

## 축방향 하중을 받는 고속 세라믹 볼베어링에 대한 EHD 윤활영역에서의 성능 해석

반종억 · 김경웅

한국과학기술원 기계공학과

### Performance Analysis of High-Speed Ceramic Ball Bearings Under Thrust Loads in EHD Lubrication

Jong-Eok Ban and Kyung-Woong Kim

Department of Mechanical Engineering, KAIST

**Abstract**—This paper presents a high-speed performance analysis of ball bearings with ceramic balls under thrust loads. The sliding velocity profiles between a ball and raceways were obtained by the 3-D quasi-dynamic equations of motion including both centrifugal force and gyroscopic moment derived by vector matrix algebra. The friction at the contact areas was obtained by the Bair-Winer's non-Newtonian rheological model and the Hamrock-Dowson's central film thickness in EHL analysis. The nonlinear equations were solved by the Newton-Raphson method and the underrelaxation iterative method. The friction torques and ball behaviors with various loads, ball materials, and contact angles were predicted by this model. It was shown that the friction torque was sensitive to thrust load and contact angle, and that the friction torque and the pitch angle of the bearing with ceramic balls are smaller than those of the bearing with steel balls.

**Key words**—ball bearing, friction torque, EHL, non-newtonian fluid, gyroscopic moment, ceramic ball.

#### 1. 서 론

앵글러콘택트 볼베어링은 롤러 베어링에 비해 강성은 다소 떨어지지만 고속 성능 면에서는 월등히 우수하여 고속 공작기계의 주축 베어링으로 널리 사용되고 있다. 특히 볼의 직경과 접촉각이 작은 볼베어링은 그리스 윤활에서도 dn치 75만 이상의 고속 운전이 가능하다. 최근에 개발된 세라믹볼을 갖는 볼베어링은 볼 재질의 낮은 밀도와 높은 강성으로 인하여 더욱 우수한 고속 고강성의 성능을 갖는다.

앵글러콘택트 볼베어링은 축방향 하중을 지지하기 위해 볼과 내외륜 구름면과의 접촉부위는 경사진 각을 갖는 구조로 되어 있으며, 이를 접촉각이라 부른다. 이 접촉각이 커질수록 더 큰 축방향 하중을 지지

할 수 있다. 그러나 이 접촉각으로 인해 볼의 자전축이 주축의 회전축과 일치하지 않게 되어 볼의 자이로스코프 모멘트에 의한 볼과 내외륜 구름면간의 미끄럼 현상이 발생한다. 이러한 현상은 볼의 질량과 접촉각이 클수록 크게 나타난다. 볼베어링을 장착한 고속 주축에는 베어링의 축방향 하중이 걸리는 범위 내에서 가능한 작은 접촉각을 갖는 베어링이 선정되어야 한다. 또한 직경이 작은 볼이나 낮은 비중의 세라믹볼을 갖는 베어링은 고속회전시에 나타나는 볼의 원심력이나 볼의 자이로스코프 모멘트와 같은 관성력이 줄어들어 베어링의 미끄럼 마찰손실을 크게 줄일 수 있다. 뿐만 아니라 세라믹볼을 장착한 볼베어링은 세라믹의 높은 탄성계수로 인하여 베어링계 전체 강성을 높일 수 있다.

접촉면에서의 베어링의 마찰토크로 인해 손실된 열은 주축계에 전달되어 열변형을 가져오고, 이로 인한 이차적인 과도한 접촉압력이 발생하여 또 다른 열을 발생시켜, 결국 주축 시스템의 한계속도를 결정하는 주요 요인이 된다. 특히 고속, 고정도를 요구하는 공작기계에서는 베어링의 기하학적 형상뿐만 아니라 설계예압, 회전속도, 사용 하중 등도 발열량을 결정하는 중요한 변수가 된다. 이러한 이유로 볼베어링의 발열을 예측하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다.

구름 베어링에 대한 연구는 Jones(1960)에 의해 볼베어링 연구로부터 시작되었다. 그 당시는 탄성유체 윤활에 대한 인식이 없어 접촉면에서의 마찰을 주로 쿨롱 마찰로만 생각하여 해석을 수행하였다. 그 후 Harris(1971)가 탄성유체윤활 이론을 적용하여 정적상태에서의 롤러 베어링에 대한 컴퓨터 코드를 만들었고, Gupta(1979)는 동적 상태에 대한 해석이 가능한 컴퓨터 코드를 만들었다[1]. Palmgren은 볼베어링의 마찰토크 식을 제안하였고, 이 식은 현재에도 마찰 예측식으로 많이 사용되고 있다. 그러나 Aihara[2]는 테이퍼 롤러 베어링에 대한 실험 및 이론 연구에서 구한 마찰토크가 Palmgren의 식으로 구한 마찰토크보다 최대 3배 정도가 됨을 밝히고, 실험치로 수정된 테이퍼 롤러 베어링의 마찰토크 계산식을 제시하였다. Aramaki 등[3]은 볼의 마찰력을 볼에 집중하중 또는 집중 모멘트로 간략화한 이론식으로 마찰토크를 계산하였다.

지금까지의 이루어진 많은 연구는 볼의 접촉면 형상 및 접촉면상의 미끄럼 상대속도 분포를 1차원으로 단순화하거나 마찰발생 기구를 쿨롱 마찰로 가정하여 볼의 마찰거동을 해석하였다. 볼베어링의 접촉면을 점 또는 평면형상으로 가정한 해석은 비교적 작은 하중이 작용한 경우에 대해서는 적용이 가능하나, 하중이 커질수록 접촉면상에 한 개 또는 두 개의 순수구름 점을 중심으로 회전 미끄럼 운동이 발생하므로 접촉면의 정확한 기하학적 모델이 필요하다. 특히 고속 볼베어링은 볼의 원심력 및 축방향 하중으로 인한 볼의 접촉면적이 클 경우, 접촉부에서의 기하학적인 구속으로 인한 미끄럼 속도와 관성력의 증가로 발생하는 자이로스토크프 모멘트로 인한 미끄럼이 전체 마찰 손실의 큰 부분을 차지하게 된다. Tzenov 등[4]은 축방향 하중을 받는 앵귤러콘택트 볼베어링에 대해, 미끄럼 마찰력이 볼베어링 형상의 비평면 접촉면 상에 작

용하는 경우에 대한 개선된 볼의 운동 모델을 제시하고, 접촉면을 미끄럼 마찰을 쿨롱 마찰로 가정하여 볼의 운동을 해석하였다. 그동안 많은 연구에서 볼의 정확한 거동을 묘사하기 위한 시도가 있었으나, 동력학적 관점에서의 볼의 3차원 운동모델에 대해 접촉면에서의 간략화된 미끄럼모델을 사용하여 베어링의 마찰 거동을 해석한 것이 대부분이다.

본 연구에서는 일정한 축방향 하중을 받는 앵귤러 콘택트 볼베어링에 대하여, 탄성유체윤활 상태에 있는 볼의 비평면 접촉부와 비뉴턴 유체의 거동을 고려한 체계적인 볼의 3차원 운동방정식 및 그 해법을 제시하고, 그 이론식을 바탕으로 하여 공작기계 주축용 고속 볼베어링에 대해 볼의 재질 및 접촉각에 따른 마찰토크 및 볼의 운동 거동에 대한 해석을 수행한다.

## 2. 이 론

### 2-1. 해석범위 및 가정

일반적으로 볼베어링의 접촉면은 긴 타원 형상을 하고 있다. 롤러 베어링의 접촉면 형상과는 달리 볼베어링의 접촉면은 접촉압력이 커지면 이 타원의 크기와 상대 곡률이 커지게 된다. 일반적으로 볼베어링의 주요 마찰기구는 접촉면 유입구에서의 유체의 압력에 의한 구름저항과 접촉면의 상대 미끄럼 운동에 의한 미끄럼 마찰로 알려져 있다. 그러나, 볼에 작용하는 하중이 큰 영역에서는 타원의 곡률로 인해 미끄럼 속도가 매우 커져 전체 마찰 중 미끄럼 속도에 의한 것이 가장 큰 비중을 차지하게 된다. 본 해석은 이와 같이 고하중 하에서 미끄럼 속도가 전체 마찰력을 거의 지배하는 경우에 대한 것으로, 여기서는 구름저항과 유체의 교반 저항 등을 무시한다. 이러한 가정은 윤활유의 교반저항을 최소로 하는 윤활방식인 오일 에어 윤활을 하는 고속 볼베어링에 대해서는 타당하다. 본 해석에 사용된 가정은 다음과 같다.

- 공기 및 윤활유의 교반 저항 및 케이지로 인한 마찰은 무시한다.
- 하중은 정적인 상태의 축방향 하중만 받는다.
- 볼과 구름면은 헤르쯔 접촉을 하며, 미끄럼 마찰은 헤르쯔 접촉 영역에서만 발생한다.
- 베어링의 탄성변형은 볼과 구름면간의 헤르쯔 접촉 중심의 최대변형으로 나타난다.

## 2-2. 접촉면의 형상 및 탄성변형

Fig. 1은 앵귤러 볼베어링의 기하학적인 접촉상태를 나타낸 것이다. 접촉면은 헤르쯔 접촉에 의해 구성되는 구름방향 및 구름직각방향으로 두 개의 곡률을 가지는 타원형상을 하고 있다. 헤르쯔 해석에서, 하중  $F_z$ 에 대한 접촉타원의 장반경  $b$ , 단반경  $a$ , 타원 중심부 최대 탄성변형  $\delta_m$ 은 다음 식으로 주어진다.

$$a = \left( \frac{6 \varepsilon F_z R}{\pi k E} \right)^{1/3} \quad (1)$$

$$b = \left( \frac{6 k^2 \varepsilon F_z R}{\pi E} \right)^{1/3} \quad (2)$$

$$\delta_m = f_c \left[ \frac{9}{2 \varepsilon R} \left( \frac{F_z}{\pi k E} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (3)$$

$$E = 2 / \left[ (1 - \nu_1^2) / E_1 + (1 - \nu_2^2) / E_2 \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (5)$$

여기서, 다음의 계수  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $f_c$ 는 Hamrock과 Brewe[5]의 식을 사용했다.

탄성유체윤활 영역에서 나타나는 압력 spike는 하중이 증가할수록 작아지게 되는데, 볼베어링과 같이 중심부 압력이 1 GPa 전후의 높은 압력에서는 거의 헤르쯔압력 분포에 가까워진다. 따라서 본 해석에서는 접촉타원면의 압력을 다음 식과 같은 헤르쯔 압력 식으로부터 구한다.

$$p(x, y) = \frac{3F_z}{2\pi ab} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

볼의 반경이  $r$ 이고, 내외륜의 구름면의 구름방향 곡률을 각각  $R_{r,i}$ ,  $R_{r,o}$ , 구름직각방향 곡률을 각각  $R_{t,i}$ ,  $R_{t,o}$ 라 할 때, 접촉부에서의 등가 곡률반경  $R_o$ ,  $R_i$ 는 다음과 같다.

$$R_{x,o} = r(R_{r,o} + r \cos \alpha_o) / R_{r,o}, \quad (7)$$

$$R_{x,i} = r(R_{r,i} - r \cos \alpha_i) / R_{r,i}$$

$$R_{y,o} = rR_{t,o} / (R_{t,o} - r),$$

$$R_{y,i} = rR_{t,i} / (R_{t,i} - r) \quad (8)$$

베어링의 볼과 구름면의 기하학적 접촉 조건은 다음

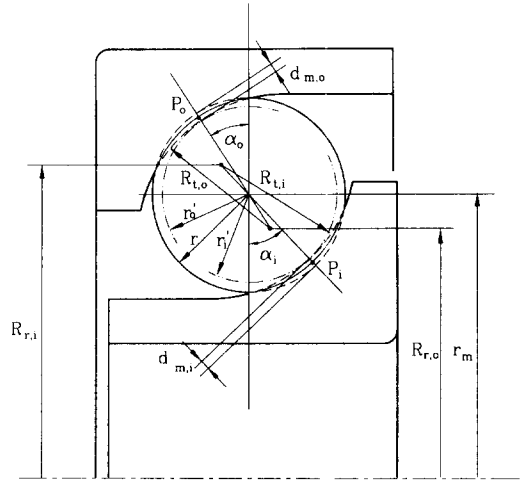


Fig. 1. Angular ball bearing geometry under thrust load.

과 같은 식으로 주어진다.

$$(R_{t,i} - r'_i) \cos \alpha_i + (R_{t,o} - r'_o) \cos \alpha_o = R_{r,i} - R_{r,o} \quad (9)$$

여기서  $r'$ 는 볼과 구름면과의 접촉면 변형을 고려한 접촉상태를 나타내기 위한 볼의 가상적인 반지름이며,  $\alpha_o$ ,  $\alpha_i$ 는 탄성변형후의 접촉각이다. 내륜 및 외륜에서의 접촉부의 변형량을 각각  $\delta_{m,i}$ ,  $\delta_{m,o}$ 라 하면, Fig. 1에서와 같이 볼의 반지름과 볼의 가상 반지름의 관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$r'_i = r - \delta_{m,i}, \quad r'_o = r - \delta_{m,o} \quad (10)$$

Fig. 2는 앵귤러콘택트 볼베어링에 볼의 접촉에 관한 좌표계를 나타낸 것이다. 헤르쯔 접촉을 하는 볼의

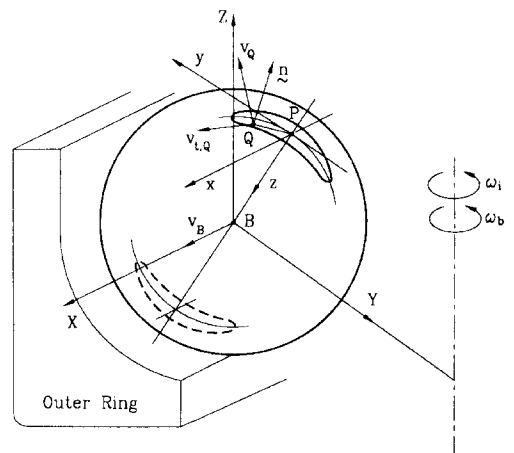


Fig. 2. Coordinate system for ball bearing.

접촉타원면에서의 접촉 중심점  $P$ 에서 접촉타원 장축의 접선방향을  $y$  축, 단축의 접선방향을  $x$  축, 볼의 중심방향을  $z$  축으로 하는 베어링의 외륜 혹은 내륜에 고정된 좌표계를  $P$  좌표계라 하고, 볼의 중심점  $B$ 에서 베어링 축방향을  $Z$ 축, 볼의 중심의 선속도 방향을  $X$ 축, 반경방향을  $Y$ 축으로 하는 볼의 중심에 대한 좌표계를  $B$ 좌표계라 한다. 내륜 접촉타원내의 임의의 한점을  $Q$ 라 하고, 볼의 중심점을  $B$ 라 하면,  $P$  좌표계로 표시한 위치 벡터  $\vec{BP}$ ,  $\vec{PQ}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{BP} = [x, y, x^2/2r_x + y^2/2r_y]^T \quad (11)$$

$$\vec{PQ} = [x, y, x^2/2r + y^2/2r - r]^T \quad (12)$$

여기서  $r_x, r_y$ 는 각각 다음 식으로 정의되는 각각 구름 방향 및 횡방향의 탄성변형시의 접촉면의 반경을 나타낸다.

$$r_x = \frac{E_1/(1-\nu_1^2) + E_2/(1-\nu_2^2)}{E_1/(1-\nu_1^2)r + E_2/(1-\nu_2^2)R} \quad (13)$$

$$r_y = \frac{E_1/(1-\nu_1^2) + E_2/(1-\nu_2^2)}{E_1/(1-\nu_1^2)r + E_2/(1-\nu_2^2)R} \quad (14)$$

### 2-3. 접촉면의 미끄럼 속도

$P$ 좌표계에서의 볼의 중심속도를  $[v_B]$ 이고, 각속도가  $[\omega] = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  일 때,  $Q$ 점에서의 속도는 다음과 같다.

$$[v_Q] = [v_B] + [\omega] \times \vec{BQ} \quad (15)$$

$Q$ 점에서 접촉면의 접선방향 속도는  $Q$ 점에서의 속도에서 접촉면의 수직방향의 속도 성분을 제거한 다음 식으로 구할 수 있다.

$$[v_{t,Q}] = [v_Q] - ([v_Q] \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (16)$$

여기서, 벡터  $\vec{n}$ 은 접촉면에 수직한 단위벡터이다. 식 (16)의  $[v_{t,Q}]$ 는 내륜 또는 외륜에 고정된 좌표계로 나타낸 접촉면의 접선방향 속도이므로 베어링의 내륜 또는 외륜의 구름면에 대한 볼의 미끄럼 속도가 된다.

외륜이 고정되어 있고 내륜의 각속도가  $\omega$ , 베어링 중심에서 볼의 중심까지의 거리가  $r_m$ , 볼의 공전 속도가  $\omega_b$ 로 운전되는 베어링계에 대하여, 볼의 중심에 대한  $B$ 좌표계에서의 각속도를  $[\omega_b, \omega_x, \omega_y]^T$ 라 할 때, 외륜 및 내륜에 고정된  $P$  좌표계로 변환된 각속도와 볼 중심의 속도는 각각 다음과 같다.

$$[\omega]_o = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_x \sin \alpha_o - \omega_z \cos \alpha_o \\ \omega_x \cos \alpha_o + \omega_z \sin \alpha_o \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[\omega]_i = \begin{bmatrix} \omega_x \\ -\omega_x \sin \alpha_i + (\omega_z - \omega_i) \cos \alpha_i \\ -\omega_x \cos \alpha_i - (\omega_z - \omega_i) \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[v_B]_o = [r_m \omega_b, 0, 0]^T \quad (19)$$

$$[v_B]_i = [r_m(\omega_b - \omega_i), 0, 0]^T \quad (20)$$

### 2-4. 미끄럼 마찰력

볼베어링은 비평면의 접촉면의 형상으로 인한 기하학적인 구속을 이기기 위해 큰 미끄럼 속도를 갖는다. 예압이나 하중이 작용하는 볼베어링의 경우에 있어서, 접촉면의 면압은 0.5에서 2.5 GPa 정도의 높은 압력을 가지므로 접촉부 유막두께는 아주 작고 접촉면에서는 미끄럼 속도는 커지게 된다. 따라서 접촉면에서의 유체의 전단력 특성이 뉴턴 유체 영역을 벗어나 비뉴턴 유체의 거동을 한다. 이러한 비뉴턴 유체의 거동에 따른 탄성유체윤활해석에 대한 많은 연구가 있었다. 선접촉을 한다고 가정된 롤러베어링의 경우는 그와 같은 탄성유체윤활 해석으로 마찰력을 구하는 것이 가능하지만, 볼베어링과 같이 볼과 내외륜의 접촉타원면에서의 한 점 또는 두 점의 순수구름을 중심으로 회전하는 미끄럼 속도 성분과 접촉타원 길이 방향으로의 미끄럼 속도 성분 등이 복합적으로 존재하는 경우에 있어서는 수치계산상 많은 어려움이 있다. 탄성유체윤활 접촉에 대한 윤활유의 거동에 있어서, 전단변형률과 전단응력과의 관계에 대해 기술한 Maxwell 모델은 다음과 같다.

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_E + \dot{\gamma}_V = \dot{\tau}/G + F(\tau) \quad (21)$$

여기서  $\dot{\gamma}_E$ 는 탄성항 전단변형률,  $\dot{\gamma}_V$ 는 점성항 전단변형률,  $G$ 는 전단탄성계수이다. 예압하중 또는 그 이상의 하중이 걸리는 앵글러콘택트 볼베어링은 접촉부의 구름속도에 대한 미끄럼 속도비가 평균 1/100 이상이므로, 전단응력은 주로 점성항에 지배된다. 따라서, 본 해석에서는 점성항의 전단변형률  $\dot{\gamma}_V$  만을 고려한다. 최근 탄성유체윤활 영역에서의 비뉴턴 유체 거동에 대해 실험적으로 잘 입증되어 있는, 다음 식과 같은 Bair와 Winer[6]의 레올로지 모델을 사용하여 전단

응력과 전단변형률과의 관계를 구한다.

$$\dot{\gamma} = -\frac{\tau_i}{\eta} \ln(1 - \tau/\tau_i) \quad (22)$$

윗 식에서  $\tau = \eta \dot{\gamma}$ 를 대입하여 유효 점도  $\eta^*$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\eta^* = \eta \left[ \frac{1 - \exp(-\lambda)}{\lambda} \right] \quad (23)$$

여기서,  $\lambda = \eta|\dot{\gamma}|/\tau_i$ 이고, 압력에 따른 한계전단응력은  $\tau_i = \tau_0 + \beta_r p(x, y)$ 이다. 여기서  $\tau_0$ 는 대기압 한계전단응력이고  $\beta_r$ 는 한계전단응력 압력비례계수이다. 유막두께는 볼의 접촉부 면적에 비해 극히 얇고, 접촉부에서는 미끄럼 운동이 크게 발생되므로, 유체의 전단 변형률은 접촉부에서의 압력 구배항에 의한 영향을 무시한 미끄럼 속도와 유막두께만의 식으로 나타낸다.

접촉타원에서는 유체는 비뉴턴 유체거동을 하지만, 탄성유체유회 해석 결과에서 유막 두께는, 접촉타원 영역에서 거의 일정하며 특히 하중이 증가할수록 중심부와 가장자리는 차가 거의 없게된다. 또한, 유막두께는 뉴턴 유체 또는 비뉴턴 유체의 거동에 따라서는 거의 변화하지 않고[7], 미끄럼 속도 성분에 대해서도 거의 변화하지 않으므로[7,8], Hamrock과 Dowson[9]의 뉴턴 유체에 대한 접촉타원의 탄성유체유회 해석에서 구한 다음과 같은 접촉면 중심부 유막두께  $h'_c$ 를 사용한다.

$$\frac{h'_c}{R_x} = 2.69U^{0.67} G^{0.53} W^{-0.067}(1 - 0.61 e^{-0.73k}) \quad (24)$$

여기서,  $W = F_z/ER_x^2$ ,  $G = \xi E'$ ,  $U = \eta_0 \tilde{u}/ER_x$ ,  $k = b/a$ 이다. 유체의 교반저항을 최소로 하기 위한 최소유회 유 공급방식을 하는 베어링의 유막두께는 유회유부족으로 인하여 유량충분 조건에서 구한 유막두께보다 작게된다. 유막두께계수  $f_H$ 를 사용하여 유막두께를  $h_c = f_H h'_c$ 로 나타낼 때, 접촉면 유입구에서 유체의 역류가 없다고 가정하는 경계조건을 사용한 연구에서  $f_H$ 는 약 0.7 정도로 보고하고 있다[10-12].

탄성유체유회에서 고하중에서도 점도를 잘 예측한다고 알려져 있는 다음의 Roelands식을 사용하여 점도를 구한다.

$$\eta = \eta_0 \{ \exp(\ln \eta_0 + 9.67[-1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p(x, y))^6]) \} \quad (25)$$

여기서  $p(x, y)$ 는 접촉면상의  $x, y$ 에서의 헤르쯔 접촉 압

력고,  $z$ 는 점도압력지수이다.

이상에서 Q점에서의 미소면적  $dx dy$ 에 작용하는 마찰력과 압력중심 P점에 대한 모멘트는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$[dF] = -\eta[\dot{\gamma}]dx dy = -\eta^* \frac{[v_{iQ}]}{h_c} dx dy \quad (26)$$

$$[dM] = \vec{PQ} \times [dF] \quad (27)$$

여기서 미소면적에 대한  $[dF]$ 와  $[dM]$ 을 전체 접촉면에 대해 적분하여, 유막력

$$[F] = [F_x, F_y, F_z]^T \quad (28)$$

와 P점에 대한 모멘트

$$[M] = [M_x, M_y, M_z]^T \quad (29)$$

를 구한다. 식 (28)에서 구한 접촉면의 수직력  $F_z$ 는 내륜에 작용하는 축방향 하중 P와 유막력  $F_y$ 로 나타낸 다음과 같은 힘의 평형식을 만족해야 한다.

$$\sum F_z = F_{z_i} \sin \alpha_i - F_{y_i} \cos \alpha_i - P_i = 0 \quad (30)$$

## 2-5. 볼의 운동방정식

볼의 접촉부에 작용하는 내륜과 외륜의 힘과 모멘트를 접촉면 중심을 원점으로 하는 P좌표계로 구한 후, 그 값을 볼의 중심에 대한 B좌표계로 변환하여 다음과 같은 볼에 대한 힘의 평형방정식을 구성한다.

$$[\Sigma F]^B = [F]^B + [F]_o^B + [F_m]^B = [0] \quad (31)$$

$$[\Sigma M]^B = [M]^B + [M]_o^B + [M_m]^B = [0] \quad (32)$$

여기서,  $[F_m]^B = [0, -mr_m \omega_b, 0]^T$  (33)

$$[M_m]^B = [I_b \omega_y \omega_b, -I_b \omega_x \omega_b, 0]^T \quad (34)$$

$$[F]_i^B = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ -F_{y_i} \sin \alpha_i - F_{z_i} \cos \alpha_i \\ -F_{z_i} \sin \alpha_i + F_{y_i} \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[F]_o^B = \begin{bmatrix} F_{x_o} \\ F_{y_o} \sin \alpha_o + F_{z_o} \cos \alpha_o \\ F_{z_o} \sin \alpha_o - F_{y_o} \cos \alpha_o \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[M]_i^B = [M]_i^B + \vec{BP}_i \times [F]_i^B \quad (37)$$

$$[M]_o^B = [M]_o^B + \vec{BP}_o \times [F]_o^B \quad (38)$$

이다. 여기서,  $m_b$ 는 볼의 질량,  $I_b$ 는 볼의 극관성 모멘

트,  $\omega_b$ 는 볼의 공전 각속도,  $[F_m]$ 는 볼의 원심력,  $[M_m]$ 는 볼의 자이로스코프 모멘트이다.

2-6. 수치 계산

식 (9), (30), (31) 및 (32)의 8개의 방정식에서 8개의 미지수  $\omega_b, [\omega], F_{z,b}, F_{z,o}, \alpha_i, \alpha_o$ 를 구한다. 전체 방정식이 비선형이므로 수치계산에서 수렴성 향상을 위해 뉴턴-랩슨법으로 미지수를 구한다. 식 (9), (30)에서 구한  $\alpha_o, F_{z,b}$ 를 식 (31), (32)에 대입하여 6개의 방정식에서 6개의 미지수  $\omega_b, [\omega], \alpha_i, F_{z,i}$ 를 구한다. 부하벡터  $[H]$ 와 미지수  $[u]$ 는 다음과 같다.

$$[H] = [\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z]^T \quad (39)$$

$$[u] = [\omega_b, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha_o, F_{z,i}]^T \quad (40)$$

미지수  $[u]$ 는 다음 식과 같이 뉴턴-랩슨법을 사용하여 구한다.

$$[H] + \frac{\partial [H]}{\partial [u]^T} [\Delta u] = [0] \quad (41)$$

$[u]$ 를 구한 후 식 (9), (30)에 대입하여 SUR(successive underrelaxation)반복법으로 수렴시켜 최종적으로 8개의 미지수  $[u], \alpha_i, F_{z,i}$ 를 구한다.

이상에서 주어진 베어링 형상에 대하여, 내륜의 축방향 하중과 축의 회전수를 알면 볼의 속도, 볼의 각속도 등을 구할 수 있다. 접촉각과 접촉중심에서의 마찰력과 모멘트로부터, 외륜에 작용하는 마찰토크는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$T_o = M_{y,o} \cos \alpha_o - M_{z,o} \sin \alpha_o - F_{z,o} (r_m + r \cos \alpha_o) \quad (42)$$

3. 결과 및 고찰

수치계산에 적용한 해석대상 베어링은 NT40번의 공구를 장착하는 고속용 머시닝 센터나 밀링 머신에서 가장 많이 사용되는 내경 65 mm인 고속용 볼베어링이다. 볼직경은 7.938 mm, 무부하 접촉각은  $\alpha = 15, 25$ 도, 접촉곡률비  $f = R_i/2r = 0.52$ , 세라믹볼의 탄성계수는 314 GPa, 비중은 3.19, 내외륜과 강구의 탄성계수는 208 GPa, 비중은 7.8이다. 윤활유의 물성치는  $\eta_o = 0.022$  Pa·s,  $\tau_o = 15$  MPa,  $\beta_f = 0.05$ ,  $z = 0.76$ 을 사용하였다

Fig. 3은 무부하 접촉각이 15도인 베어링에서 볼과 구름면간의 접촉부 변형을 무시한 경우와 변형을 고

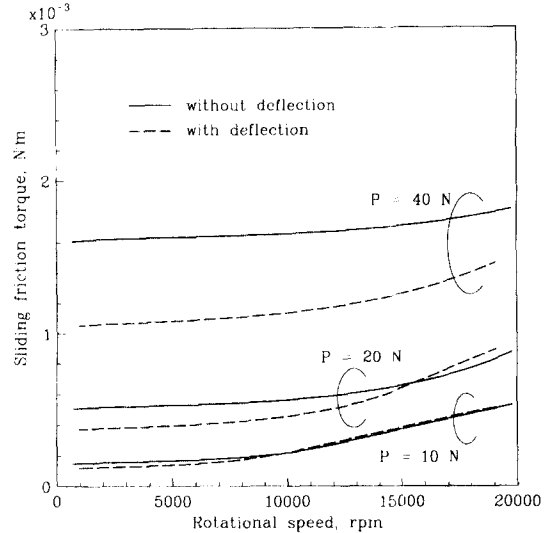


Fig. 3. Effect of deflection on sliding friction torque in contact areas. ( $\alpha = 15^\circ$ )

려한 경우에 대한 미끄럼 마찰토크를 비교한 것이다. 하중 P는 베어링의 볼 한 개당 축방향 하중이다. 변형을 고려하지 않는 경우가 하중이 증가할수록 미끄럼 마찰토크가 크게 증가하였다. 특히 하중이 작은 경우 고속 영역에서는 접촉부 변형을 무시한 경우보다 높은 미끄럼 마찰토크를 나타내었다. 접촉부 변형을 고려하는 경우는, Fig. 1에서와 같이 하중의 증가에 따라 접촉면의 탄성변형으로 인해 볼의 직경이 상대적으로 작아지는 기하학적 효과로 인해 접촉각이 크게 된다. 접촉각의 증가로 인해 접촉면의 압력이 낮게 되어 미끄럼 마찰토크가 줄어든 결과이다.

Fig. 3에서의 접촉부의 변형을 고려한 하중 20 N의 경우에 대한 미끄럼 속도 분포를 Fig. 4에 나타내었다. 이 경우 15000 rpm 근처에서 미끄럼 마찰토크의 변화가 크게 나타나고 있다. 그림(a)와 같이 12000 rpm에서는 순수 구름이 일어나는 미끄럼 속도 0인 지점이 내외륜의 접촉면 각각에서 두 곳이 나타냈다. 18000 rpm인 그림(b)에서 내륜쪽에 순수 구름점이 한 곳에 나타났고, 외륜쪽 접촉면에서는 볼의 자이로스코프 모멘트에 의한 타원길이 방향의 미끄럼 운동이 발생함을 보여주고 있다. 이것으로 마찰토크의 급증 현상은 볼의 자이로스코프 모멘트에 기인한 것으로 볼 수 있다.

Fig. 5는 무부하 접촉각 25도인 경우, 여러가지 축방향 하중에 대하여 회전수에 변화에 따른 미끄럼 마

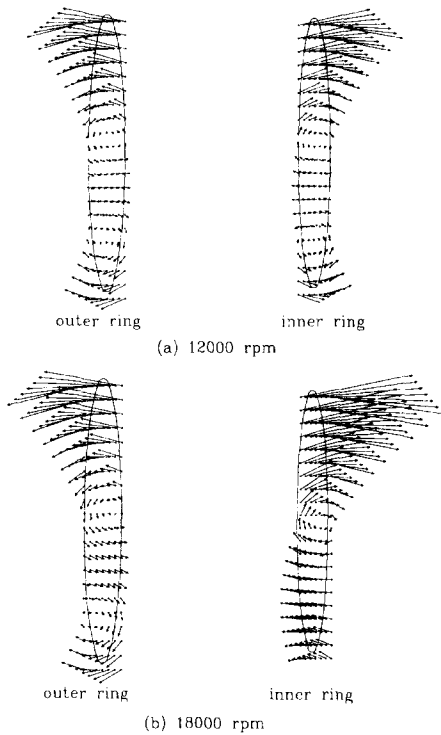


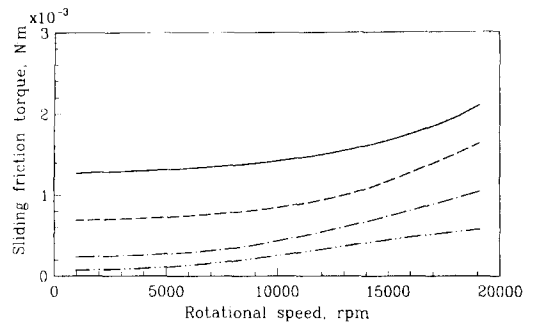
Fig. 4. Sliding velocity in contact area. (P=20 N,  $\alpha=15^\circ$ )

찰토크 및 피치각을 나타낸 것이다. 여기서 피치각은 볼의 자전축과 공전축이 이루는 각을 YZ 평면상에 투영한 값으로 정의하며, 다음과 같은 식으로 나타낸다.

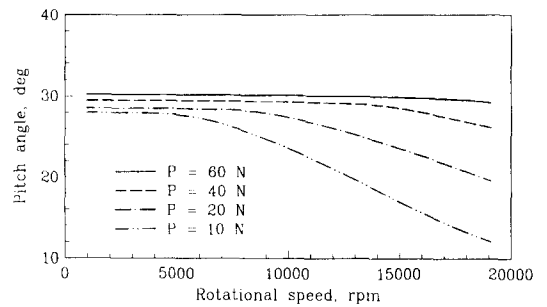
$$\beta_y = \tan^{-1}(\omega_y / \omega_z) \quad (43)$$

하중이 커질수록 미끄럼 마찰토크가 크게 증가하였고, P=10 N의 경우는 약 5000 rpm에서, 40 N의 경우는 13000 rpm 정도에서 마찰토크가 급격하게 증가하였다. 이러한 마찰토크 변화는 피치각 변화와 거의 일치하였다. 축의 회전수가 증가함에 따라 자이로스코프 모멘트가 커지게 되어 볼은 접촉부에서의 마찰력에 의한 구속에서 벗어나 미끄러지게 된다. 그러나 하중이 증가하면 접촉면적 및 마찰력이 증가하여 자이로스코프 모멘트에 의한 영향은 상대적으로 줄어들게 된다. P=10 N의 하중을 가한 경우는 볼의 피치각이 0도로 가까워지면서 점차 마찰토크의 증가치가 줄어들을 수 있다. 이는 볼의 자전축과 공전축이 서로 평행한 상태에 가까워지면서 볼에 작용되는 자이로스코프 모멘트는 더 이상 증가하지 않게 됨을 보여준다.

Fig. 6은 무부하 접촉각 15 도인 경우, 여러가지 축



(a) Sliding friction torque

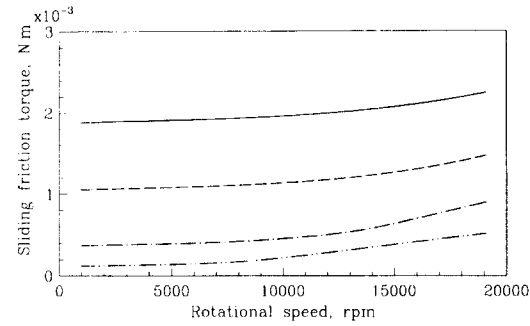


(b) Pitch angle

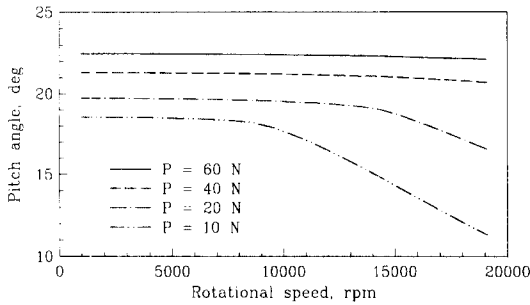
Fig. 5. Sliding friction torque and pitch angle vs. rotational speed for various thrust loads. ( $\alpha=25^\circ$ )

방향 하중에 대하여 회전수에 변화에 따른 미끄럼 마찰토크 및 피치각을 나타낸 것이다. 하중이 커질수록 미끄럼 마찰토크가 크게 증가하였는데, P=10 N의 경우는 약 9000 rpm 정도에서, P=40 N의 경우는 14000 rpm 정도에서 마찰토크가 급격하게 증가하였다. 마찰토크의 급증 시점과 피치각 변화는 거의 일치하였고, 피치각의 변화 시점은 Fig. 5의 경우 보다 더 높은 회전수에서 나타났다. 이처럼 작은 접촉각을 갖는 베어링은 축방향 하중에 대한 접촉면의 압력이 크게 증가하여 전체 마찰토크가 커짐을 알 수 있다. 그러나 낮은 하중의 경우, 접촉각이 작은 경우는 높은 회전수에서 자이로스코프에 의한 영향으로 인하여, Fig. 5의 경우와 같이 접촉각이 큰 경우보다 고속에서 작은 미끄럼 마찰토크를 나타냈다. 따라서 접촉각이 작은 볼베어링에 적절한 축방향 하중이나 예압을 설정하면 초고속 운전영역에서도 미끄럼 마찰토크를 낮출 수 있다.

고속 고강성이 요구되는 주축에는 강구보다 세라믹 재질의 볼을 장착한 베어링이 많이 사용되고 있다. 이러한 재질의 볼은 높은 탄성계수로 인해 베어링의 강



(a) Sliding torque



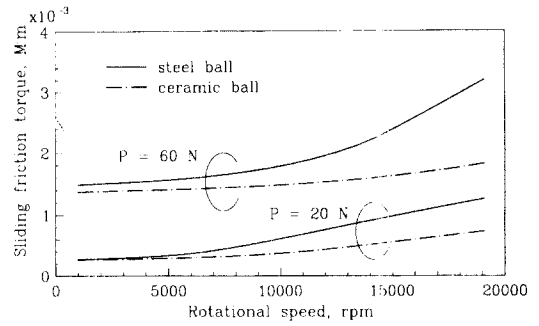
(b) Pitch angle

Fig. 6. Sliding friction torque and pitch angle vs. rotational speed for various thrust loads. ( $\alpha=15^\circ$ )

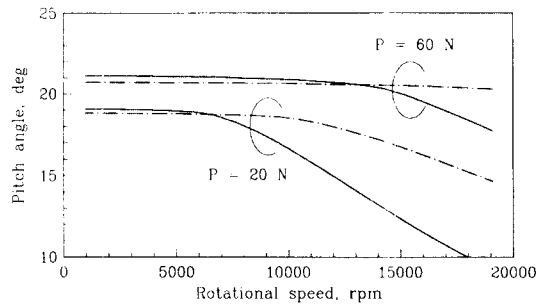
성을 크게 할 수 있고, 그리고 비중이 작아 볼의 원심력 및 자이로스코프 모멘트가 작게 발생하여 고속 회전시에도 미끄럼 마찰에 의한 동력손실을 크게 줄일 수 있다. Fig. 7은 무부하 접촉각이 15 도인 강구 볼베어링과 세라믹볼 볼베어링의 미끄럼 마찰토크 및 볼의 피치각을 나타낸 것이다. 저속 구간에서는 두 베어링의 마찰토크는 작았으나 고속 영역으로 갈수록 세라믹볼을 갖는 볼베어링이 강구를 갖는 볼베어링에 비해 약 반정도로 낮은 마찰토크를 나타내었다.

#### 4. 결 론

볼베어링의 볼의 운동을 해석을 함에 있어서, 탄성 변형된 볼의 접촉면에서의 비뉴턴 유체에 대한 탄성 유체윤활 특성과 볼의 원심력 및 자이로스코프 모멘트 항을 고려한 준동적 3차원 볼의 운동 모델을 제시 하였으며, 그에 따른 볼베어링의 마찰 모멘트와 볼의 운동거동을 관찰해 보았다.



(a) Friction torque



(b) Pitch angle

Fig. 7. Comparison of bearings with steel balls and with ceramic balls on sliding friction torque and pitch angle. ( $\alpha=15^\circ$ )

3차원의 벡터를 이용하여 체계적인 방법으로 유도된 볼의 준동적 모델을 유도하였고, 그 비선형 방정식은 뉴턴-랩슨법으로 저하중에서 고하중까지 모든 영역에서 계산의 불안정성이 없었다. 종래의 볼의 거동 해석에서 도입된 볼의 미끄럼현상에 대한 내외륜의 구름면 지배라는 가정과 여러가지의 마찰계수의 설정 등이 필요 없이, 유체의 물성치와 베어링의 기하학적 치수만으로 유도된 8개의 비선형 연립방정식으로부터 볼의 거동을 빠르고 정확히 계산할 수 있었다. 제시한 모델을 사용하여 고속용 볼베어링의 볼의 재질과 접촉각에 따른 마찰토크 해석을 수행한 결과, 접촉각이 작은 경우는 축방향 하중의 증가에 따라 미끄럼 마찰토크가 크게 나타났으나, 저하중의 고속영역에서는 접촉각이 큰 경우가 작은 경우보다 더 큰 마찰토크를 나타냈다. 세라믹볼을 사용한 볼베어링이 강구를 사용한 볼베어링에 비해 볼의 원심력과 자이로스코프 모멘트에 의한 영향이 작아 미끄럼 마찰토크가 크게 줄어들었다.



## 참 고 문 헌

1. B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill, Inc., pp. 573-574, 1994.
2. S. Aihara, "A New Running Torque Formula for Tapered Roller Bearings Under Axial Load," *ASME Journal of Tribology* Vol. 109, pp. 471-478, 1987.
3. H. Aramaki, Y. Shoda, Y. Morishita, and T. Sawamoto, "The Performance of Ball Bearings With Silicon Nitride Ceramic Balls in High Speed Spindle for Machine Tools," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 693-698, 1988.
4. P. I. Tzenov and T.S. Sankar, "An Improved Model for Nonplanar Contact Sliding in Ball Bearings," *ASME Journal of Tribology*, Vol 116, pp. 219-224, 1994.
5. B. J. Hamrock and D. E. Brewe, "Simplified Solution for Stresses and Deformations," *J. of Lubr. Techno.*, Vol. 105, pp. 171-177, 1983.
6. S. Bair and W. O. Winer, "A Rheological Model for EHL contacts based on Primary Laboratory Data," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 101, pp. 258-265, 1979.
7. M. M. Khonsari and D. Y. Hua, "Generalized Non-Newtonian Elastohydrodynamic Lubrication," *Tribology International*, Vol. 26, pp. 405-411, 1993.
8. O. B. Jacobson, *Rheology and Elastohydrodynamic Lubrication*, Elsevier, Amsterdam, pp. 289-309, 1991.
9. B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill, Inc., pp. 474, 1994.
10. S. Aihara and D. Dowson, "A Study of Film Thickness in Grease Lubricated Elasto-hydrodynamic Contact," *Proc. of the 5th Leeds-Lyon Symposium*, pp. 104-115, 1978.
11. T. A. Harris, *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley & Sons, New York, pp. 370, 1984.
12. P. G. Goksem and R. A., Hargreaves, "The Effect of Viscous Shear Heating on Both Film Thickness and Rolling Traction in an EHL Line Contact-Part II: Starved Conditions," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 100, pp. 353-358, 1978.