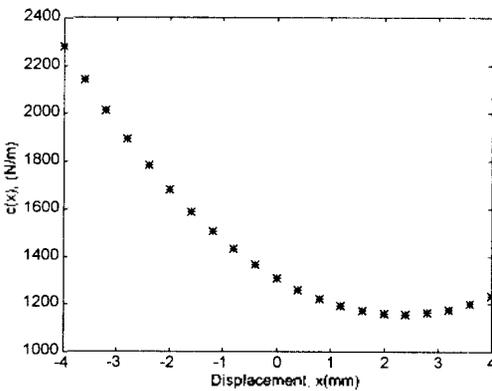
(c)

그림 2. 라그랑지 배수법으로 추정된 비선형매개변수의 동특성 (a) 감쇠 (b) 강성 (c) 힘요소

Fig. 2 Dynamic characteristic of nonlinear parameters by Lagrange multiplier method; (a) Damping, b(x) (b) Stiffness, c(x) (c) Force factor, d(x).



(a)

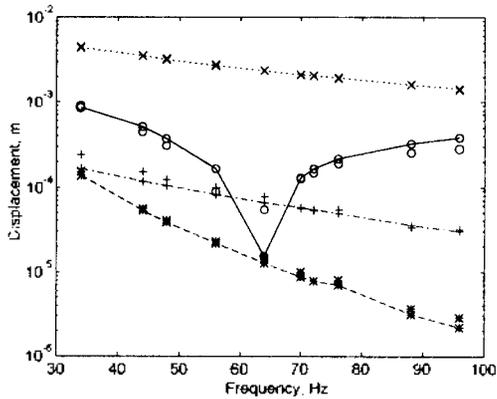


(b)

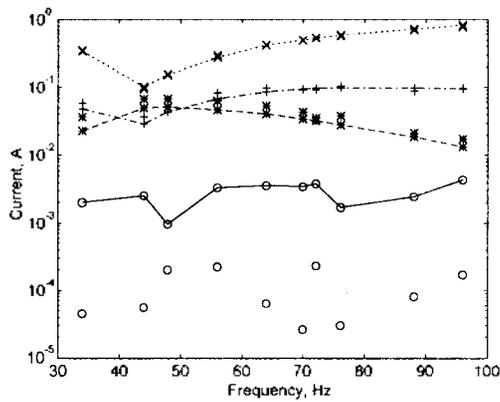
계수 및 힘 요소를 나타내고 있는데 원점에 대하여 편이 된 상태의 비선형 특성을 보여준다. Fig. 3과 4에서는 각각 하모닉 발란스법과 통계적방법으로 규명된 매개변수를 이용하여 시뮬레이션으로 얻은 하모닉 왜곡과 실험으로 얻은 결과를 보여주고 있다. 1차 하모닉 성분은 두가지 방법이 모두 잘 일치하고 있으며, 특히 70Hz(공진주파수 40Hz)이하에서는 통계적 방법이 2차 하모닉 성분 실험결과와 잘 일치하며, 3차 하모닉 성분은 하모닉 발란스법이 더 좋은 결과를 나타내고 있다.

### 5.3 비선형특성 분석

5.2 절에서는 실험으로 하모닉 발란스법과 라그랑지 배수법으로 라우드스피커의 비선형 매개변수를 규명하였는데 본 절에서는 고차 주파수 응답함수의 주파수 응답특성과 위상특성을 고찰하였다. Fig. 5는 선형 주파수응답과 비선형 매개변수법으로 규명된 선형계수들로 시뮬레이션한 결과들인데 일치하지 않는 결과를 보여준다. 이러한 현상은 비선형 매개변수 규명법에 의한 선형계수들은 선형시스템을 정확히 기술할 수 없음을 의미한다. 특히 강성계수의 경우 선형 및 비선형 규명법에서 큰 차이가 나타남을 5.2절에서 언급 하였는데, 1차 공진특성이 잘 나타나는 가진전류에 대한 다이아프램의 1차 주파수 응답함수를(Fig. 6) 보면, 선형 매개변수로 구한 공진주파수 49Hz가 비선형 매개변수를 사용 했을때에는 40Hz로 됨을 알 수 있으며, 이는 비선형 매개변수법이 실험결과와 모델과의 오차를 최소화하는 알고리즘을 사용하고 있기 때문이라 생각된다. 한편, Fig. 7과 8은 각각 전압 가진에 대한 다이아프램 변위의 2, 3차 주파수 응답함수의 대수 크기와 위상을 나타내는데 주파수 범위는 공진주파수의 3배까지를 포함할 수 있도록  $f_1$ 은 0~140Hz,  $f_2$ 는 ~140~140Hz로 하였다. 2차 하모닉 응답은 식(49)와 같이 표



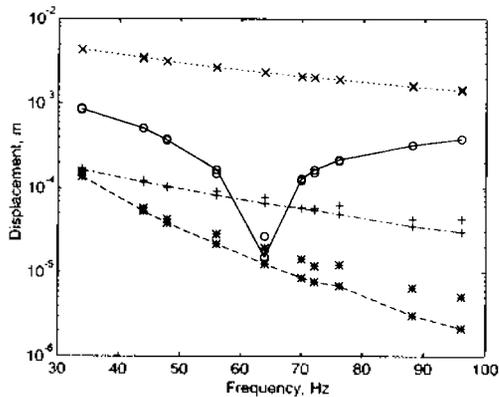
(a)



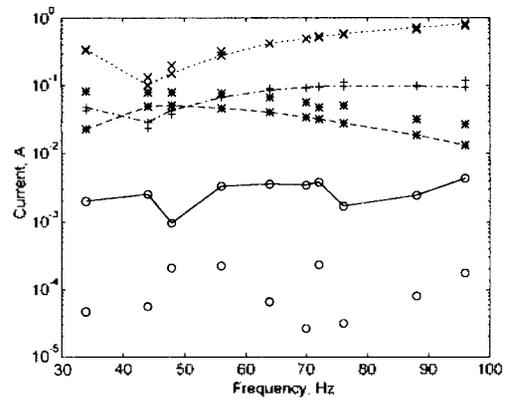
(b)

그림 3. 하모닉밸런스법으로 규명된 하모닉왜곡과 실험결과. 실험:실선 dc; 점선 기본성분; 1점쇄선 2차 하모닉; 파선;3차 하모닉, 규명: o dc; x 기본성분; + 2차 하모닉; \* 3차 하모닉 (a)변위 (b)전류

Fig. 3 Comparison of harmonic distortion with test result and identified by harmonic balance method. Test : solid dc; dotted fundamental; dashdot second harmonic; dashed third harmonic. Identified : o dc; x fundamental; + second harmonic; \* third harmonic (a)Displacement, m (b)Current, A.



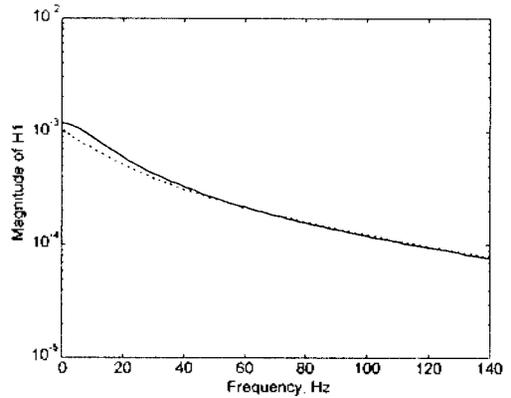
(a)



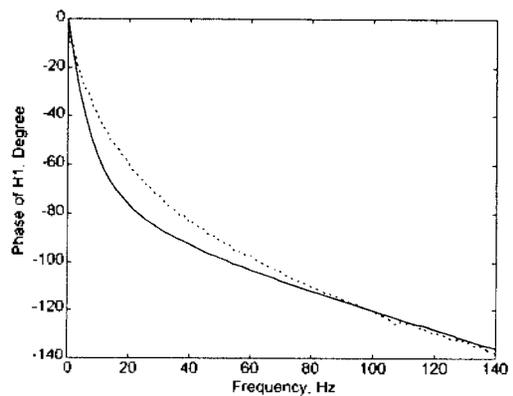
(b)

그림 4. 라그랑지배수법으로 규명된 하모닉왜곡과 실험결과. 실험:실선 dc; 점선 기본성분; 1점쇄선 2차 하모닉; 파선;3차 하모닉, 규명: o dc; x 기본성분; + 2차 하모닉; \* 3차 하모닉 (a)변위 (b)전류

Fig. 4 Comparison of harmonic distortion with test result and identified by Lagrange multiplier method. Test:solid dc; dotted fundamental; dashdot second harmonic; dashed third harmonic. Identified: o dc; x fundamental; + second harmonic; \* third harmonic (a)Displacement, m (b)Current, A.



(a)



(b)

그림 5. 선형 주파수응답함수 비교, 변위/전압. 실선 비선형 방법; 점선 선형 방법 (a) 크기 (b)위상

Fig. 5 Comparison of linear frequency response function, Displacement/Voltage. solid nonlinear method; dotted linear method (a) Magnitude of H(f) (b) Phase of H(f).

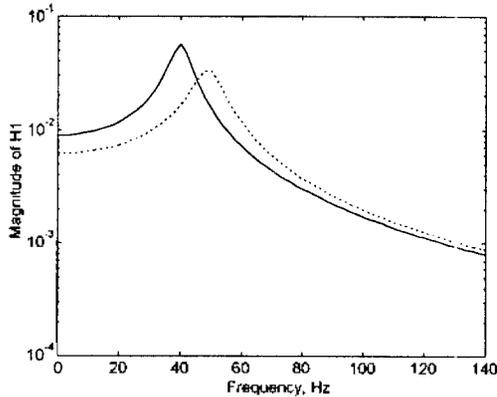


그림 6. 선형 주파수응답함수의 크기, 변위/전류. 실선 비선형 방법; 점선 선형 방법

Fig. 6 Magnitude of linear frequency response function, Displacement/Current. solid nonlinear method; dotted linear method.

시되며, Fig. 7에서 선분 OB를 따라  $|H_2(f_1, f_2)|$ 를 구하여 계수를 곱한 값이 되고, 3차 하모닉 왜곡성분은 Fig. 8에서 선분 OB'을 따라 나타나는 값인  $|H_3(f_1, f_1, f_1)|$ 에 식(50)의 계수를 곱하여 얻게 된다. 가진전류에 대한 다이아그램 변위에 대한 2, 3차 주파수 응답함수는 각각 Fig. 9 및 10과 같은데 전압가진에 대한 주파수 응답함수와 같은 방법으로 해석할 수 있다. Fig. 11에서는 전류가진에 대한 하모닉 왜곡특성을 보여주고 있는데, 2차 하모닉 왜곡은 2개의 공진을 보이고 있음을 알 수 있으며 이는 변위의 2차 다항식 형태가 존재함을 의미한다.

비선형계의 또 다른 특적인 상호변조를 고찰해 보면, 2차 상호변조는(식(51) 참조) 주파수  $f_1$ 을 공진주파수 근처의 값으로 고정시키고,  $f_2$ 를 소인하면서 측정하였을 때, 주파수  $f_1 + f_2$ 에서의 주파수응답을 나타내며, 전압가진에 대한 변위의 2차 상호변조는 Fig. 7에서 선분 CC를 따

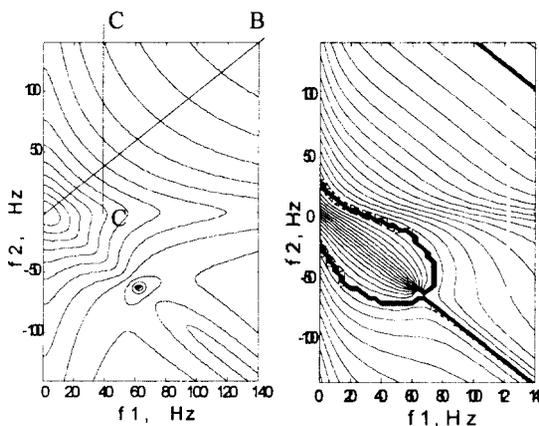


그림 7. 2차 주파수응답함수, 변위/전압 (a) 대수 크기 (b) 위상  
Fig. 7 Second order generalized FRF, Displacement/Voltage (a) Log. Mag of H2(f1, f2) (b) Phase of H2(f1, f2).

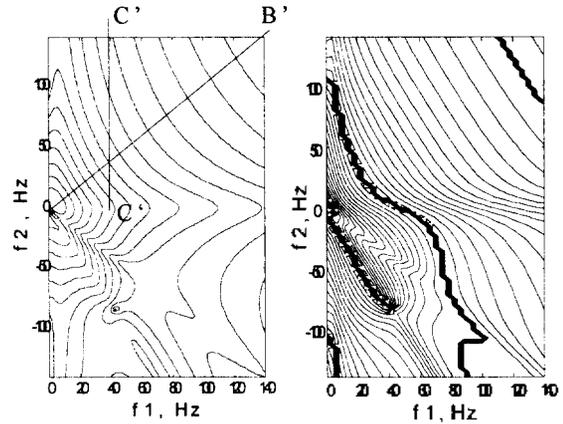


그림 8. 3차 주파수응답함수, 변위/전압 (a) 대수 크기 (b) 위상  
Fig. 8 Third order generalized FRF, Displacement/Voltage (a) Log. Mag.of H3(f1, f2, f1) (b) Phase of H3(f1, f2, f1).

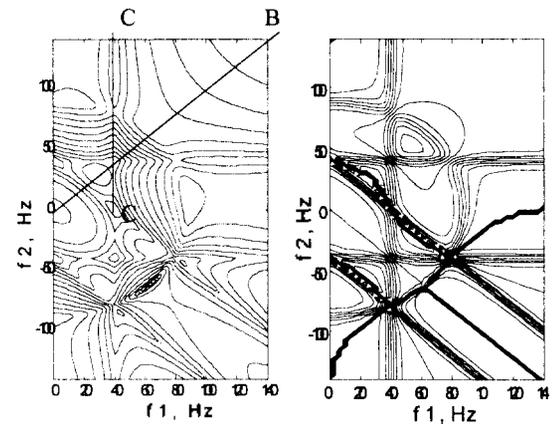


그림 9. 2차 주파수응답함수, 변위/전류 (a) 대수 크기 (b) 위상  
Fig. 9 Second order generalized FRF, Displacement/Current (a) Log. Mag.of H2 (f1, f2) (b) Phase of H2(f1, f2).

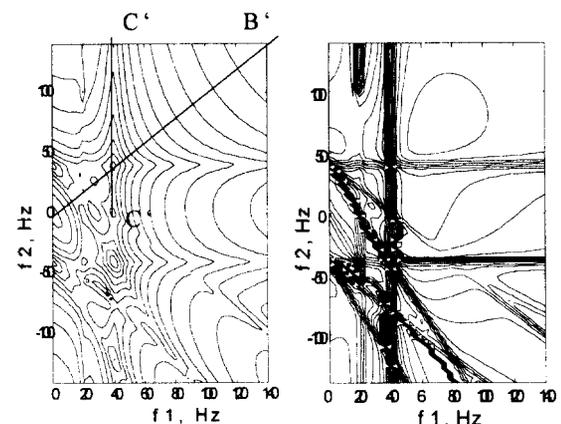


그림 10. 3차 주파수응답함수, 변위/전류 (a) 대수 크기 (b) 위상  
Fig. 10 Third order generalized FRF, Displacement/Current (a) Log. Mag.of H3 (f1, f2, f1) (b) Phase of H3(f1, f2, f1).

라 나타난다. 전압에 대한 변위의 3차 상호변조는 Fig. 8에서 선분 C'C'를 따라 나타나며 응답크기는 식(52)와 같이 계수를 곱하여 얻을 수 있다. Fig. 12에는 전압가진법으로 얻은 상호변조를 나타냈다. 전류에 대한 2차 및 3차 상호변조는 각각 Fig. 9 및 Fig. 10에서 선분 CC와 C'C'를 따라가면서 전압가진법으로 얻은 방법으로 관찰할 수 있다.

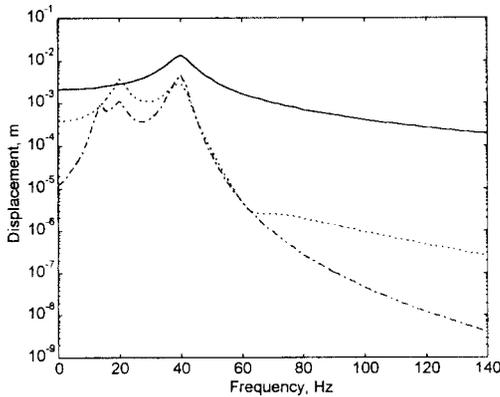


그림 11. 하모닉 왜곡 특성, 실선 기본성분; 점선 2차 하모닉; 1점쇄선 3차 하모닉  
 Fig. 11 Characteristics of harmonic distortion, solid fundamental; dotted second harmonic; dashdot third harmonic.

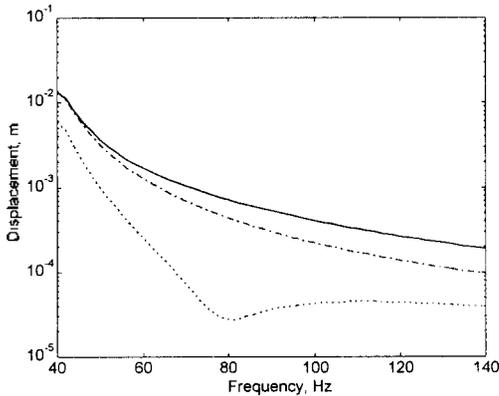


그림 12. 상호변조 특성, 실선 기본성분; 점선 2차 상호변조; 1점쇄선 3차 상호변조(f1=40Hz)  
 Fig. 12 Characteristics of intermodulation, solid fundamental; dotted second intermodulation; dashdot third intermodulation (f1=40Hz)

VI. 결 언

본 논문에서는 실험을 통하여 출력소음이 없는 경우와 있는 경우의 2가지에 대하여 각각 비선형 매개변수법인 하모닉 밸런스법과 통계적 접근법을 이용하여 비선형 매개변수를 규명하였다. 비선형 매개변수법으로 규명한 선형계수로는 선형계를 기술하는데 부정확함을 확인하였고

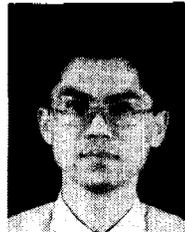
이는 비선형 매개변수법의 알고리즘에 원인이 있음을 알 수 있었으며 비선형법으로 규명된 매개변수를 활용하면 실제 비선형특성을 잘 나타낼 수 있음도 확인하였다. 한편, 라우드스피커의 방사음향이 다이어프램의 가속도에 비례한다는 사실로부터 비선형 음향특성을 파악하기 위하여 다이어프램 변위의 비선형 주파수 응답특성을 고찰하였다. 이를 위하여 일반화된 주파수 응답함수를 3차까지 전압가진 및 전류가진 되는 다이어프램 변위에 대하여 유도하였고, 비선형 특성인 하모닉 왜곡과 상호변조 특성을 고찰하였다. 실험결과와 유도된 고차 주파수 응답함수에 규명된 비선형 매개변수를 사용하여 얻은 결과는 잘 일치하였으며, 출력소음이 없다고 가정하여 사용하는 하모닉 밸런스법을 이용하여 규명한 3차 하모닉 성분은 출력소음이 있을때도 적용가능한 통계적방법을 응용한 라그랑지법 보다 실험결과에 근접함을 얻었고, 2차 하모닉 성분의 경우는 공진주파수의 약 1.5배 상도되는 70Hz까지는 라그랑지법으로 규명한 결과가 실험결과에 잘 일치함을 알 수 있었다. 물리적 매개변수로 표현된 고차 주파수 응답함수를 이용하면 라우드스피커의 물리적 매개변수의 변동에 따른 비선형 거동을 주파수 영역에서 파악하므로, 비선형 미분방정식을 시간영역에서 해석하기 위하여 Runge-Kutta법등을 사용하여 시간영역에서 해석하는 것 보다는 월등히 우수하므로 비선형특성이 적은 라우드스피커의 최적 설계에도 반영할 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. M.J.Korenberg, S.A.Billings, and Y.P.Liu, "An Orthogonal Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Stochastic System," *Int. J. Contr.*, vol. 48, pp.193-210, 1988.
2. A.Billings and K.M.Tsang, "Spectral Analysis for Nonlinear Systems, Part I: Parametric Nonlinear Spectral Analysis," *J.Mech. Sys. and Signal Process.*, vol. 3, pp.319-339, 1989.
3. S.A.Billings and K.M.Tsang, "Spectral Analysis for Nonlinear Systems, Part II: Interpretation of Nonlinear Frequency Response Function," *J.Mech. Sys. and Signal Process.*, vol.3, pp.341-359, 1989.
4. Han-Kee Jang and Kwang-Joon Kim, "Identification of Loudspeaker Nonlinearities Using the NARMAX Modeling Technique," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 42, pp.50-59, 1993.
5. Hyuk Jeong and Jeong-Guon Ih, "Harmonic Balance Method for Estimating the Nonlinear Parameters of Electrodynamic Direct-Radiator Loudspeakers," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 44, pp.245-257, 1996.
6. 박석태, 홍석원, "출력소음을 고려한 직립 방사형 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명," 한국소음진동공학회 논문집, 10권호 예정, 1998.
7. Keisuke Kamiya and Kimihiko Yasuda, "Identification of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems. (An Attempt to Improve Accuracy by Introducing a Statistical Method)," *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, vol. 57, no. 542, pp.3113-3120., 1991.
8. 이건명, "Use of Higher Order Frequency Response Functions

- for Non-Linear Parameter Estimation," 한국소음진동공학회지 제7권 제2호, pp.223-229, 1997.
9. S.J.Gifford and G.R.Tomlinson, "Understanding Multi Degree of Freedom Nonlinear Systems via Higher Order Frequency Response Functions," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp.1356-1364, 1989.
  10. D.M.Storer and G.R.Tomlinson, "Recent Developments in the Measurement and Interpretation of Higher Order Transfer Functions from Nonlinear Structures," Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 7(2), pp.173-189, 1993.
  11. K.Worden and G.Manson, "Random Vibration Analysis of a Nonlinear System Using the Volterra Series," Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp.1003-1011, 1997.
  12. Q.Chen and G.R.Tomlinson, "Parametric Identification of Systems with Dry Friction and Nonlinear Stiffness Using a Time Series Model," Tran. ASME, vol. 118, pp.252-263, 1996.
  13. A. J. M. Kaizer, "Modeling of the Nonlinear Response of an Electrodynamic Loudspeaker by a Volterra Series Expansion," J. Audio Eng. Soc., vol.35, pp.421-433., 1987.
  14. W. Klippel, "Dynamic Measurement and Interpretation of the Nonlinear Parameters of Electrodynamic Loudspeakers," J. Audio Eng. Soc., vol. 38, pp.944-955, 1990.
  15. M.Schetzen, "The Volterra and Wiener Theories of Non-linear Systems," John Wiley & Sons, 1980.
  16. S.J Gifford and G.R. Tomlinson, "Recent Advanced in the Application of Functional Series to Non-linear Structures," J. Sound and Vibration, pp.289-317, 1989.
  17. Steve Temme, "Audio Distortion Measurements," B&K the Application Note for Electro Acoustic, pp.1-19, 1995.
  18. 박식태, "자동차 오디오 시스템의 음질개선 연구," 한국소음진동공학회 추계학술대회 논문집, pp.123-129, 1995.
  19. L.L.Beranek, "Acoustics," the Acoustical Society of America, 1993

▲박 식 태(Seok-Tae Park)



1984년 2월 : 한양대학교 공과대학 기계공학과 졸업(공학사)  
 1986년 2월 : 한국과학기술연구원(KAIST) 기계공학과 졸업(공학석사)  
 1989년 6월 : 한국과학기술연구원(KAIST) 기계공학부 근무

1992년 12월 : 쌍용자동차 제품개발본부 기술연구소 소음진동팀 과장  
 1993년 1월 ~ 현재 : 고등기술연구원(IAE) 자동차기술 연구실 소음진동팀 책임연구원  
 1993년 1월 ~ 현재 : 아주대학교 시스템공학과 박사과정  
 E-mail : stpark@iae.re.kr

▲채 장 범(Jang-Bom Chai)



1984년 2월 : 서울대학교 공과대학 기계공학과 졸업(공학사)  
 1986년 2월 : 서울대학교 공과대학 기계설계학과 졸업(공학석사)  
 1993년 5월 : MIT 기계공학과 졸업(공학박사)

1993년 6월 ~ 1994년 8월 : MIT 연구원  
 1993년 7월 ~ 현재 : 아주대학교 기계 및 산업공학부 조교수  
 E-mail : jbchai@madang.ajou.ac.kr

▲홍 식 윤(Suk-Yoon Hong)

1982년 2월 : 서울대학교 조선공학과 졸업(공학사)  
 1987년 4월 : 현대중공업(주) 대리  
 1988년 8월 ~ 1992년 12월 : 펜실바니아 주립대학 음향학과 졸업(공학박사)  
 1992년 12월 ~ 1997년 2월 : 고등기술연구원 자동차기술 연구실 소음진동팀 책임연구원  
 1997년 3월 ~ 현재 : 서울대학교 조선해양공학과 전임강사  
 E-mail : syhong@gong.snu.ac.kr