학술기사

카오스 시스템 일반

김 형 수 (한국건설기술연구원 수자원연구실 선임연구원)

1. 동역학의 역사

카오스 시스템은 시간에 따라 변화하는 동역학의 한 분야이다. 오늘날 동역학(dynamics)은 모든 분야에서 응용되어지고 있으나 원래 물리학의 한 분야로써 발전 되어왔다. 뉴턴은 미분 방정식을 만들고 운동과 중력의 법칙을 발견, 이들을 조합하여 케플러(Kepler)의 천체운동의 법칙(특히 지구와 태양의 운동)을 설명하였다. 이후, 많은 수학자 그리고 물리학자들은 뉴턴의 방법들을 이용하여 지구, 달, 그리고 태양들에 대한 세 개의 천체운동을 해결하기 위하여 노력하였으나 명확한 공식을 찾는데 실패하였다.

1800년대 후반, Poincare는 정량적인 방법이 아닌 정성적인 방법을 이용하는 새로운 관점을 소개하였다. 그는 시간에 따른 천체들의 정확한 위치를 찾는 대신에 다음과 같은 의문점을 제기하였다. 즉, "태양계는 영원히 안정되어 있는가? 아니면 운동을 하던 천체들중 일부는 결국 서서히 사라지지 않는가?" 이러한 의문점들을 해결하기 위하여 그는 기하학적인 접근을 시도하였으며 이는 현대 동역학의 발전에 커다란 분수령이 되었다. 그는 또한 어떤 확정론적 시스템은 초기조건에 민감한 의존성을 가지는 비주기성을 나타내며 결국 장기예측이 불가능 하다는 카오스 시스템에 대한 가능성을 제시하였다.

그러나 20세기 중반까지도 카오스에 대한 연구는 등한시 되었다. 대신에 물리학과 공학 분야에서는 비선형 진동자와 그의 응용에 대한 동역학의 연구에 몰두하였으며, 그 결과를 라디오, 레이다, 레이저 등의 개발에 이용하였다. 비선형 진동자의 이론적인 측면에서 새로운 수학적인 기법들이 개발되었으며, van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson, Smale과 같은 선구자들이 나타났다. Poincare의 기하학적 방법에 대한 보다 더 깊은 연구 또한 Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser등과 같은 학자들에 의해 수행되어 왔다.

1950년대 컴퓨터의 발명은 동역학의 발전에 중대한 분기점이 되었다. 전에는 불가능하게 생각 되었던 방정식들에 대한 실험이 가능하게 되었으며 비선형 시스템에 대하여 보다 더 깊은 직관을 가지게 되었다. 이러한 컴퓨터 실험에 의해 Lorenz는 1963년 이상한 어트랙터(strange attractor)를 갖는 카오스 운동을 발견하였다. 그는 기상조건을 3개의 독립 변량으로 단순화 시킨 한 기상 모델의 방정식들로부터 기상 예측에 대한 정도를 알아보기 위해 실험을 하였다. Lorenz는 방정식들의 해(solutions)가 평형 상태나 주기적인 상태로 풀려지지 않고 불규칙적이고 비주기적으로 계속해서 운동함을 발견하였다. 아주 미세한 차이를 가진 두 값을 초기 조건으로 부여하고 모델을 시뮬레이션 했을 때 그 결과의 거동은 곧 아주 다른 형태로 전개되었다. 이것은 시스템의 장기예측이 불가능함을 말해 준다. 그러나 Lorenz는 카오스에 어떤 구조가 내재 되어 있음을 알았다. 그는 방정식들로부터 얻은 결과를 3차원 공간에 그렸을 때 나비 모양을 갖는 점들의 집합이 형성된다는 것을 보였으며, 나비 모양 표면이 무한히 복잡한 점들의 집합으로 구성되어 있다고 생각하였다 (그림 1). 이러한 생각은 오늘날 프렉탈(fractal)의 한 예로 받아 들여지고 있다.

Lorenz의 연구는 1970년대에 들어서서 큰 반향을

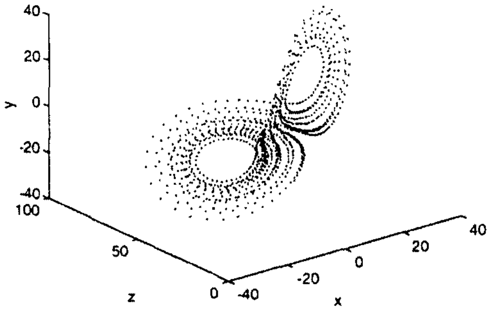

그림 1. Lorenz 시스템의 이상한 어트랙터

불러 일으키기 시작했다. 1971년 Ruelle과 Takens는 이상한 어트랙터를 근거로 유체의 난류현상에 대한 새로운 이론을 제안하였고, 몇 년 뒤에 May는 집단 생물학에서 일어나는 반복적인 사상(iterative mapping)으로부터 카오스 현상을 발견하였고, 고전적인 교육으로부터 고정 될 수 있는 선형적인 직관력보다 단순한 비선형 시스템에 대한 교육적인 중요성을 강조하는 논문들을 발표하였다. 물리학자인 Feigenbaum은 시스템이 규칙적인 거동으로부터 카오스적인 거동으로 변환할 때 어떤 보편성의 법칙이 있음을 발견하였다. Gollub, Libchaber, Swinney, Linsay, Moon, Westervelt등과 같은 많은 학자들은 여러 분야에서 새로운 아이디어를 가지고 카오스 현상을 시험하고 연구하였다. 1980년대부터 많은 사람들이 카오스에 대해 커다란 관심을 가지고 연구를 하고 있으며 오늘날 모든 분야에서 활발한 연구가 진행되고 있다.

2. 카오스 시계열

2.1 시계열의 동역학적 재건

시계열의 동역학적 재건을 위한 초기 연구는 미국 산타크루즈에 있는 동역학계 집단에 의해 1970년대 말부터 수행되었다. Gleick에 의해 쓰여진 것 처럼 대부분의 카오스 동역학 연구는 기 시스템들의 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 이루어져 왔다. 그러나 실제 자연현상에서 카오스 시스템을 어떻게 탐구할 수 있는가 하는 의문은 풀리지 않고 있었다. 이것은 실제 시스템에 어떻게 동역학적 개념을 응용할 수 있는가 하는 어려움 때문이었다. 산타크루즈에 있던 Packard, Crutchfield, Farmer, Shaw는 '어떤 관측 또는 실험으로부터 얻은 자료값들이 카오스 시스템으로부터 발생 되었다고 말할 수 있는가 ?' 라는 문제에 관심을 가졌다. 어떤 관측된 값들은 단일 변량의 유한 시계열이라 말할 수 있다. 즉, 관측된 유량의 유한 시계열 x(1), x(2), …, x(n)을 단일 변량 x로 나타낼 수 있다. 그러나 이 변량 x는 y, z와 같은 미지의 다른 독립된 변량들과 함께 구성된 완전한 시스템인 어떤 동역학계로부터 발생되었다고 말할 수 있는가 하는 문제이다. 특히, Packard 등은 다차원의 복잡한 비선형 동역학계가 이러한 단일 변량의 유한 시계열로부터 재건 되어질 수 있는가? 라는 문제를 연구하였다. 처음에 이러한 문제를 푼다는 것은 성공할 것 같지 않았다. 어떻게 다차원의 변량들에 의해 구성된 동역학계에 대한 정보가 단일 변량으로부터 회복될 수 있는가 ? 만약 샘플링(sampling)된 자료를 가지고 있다면 다차원에 의해 이루어진 동역학계의 자유도에 대한 정보를 얻을 수 없지 않는가 ?

그러나 때때로 비선형 시스템의 놀라운 성질들은 많은 유연성을 가지고 있다. 변량들 자체의 상호작용(self-interactions) 또는 서로의 상호작용(mutual-interactions)을 나타내는 시스템은 한변량이 다른 변량에 영향을 끼칠지도 모르며 이것은 1차 자유도 이상의 정보를 제공할 수도 있을 것이다. 따라서, 단일 변량의 관측된 시계열은 어떤 다 차원 동역학계의 자유도에 대한 정보를 제공할 수 있을 것이다.

Packard등은 이러한 아이디어를 가지고 단일 변량으로부터 복잡한 동역학계에 대한 정보를 재건하는 방법을 개발하였다. 시간 지체법(the method of delays)이라 불리우는 이 방법은 1980년 Physical Review Letters에 게재되었다. 간단히 이 방법을 설명해보자. 어떤 다 차원의 동역학계로부터 유량 시계열 x(1), x(2), …, x(n)의 단일 변량이 발생되었다고 하자. 만일 유량 시계열이 3차원의 변량에 의해 발생되었다고 가정하고 3차원 공간 좌표계에서 3차원 동

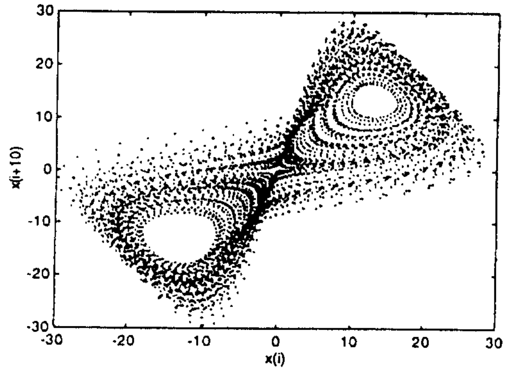

그림 2. 단일 변량 으로부터 얻은 Lorenz 어트랙터

역학계의 어트랙터를 재건하 기 위해 그 좌표값을 구한다. 좌표값들은 {x(i), x(i+τ, x(i+2τ}, i=1, 2, 3, … 에 의해 얻을 수 있으며, 여기에서 τ는 지체시간(delay time)을 나타낸다. τ=2 라고 하면 {x(1), x(3), x(5)}, {x(2), x(4), x(6)}, {x(3), x(5), x(7)}, … 등의 3차원 좌표값들을 가지며, 단일 변량으로부터 3차원의 자유도를 갖는 동역학계의 어트랙터를 얻을 수 있다. Lorenz 시스템의 단일 변량으로부터 얻은 어트랙터가 그림 2 에 보여지고 있으며 시간 지체법에 대한 이론적인 증명은 1981년 Takens에 의해 이루어졌다. 어트랙터를 재건하기 위한 또 다른 방법으로는 Broomhead와 King (1986)에 의한 KL(Karhunen-Loeve)좌표계가 있다.

2.2 지체시간

시간 지체법을 이용해 단일 변량의 시계열로부터 다 차원 좌표계의 어트랙터를 얻기 위하여 지체시간 τ를 추정해야 한다. 일반적으로 시계열의 자동상관함수(autocorrelation function)에 의해 τ를 구하였으나 자동상관함수는 선형성에 의존하기 때문에 비선형 시스템에 대하여 적절한 τ값을 구할 수 없었다. 1986년 Fraser와 Swinney는 상호정보이론(mutual information theory)을 이용하여 선형 또는 비선형에 관계없이 τ를 추정할 수 있도록 하였다. 상호정보이론에 의한 τ값의 추정은 많은 자료와 시간을 필요로하는 단점이 있다. 그러나 통상적으로 자동상관함수를 이용한 시행착오법 또는 상호정보이론에 의해 τ를 추정한다.

2.3 상관차원

어떤 자료치에 대한 카오스 특성을 파악하기 위하여 최대 Lyapunov 지수, 프랙탈차원(fractal dimension), 또는 위상학적 기법(topological technique)등이 있으나 본 기사에서는 프랙탈차원에 대하여 간단히 알아보자. 프랙탈차원은 Grassberger와 Procaccia에 의한 상관차원(correlation dimension)과 같은 용어로 생각할 수 있으며, 어떤 시스템의 카오스 특성을 분석하는데 있어서 상관차원은 표준기법으로써 널리 이용되고 있다. 만약 어떤 자료치가 프랙탈차원을 갖는다면 그 자료치는 카오스의 특성을 가지고 있음을 의미한다. 프랙탈차원은 1, 2 등과 같은 양의 상수를 갖는 유클리드 차원과 구별되게 1.2 또는 2.3 등과 같은 소수점 이하의 값을 갖는다. 유크리드 기하학에서 선은 1차원을 원은 2차원을 갖는다. 그러나 프랙탈차원은 1.72와 같이 선과 원의 중간값을 가지게 된다.

Grassberger와 Procaccia는 어트랙터의 기하학적 차원은 어트랙터와 기하학을 이용해 동역학을 나타내는 수단으로써 중요하다는 것을 깨달았으며 1983년 그들의 연구 결과를 발표하였다. 상관차원은 이해와 계산하기가 쉽고 어트랙터의 기하학과 시스템의 동역학에 대한 정보를 포함하고 있다. 그러나 이러한 어트랙터의 차원 추정은 Packard등에 의해 시간 지체법이 발표된 후에야 가능하게 되었던 것이다.

단일 변량의 시계열로부터 τ값을 구하고 2, 3, …등의 각 차원의 좌표계에서 시간 지체법에 의해 어트랙터를 얻는다. 다음에 각 차원에서의 어트랙터에 대한 상관적분을 다음과 같은 식에 의해 구한다.

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i-1} \theta(\mathrm{r} - |\mathrm{x(i)} - \mathrm{x(j)}|),$$

$$\theta(\mathrm{a}) = 0, \ \alpha < 0$$
$$\qquad 1, \ \alpha > 0$$

여기에서 θ는 Heaviside단계 함수이며 r는 각 차원에 따른 좌표계의 좌표점들을 중심으로 하는 반경이고 i와 j는 같지않다. 상관적분을 구한후 상관 차원을 다음과 같이 구한다.

$$D(r) \propto r^D$$

$$D = \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\log \left[C(\gamma)\right]}{\log \left[\gamma\right]}$$

여기에서 D는 상관차원을 나타낸다.

2.4 카오스 시계열의 예측

어떤 시스템이 카오스의 특성을 갖는다면 카오스 분석에 의해 단기예측이 가능하다. 카오스 시계열은 장기예측이 불가능하다. 그러나 때때로 정확하게 장기예측을 가능하게 하기도 한다. 카오스 시계열에 대한 예측이 가능하다고 이해하게 된 것은 Embedology 이론 때문이라고 말할 수 있을 것이다. 간단하게 설명하면 이 이론은 동역학 시스템의 초기 복잡성을 작은 자유도를 가지도록 하는 것이라고 말할 수 있다. Embedology이론은 Takens에 의해 정립된 이론을 일반화 시킨 것이다. 그러나 카오스 시계열의 예측에 대한 개념은 1987년 Farmer와 Sidorowich에 의해 이루어졌다. 이 개념은 국지선형예측 기법(local linear prediction technique)이라 불리우며 그 후로 카오스 시계열 예측을 위해 신경망을 비롯한 몇몇 카오스 시계열 예측 방법이 개발되었으며, 현재도 많은 사람들이 관심을 갖고 있는 분야이다.

3. 맺음말

위에서 카오스 이론이 동역학적 시스템으로부터 어떻게 발전되어 왔는지 그리고 실제 자연현상으로부터 얻어지는 자료들로부터 어떻게 카오스의 특성을 파악할 수 있는지 간단히 알아 보았다. 오늘날 카오스 이론은 많은 학자들과 여러 분야에서 상당한 관심을 가지고 발전하고 있다. 그러나 카오스 분석에 있어서 잡음과의 관계, 자료치들의 수 등 아직 여러 부분에 대해 연구 되어져야 할 많은 과제들이 남아 있다. 실제 자연현상에 대하여 카오스 특성을 파악하고 분석하기 위한 정확한 방법의 표준화가 연구 진행중에 있고, 카오스 시스템 예측에 대한 다양한 방법들 또한 요구되어지고 있다. 따라서, 카오스 분야에 관심이 있는 학자나 연구자들에게는 아직도 많은 미지의 세계가 남아 있다. 수자원 분야에서도 1989년 Rodriguez-Iturbe, Power, Sharifi, Georgakakos등을 시작으로 Water Resources Research에 현재까지 9편의 논문이 게재되었고, J. of Hydrology에 두 편의 논문이 발표되었다. 그러나 아직까지 수자원 관련 연구자들에게는 새로운 분야라고 할 수 있으며 앞으로 많은 관심과 연구가 진행되리라고 생각된다.

〈참고문헌〉

Broomhead, D. S. and King, G. P., Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data, Physica D, 20, pp217-236, 1986.

Farmer, J. D. and Sidorowich, J. J., Predicting Chaotic Time Series, Physical Review Letters, 59, pp 845-848, 1987.

Grassberger, P. and Procaccia, I., Measuring the strangeness of strange attractors, Physica D, 7, pp 153-180, 1983.

Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., and Shaw, R. S., Geometry from a Time Series, Physical Review Letters, 45, pp 712-716, 1980.

Rodriguez-Iturbe, I., Power, B. F. D., Sharifi, M. B., and Georgakakos, K. P., Chaos in Rainfall, Water Resources Research, 25, pp 1667-1675, 1989.

Strogatz, S. H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Takens, F., Detecting Strange Attractors in Turbulence, In Dynamical Systems and Turbulence, (Eds., Rand, D. A. and Young, L. S.), Lecture Notes in Mathematics, 898, pp 336-381, Warwick, Berlin: Springer-Verlag, 1981.