

< 논 문 >

불규칙한 외부 교란이 주기적 가진을 받는 비선형계의 동적 특성에 미치는 영향

Noise Effect in a Nonlinear System Under Harmonic Excitation

박 시 형* · 김 지 환**

Si-Hyong Park and Ji-Hwan Kim

(1997년 11월 6일 접수 ; 1998년 1월 5일 심사완료)

Key Words : Chaotic Motion(혼돈운동), Lyapunov Exponent(리아푸노프 역지수), Fokker-Planck Equation(포커 플랑크 방정식), Eigenvalue Problem(고유치 문제)

ABSTRACT

Dynamic characteristics are investigated when a nonlinear system showing periodic and chaotic responses under harmonic excitation is exposed to random perturbation. Approach for both qualitative and quantitative analysis of the noise effect in a nonlinear system under harmonic excitation is presented. For the qualitative analysis, Lyapunov exponents are calculated and Poincaré map is illustrated. For the quantitative analysis, Fokker-Planck equation is solved numerically by means of a Path-integral solution procedure. Eigenvalue problem obtained from the numerical calculation is solved and the relation of eigenvalue, eigenvector and chaotic motion is investigated.

1. 서 론

선형 계와 구분되는 비선형 계의 특성은 분기(bifurcation) 현상으로 특징 지워질 수 있다. 이것은 계의 매개변수(parameter)들이 변화하면서 반응의 양상이 양적으로 뿐만이 아니라 질적으로도 변화하는 현상을 의미하고 분기현상에 의해 비선형 계는 다양한 반응을 나타내게 된다. 혼돈 운동(chaotic motion)은 다양한 반응 중에 한가지로 결정론적(deterministic)계에서 예측할 수 없는 반응이 일어나게 되는 현상이다. 혼돈운동을

발생시키는 매개변수 값들에 불규칙한(random) 요소가 첨가되면 혼돈 운동과 유사한 반응이 일어나는 매개변수 영역이 넓어지게 되고 확률론적(stochastic) 이론을 토대로 하여 이러한 현상들을 설명할 수 있다. 그러나 불규칙한 매개변수가 도입되면 결정론적 계에서와는 달리 반응 양상의 변화가 서서히 일어나기 때문에 혼돈운동의 정의가 모호하게 되고 이에 따라 결정론적 계의 연구에 의한 이론들이 중요한 기능을 상실하게 된다. 이에 따라 확률론적 이론의 도입이 불가피하게 되고 그 연구 방향 또한 다양한 변화를 보인다.

주기적 가진(periodic force)과 불규칙한 잡음(random noise)을 동시에 받는 비선형 계는 이러한 현상을 나타내는 하나의 예가 된다. 주기적

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 정회원, 서울대학교 공과대학 항공우주공학과

가진의 크기를 매개변수로 하여 이를 변화시켜 가면서 반응의 양상을 살펴보면 그 크기가 특정한 값을 넘어설 경우 혼돈운동이 발생하게 되고 여기에 불규칙한 잡음을 함께 가하게 되면 더 작은 주기적 가진의 크기에서 혼돈운동과 유사한 반응을 보이게 된다. 이런 사실과 함께 주기적 신호에 섞여 있는 잡음의 크기가 계의 반응에 때로는 주기적인 부분을 더 커지게 할 수도 있다는 현상(stochastic resonance)들이 발견됨에 따라 이러한 현상과 위에서 언급한 연구들과의 상호 관련성이 연구되고 있다.

JUST⁽¹⁾는 Duffing 진동자(oscillator)에 주기적 가진과 불규칙한 잡음이 동시에 가해질 경우에 대하여 무한개의 모멘트 방정식을 Gaussian closure 방법으로 자유도를 다섯 개로 줄여 연구하였으나 Duffing 진동자가 혼돈운동을 나타내는 주기적 가진의 크기 부분에서는 모멘트 방정식도 혼돈운동을 일으킴으로서 모멘트의 본래 의미를 상실한다는 결과를 얻어냈다.

Bulsara, Jacobs와 Schieve⁽²⁾는 주기적 가진과 불규칙한 잡음이 함께 작용하는 비선형 계의 반응을 수치적 시뮬레이션에 의하여 연구하였다. 이 연구에서 그들은 잡음에 의해 야기되는 혼돈운동과 smoothing effect를 발견하고 이를 noise induced chaos라 명칭하였다.

불규칙한 잡음과 주기적 가진이 함께 작용하는 비선형 계의 반응은 쌍안정(bistable)계에 대하여 많은 부분이 이루어졌는데 주로 Kramer's formula에 의한 탈출 시간과 파워 스펙트럼을 이용하였다. Zhou, Moss와 Jung⁽³⁾은 단열(adiabatic) 가정에 의한 Kramer's rate를 이용하여 구해진 탈출 시간을 시뮬레이션 결과와 비교하였다. Gammaitoni, Menichella-Saette, Santucci, Marchesoni와 Presilla⁽⁴⁾는 쌍안정 계의 파워 스펙트럼에 관한 연구를 통하여 확률론적 공진(stochastic resonance) 현상을 보여주었고 이들 역시 단열 가정에 의한 계산 결과였다. 그러나 단열 가정은 주기적 가진의 진동수가 불규칙한 잡음의 크기에 비해 작은 경우에 적당한 것으로 가진의 진동수가 커지면 가정이 타당하지 않게 된다.

탈출 시간과 확률론적 공진은 혼돈운동과 밀접한 연관성을 가지고 있는 것으로 Alpatov와 Reichl⁽⁵⁾은 Fokker-Planck 방정식의 spectral 성

질에 관한 연구를 통하여 탈출 시간과 Floquet spectra, 그리고 level spacing statistics간의 상호 관계를 밝히고 또한 이들과 혼돈운동과의 관계를 설명하였다. Kim과 Reichl⁽⁶⁾은 Fokker-Planck 방정식의 Floquet spectra를 계산하여 혼돈운동과 확률론적 공진의 관계를 살펴보았지만 상호 연관성을 발견하지는 못하였다.

Lin과 Yim⁽⁷⁾은 two well potential 문제에 관하여 혼돈 운동이 발생하는 영역 부근에서의 확률 밀도함수를 Path-integral 방법으로 계산하여 Poincaré 단면(section)에서의 확률밀도 함수가 나타내는 모양이 혼돈운동이나 주기적 운동의 끌개(attractor)와 유사함을 관찰하고 잡음에 의해 야기되는 혼돈 운동을 보여주었다.

이런 연구와 함께 Simiu⁽⁸⁾는 혼돈운동의 발생에 중요한 단서가 되는 Melnikov 함수를 일반화하여 확률론적 과정(stochastic process)으로 확장한 Melnikov 과정(process)을 계산하였다. 그는 이 연구를 통하여 Wind-driven coastal current에 적용하였으나 Melnikov 과정 자체가 확률론적 계의 반응을 보여주기에는 부족한 점이 많다. 이는 결정론적 계에서의 혼돈운동이 갑작스럽게 발생하는 것과는 달리 확률론적 계에서의 혼돈운동은 주기적 운동과 함께 서서히 일어나는 것으로, Melnikov 과정의 부호가 확률론적으로 정의되어 있지만 그 부호의 불규칙한 변화가 반응의 양상에 어떤 영향을 미치는지는 상세하게 알 수 없기 때문이다.

본문에서는 주기적 가진과 불규칙한 가진을 동시에 받는 two well potential 문제에 대하여 잡음에 의해 야기된 혼돈 운동을 여러 가지 측면에서 확인하고 이들을 통해 혼돈 운동의 임계점 부근에서 일어나는 현상들을 고찰하였다. Lyapunov 멱지수를 수치적으로 계산하여 결정론적 계에서의 멱지수와 통계학적 계에서의 멱지수가 혼돈 운동과 어떤 관계가 있는지를 조사하였다. Fokker-Planck 방정식을 Path-integral 방법으로 계산하여 잡음에 의해 야기된 혼돈 운동을 확인하고 이들의 고유치 문제를 풀어서 두 potential well 사이의 점프(jump)현상에 대한 양적인 값을 제시하였다. 또한 고유치 문제의 모드를 관찰함으로써 모드가 반응의 확률적 양상에 미치는 영향과 고유치들의 크기가 어떻게 변화해 가는지를 살펴보았다.

2. 본 론

2.1 운동 방정식

Two well potential 문제는 대표적으로 좌굴된 빔의 비선형 진동에서 1차 모드의 운동 방정식에 해당하며 가진이 작용하지 않을 경우 두 개의 안정한 평형상태와 하나의 불안정한 평형상태를 가진다⁽⁹⁾. 좌굴된 빔의 진동 문제 외에도 two well potential 문제는 내부에 유체가 흐르는 구조물의 진동 문제에서도 발견되고 범위를 넓게 보면 지구 기후 변화 문제도 이에 해당한다. 본 연구에서 사용하는 two well potential 문제의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + c\dot{x} - kx + hx^3 = f(t) \quad (1)$$

결정론적인 문제의 경우 일반적으로 $f(t)$ 을 주기적인 가진으로 다루지만 본 연구에서는 불규칙한 잡음을 포함하는 다음과 같은 식으로 정의한다.

$$f(t) = F \cos(\omega t) + \sqrt{x} W(t) \quad (2a)$$

$$R_{WW}(\tau) = \delta(\tau) \quad (2b)$$

여기서 $W(t)$ 는 백색잡음(white noise)으로 자기상관함수(autocorrelation)가 1이고 x 는 잡음의 강도를 나타내는 변수로서 $\sqrt{x} W(t)$ 의 자기상관함수는 x 가 된다.

x 가 0인 경우는 결정론적 계에 해당하며 일정한 진동수에서 가진의 크기가 특정한 값을 넘어설 경우 혼돈운동이 발생하게 된다^{10,11,12}. 본 연구에서 사용한 매개변수들의 값 ($k=1, h=1$)은 문헌⁷을 참고로 하였으며 이에 해당하는 주기적 운동과 혼돈 운동은 3장에서 자세하게 구분되어 있다. 위에서 언급한 매개변수들의 값을 식 (1)에 대입하고 가진이 없다는 가정을 하면 $x=\pm 1$ 에서 안정한 평형상태를 가지고 $x=0$ 에서 불안정한 평형상태를 가지게 된다. 이 때 작은 주기적 가진이 가해지면 안정한 평형상태 주위에서 주기적 운동(periodic motion)이 발생하고 가진의 크기가 커지게 되면 진폭도 함께 증가하는 현상을 보이다가 특정한 값을 넘어서게 되면 두 개의 안정한 궤적(trajecory)간의 점프 현상이 발생하게 된다. 이것이 혼돈 운동의 발생 원인이 되고 여기에 불규칙한 잡음이 함께 작용할 경우에는 점프 현상의 발생에 결정적인 영향을 미치게 된다.

2.2 Lyapunov 멱지수

2.1에서 제시한 운동방정식을 상태 공간(state space)에서 정리하면 다음과 같은 1차 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x} = D_x(x, y, t) = y \quad (3a)$$

$$\dot{y} = D_y(x, y, t) + \sqrt{x} W(t) = -cy + x - x^3 + f(t) \quad (3b)$$

일반적으로 결정론적 계의 상태 공간에서 인접한 두 점 사이의 거리는 시간에 따라서 다음과 같은 관계를 가지고 변화하게 된다.

$$d(t) = d_0 e^{\lambda_L t} \quad (4)$$

λ_L 이 가지는 물리적 의미는 인접한 두 점이 서로 멀어지거나 가까워지는 정도를 나타내는데 이는 결정론적 계의 정상상태(steady state)에서의 운동을 주기적 운동과 혼돈운동으로 구분하는 결정적 역할을 하게 된다. 이를 확률론적 계에 적용함으로써 불규칙한 잡음의 영향을 관찰할 수 있게 된다. 그러나 Lyapunov 멱지수를 확률론적 계에 적용할 경우 시뮬레이션 시간이 매우 길어지게 된다는 단점과 함께 본래 λ_L 의 부호가 중요한 것임에 반해 그 크기가 오히려 중요한 정보가 된다. λ_L 의 계산을 위해서는 불규칙한 잡음이 포함된 계의 수치적 시뮬레이션 방법이 필요한데 본 연구에서는 Mannella와 Palleschi¹³가 제시한 방법을 이용하였다.

λ_L 의 이론적인 값은 식 (3)을 X 에 관해 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\nabla D = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_x}{\partial x} & \frac{\partial D_x}{\partial y} \\ \frac{\partial D_y}{\partial x} & \frac{\partial D_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -c \end{bmatrix} \quad (5)$$

∇D 의 고유치를 구하면 인접한 두 점의 거리 변화에 대한 정보를 얻게 된다.

식 (5)의 고유치는 $\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4 - 12x^2}}{2}$ 이므로 x 의 크기에 따라 다음과 같이 λ_L 을 구할 수 있다.

$$c^2 + 4 - 12x^2 > 0 \text{ 이면} \\ \lambda_L = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4 - 12x^2}}{2} \quad (6a)$$

$$c^2 + 4 - 12x^2 < 0 \text{ 이면}$$

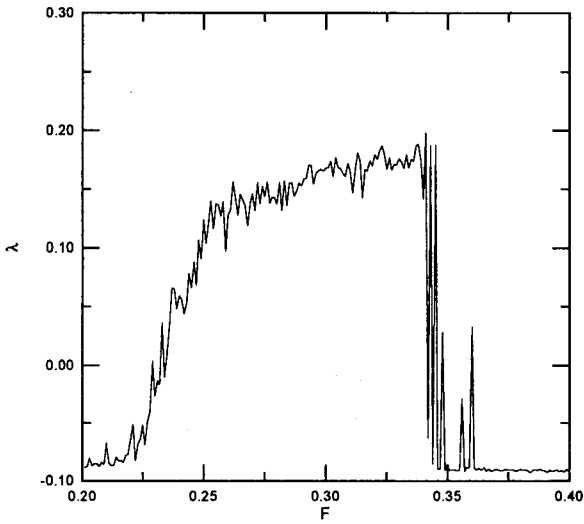
$$\lambda_L = -\frac{c}{2} \quad (6b)$$

식 (6)에 의해 구해진 가장 큰 Lyapunov 먹지수는 상태 공간에서의 분포를 제시해 주지만 정상해(steady state solution)의 궤적을 정확히 알 수 없으므로 이론적으로 λ_L 을 구하는 것은 불가능하다. 그러나 식 (6)을 살펴보면 $|x|$ 의 크기가 λ_L 의 부호를 결정하는 중요한 변수가 된다. 일반적으로 λ_L 의 부호가 양수일 때 혼돈운동으로 판

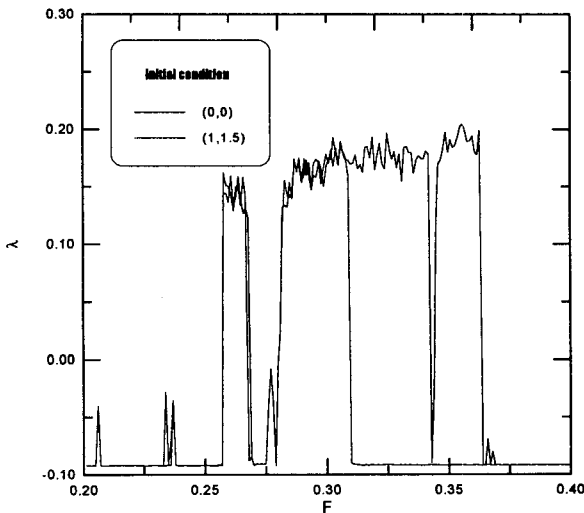
단하게 되는데, 이에 따르면 정상 상태의 궤적이 x 축 상의 원점에 가까운 부분에서 긴 시간을 보내게 되면 λ_L 가 양수가 되는 것을 알 수 있다. 이는 two well potential 문제의 혼돈운동은 근본적으로 원점 부분에서 일어나며 또한 두 well 간의 점프 현상에 근거한다는 사실을 말해준다. 또한 확률론적 입장에서 의미를 부여한다면 탈출 시간, Kramer's rate와 관련이 있고 나아가서는 확률론적 공진현상과도 연관성을 가질 수 있다.

$x=0$ 인 경우, 다시 말해 결정론적 계에 대한 Lyapunov 먹지수는 Fig. 1(a)에 나타나 있다. 그림에 명확하게 드러나 있듯이 주기적 운동과 혼돈운동의 구분이 확실하게 보인다. $F=0.256$ 부근에서 λ_L 의 부호 변화가 갑작스럽게 나타나고 이것은 혼돈운동의 증후이다. Fig. 3(a)와 Fig. 3(b)는 λ_L 의 부호가 -와 +인 경우에 각각 해당하는 Poincaré map이다. Fig. 3(a)는 오른쪽 potential well의 주위를 주기적으로 돌고 있는 것을 의미하고 Fig. 3(b)는 전형적인 혼돈운동의 Poincaré map과 같이 차원 분열(fractal) 모양을 하고 있다.

Fig. 1(a)은 두 개의 다른 초기 조건에 대하여 계산한 결과를 보여주는데 $F=0.31$ 부근에서 큰 차이를 보이기 시작한다. 이는 두 개의 정상해가 존재함을 의미하며 실제로 $F=0.31$ 부근에서 두 개의 potential well을 모두 포함하여 진동하는 주기적 운동이 생겨난다. 또한 $F=0.275$ 부근에



(a) $x=0$



(b) $x=0.001$

Fig. 1 Lyapunov exponent vs. harmonic forcing amplitude

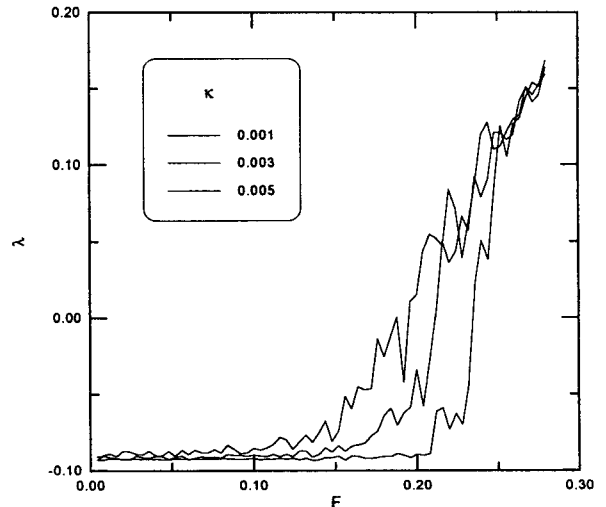
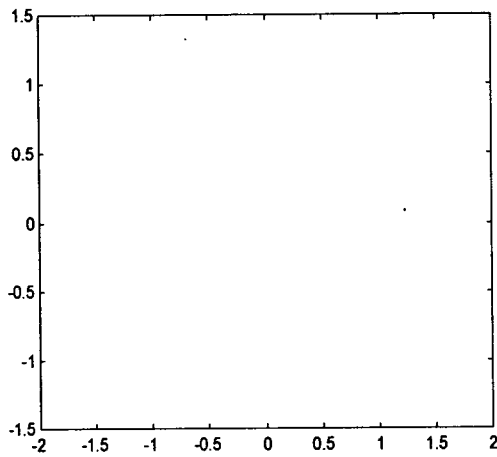


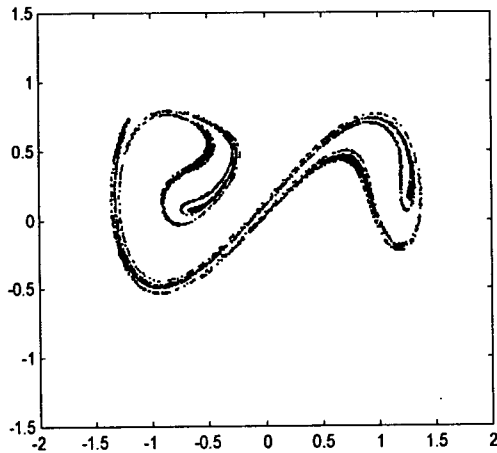
Fig. 2 Lyapunov exponent vs. harmonic forcing amplitude

서는 주기적 운동을 보이는 부분이 짧은 구간에 걸쳐 생겨나는데 이는 주기적 창(periodic window)라 불리는 현상이고 이 부분의 운동은 period 3에 해당하는 주기적 운동이다.

위에서 살펴보았던 결정론적 계에 불규칙한 잡음이 가해짐으로써 생겨나는 확률론적 계는 동적인 특성에서 결정론적 계와는 많은 차이를 보인다. Fig. 1(b)는 $x=0.001$ 인 경우에 Lyapunov 멱지수이다. Fig. 1(a)와 비교해 보면 λ_L 의 변화가 완만해진 것과 주기적 창이 사라진 것이 특징적이다. 이런 현상은 참고문헌(2)에서 smoothing effect라 불려졌고 이는 정상해가 미소한 교란에

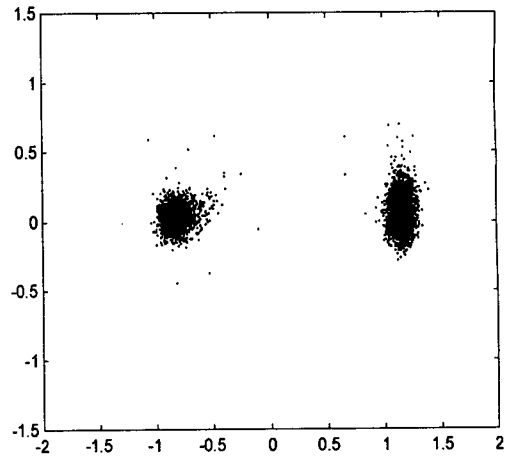


(a) $F=0.22$

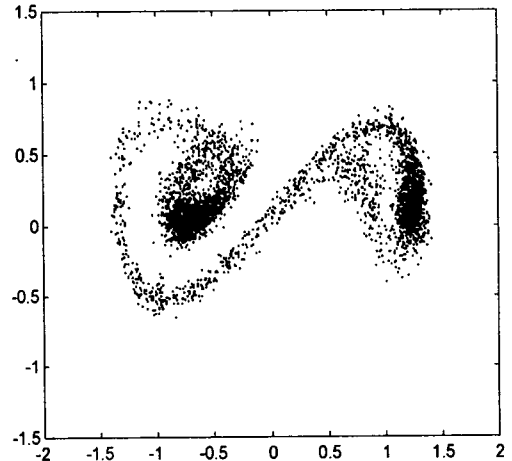


(b) $F=0.26$

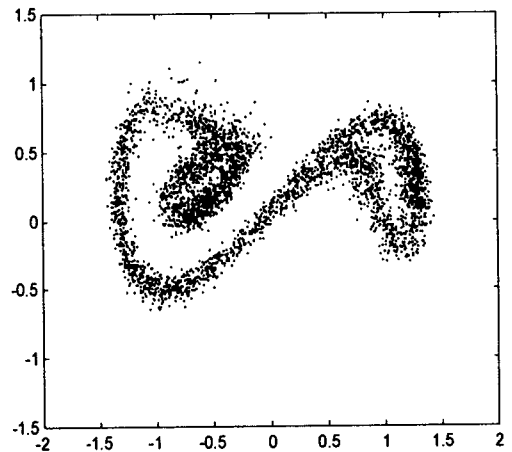
Fig. 3 Poincaré map for deterministic system



(a) $F=0.16, x=0.003$



(b) $F=0.22, x=0.003$



(c) $F=0.26, x=0.003$

Fig. 4 Poincaré map for stochastic case

대해서는 안정하지만 유한한 크기의 교란에 대해서는 불안정함을 의미한다. 여러 가지 x 에 대한 λ_L 는 Fig. 2에 나타나 있는데 x 의 크기가 커짐에 따라서 λ_L 의 증가가 더 빨리 일어남과 동시에 더 완만해짐을 알 수 있다.

Smoothing effect는 Lyapunov 멱지수뿐만 아니라 Poincaré map 에서도 나타나게 되는데 이것은 Fig. 4(c)를 보면 알 수 있다. 잡음이 없을 경우의 Poincaré map과 비교해서 차원 분열 구조가 깨어지고 완만한 분포를 보인다. Fig. 2에서 $x=0.003$ 에 해당하는 곡선을 살펴보면 $F=0.15$ 에서 $F=0.25$ 까지의 구간은 불규칙한 잡음에 의해 정상해가 주기적인 성질을 잃게되어 λ_L 가 서서히 증가하기 시작하는 부분으로 이에 해당하는 Poincaré map은 Fig. 4(b)이다. $x=0$ 인 경우에는 주기적 운동을 보이는데 반해서 주기성을 대부분 상실하고 혼돈 운동의 그것과 유사한 모양을 지니고 있다. 이는 두 potential well 간의 점프 현상이 활성화된 것을 의미하고 잡음에 의해 야기된 혼돈운동으로 설명될 수 있다.

이제 Fig. 4(a)를 살펴보면 Fig. 2에서 λ_L 의 증가가 거의 일어나지 않은 부분에 해당하므로 두 potential well간의 점프가 여러 차례 발생하지 않았음을 알 수 있다. 그러므로 Poincaré map의 모양은 혼돈운동의 그것보다는 주기적 운동의 그것과 더 유사함을 발견할 수 있다.

지금까지 본 연구에서 해석하고 있는 확률적계의 특성을 살펴보는 데에 Poincaré map의 모양이나 Lyapunov 멱지수의 유용성을 확인할 수 있었다. 그러나 본 문제의 동적 특성 변화는 두 potential well간의 점프 현상에 기인하는 것에 주목할 때 이제까지의 결과로는 계의 반응을 구체적으로 예측하기에 부족함이 있다.

2.3 확률밀도함수(Probability Density Function)

2.1에서 제시한 식(1)은 확률적인 미분방정식으로 이것을 Itô 형태의 확산(diffusion) 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$dx = D_x dt = y dt \quad (7a)$$

$$dy = D_y dt + \sqrt{x} W(t) dt = (-cy + x - x^3 + F \cos(\omega t)) dt + \sqrt{x} dB \quad (7b)$$

여기서 B 는 평균이 0이고 분산이 dt 인 독립

적인 증분 dB 를 가지는 standard wiener process이다. 식 (7)을 확률밀도함수에 관한 편미분 방정식인 Fokker-Planck 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = - \frac{\partial D_x p(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial D_y p(x, y, t)}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (8)$$

식 (8)의 해는 이론적으로 알려진 경우가 드물고 특수한 형태에 관하여 몇 가지 정상해만이 이론적으로 계산되어 있다¹⁴. 특히 본 연구의 경우에는 D_y 에 $\cos(\omega t)$ 이 포함되어 있기 때문에 정상해가 시간에 따라 변화하는 형태가 된다.

Path-integral solution은 Fokker-Planck 방정식의 해를 수치적으로 구하는데 유용한 방법으로 확률의 확산과 이동을 모든 상태공간에서 고려하여 적분하고 시간의 변화는 이산의 시간(discrete time) 개념을 이용하고 있다. Path-integral solution에 관한 이론적 배경은 문헌¹⁵에 자세하게 소개되어 있고 이를 참고하여 간단히 설명하면 다음과 같다.

시간 t 에서의 확률이 (x', y') 에 집중되어 있다고 가정하면 미소 시간 τ 가 지난 뒤의 확률밀도함수를 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$p(x, y, t + \tau | x', y', t) = (1 + L_{FP}(x, y, t)\tau + O(\tau^2)) \delta(X - X') \quad (9a)$$

$$\delta(X - X') = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (9b)$$

$$L_{FP}(x, y, t) = - \frac{\partial}{\partial x} D_x - \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{x}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9c)$$

식 (9)를 참고문헌(15)에 소개되어 있는 방법으로 정리하면 다음과 같은 변화(transition) 확률 밀도함수를 얻을 수 있다.

$$p(x, y, t + \tau | x', y', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x \tau}} \exp\left[-\frac{\tau}{2x} (aD_y(x', y', t) + bD_y(x, y, t + \tau) - \frac{y - y'}{\tau})^2 - b \frac{\partial D_x}{\partial x} \tau - b \frac{\partial D_y}{\partial y} \tau\right] \delta(aD_x(x', y', t) + bD_x(x, y, t + \tau) - \frac{x - x'}{\tau}) \quad (10)$$

여기서 a, b 는 pre-state와 post-state의 비중 (weight)을 다루는 상수이고 다음 관계식을 만족한다.

$$a + b = 1 \quad (a, b > 0) \quad (11)$$

식 (10)을 이용하면 다음과 같이 시각 t 에서의 확률밀도를 시각 $t + \tau$ 에서의 확률밀도로 변화시킬 수 있다.

$$p(x, y, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, t + dx', y', t) \times p(x', y', t) dx' dy' \quad (12)$$

이제 임의의 시각 t 에서의 확률밀도를 식 (12)의 반복적인 사용에 의해 초기조건으로부터 구해 낼 수 있다.

$$p(x_N, y_N, t_N) = \lim_{\tau, N \rightarrow 0, \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \int_{-\infty}^{\infty} dy_i p(x_{i+1}, y_{i+1}, t_{i+1} | x_i, y_i, t_i) p(x_0, y_0, t_0) \quad (13a)$$

$$\frac{t_N - t_0}{N} = \tau \quad (13b)$$

Fokker-Planck 방정식은 근본적으로 이동하며 (drifty) 확산하는(diffusive) 성질을 가지고 있으므로 수치적인 해를 구하는 것이 쉽지 않다. 특히 확률밀도함수의 특징이라 할 수 있는 양의 (positive) 성질을 만족시켜야 하는 부분에서 많은 방법들이 오차를 보인다. 이런 면에서 Path-integral solution은 수치적으로 계산할 경우 항상 양의 해가 구해진다는 점에서 매우 좋은 특징을 가지고 있다. Fokker-Planck 방정의 해를 수치적으로 구하고자 하는 연구는 Spencer와 Bergman⁽¹⁶⁾의 유한요소법을 예로 들 수 있다. 이 연구에서는 4 node 사각형 요소를 Fokker-Planck 방정식에 직접 적용하여 엄밀해와 유사한 수치 해를 구했고 그 후 Wojtkiewicz, Bergman과 Spencer⁽¹⁷⁾는 무한요소법(infinite element method)을 이용하여 더욱 정확한 해를 구한 바 있다. 그러나 그들이 사용한 요소의 개수가 매우 많았으므로 적은 개수의 요소를 사용했을 경우 확률밀도가 음의 값을 가지는 부분이 발생하는 근본적인 원인은 해결되지 않았다. Path-integral solution을 이용하여 확률밀도의 수치 해를 구하고자 하는 연구는 Wehner와 Wolfer⁽¹⁸⁾에 의해 1 차원(dimension) 문제에 관하여 이루어졌고 참고문헌(7)에서 본 연

구와 유사한 문제에 관하여 적용된 바 있다.

수치적으로 식 (13)를 계산할 때는 τ 를 유한한 크기로 하고 확률 평면을 유한요소(사각형 요소)로 나눈다. 한 요소에서의 확률밀도가 일정하다는 가정을 하면 각 요소에서의 값이 확률밀도함수를 이루게 된다. 식 (12) 또는 (13)에 의해 시각 t_i 에서의 확률밀도함수는 시각 t_{i-1} 에서의 확률밀도함수로부터 구해 낼 수 있으므로 시각 t_i 에서 m 번째 요소의 확률밀도함수 대표 값은 다음과 같은 식에 의해 구해질 수 있다.

$$P_i^m = \sum_{n=1}^M T_{i,i-1}^{m,n} P_i^n \quad (14a)$$

$$T_{i,i-1}^{m,n} = \left(\int_{x_n}^{\bar{x}_m} dx_i \int_{y_n}^{\bar{y}_m} dy_i \int_{x_n}^{\bar{x}_n} dx_{i-1} \int_{y_n}^{\bar{y}_n} dy_{i-1} p(x_i, y_i, t_i | x_{i-1}, y_{i-1}, t_{i-1}) \right) \div (\bar{x}_m - x_n)(\bar{y}_m - y_n) \quad (14b)$$

이것을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$P_i = T_{i,i-1} P_{i-1} \quad (15)$$

이제 $T_{i,i-1}$ 를 $i=1$ 부터 계산하게 되면 확률밀도를 임의의 시간에 대하여 구할 수 있다.

다시 식 (10)과 (14b)를 함께 보면 $T_{i,i-1}$ 는 $F \cos(\omega t)$ 에 따라 변해 감을 알 수 있다. 그러므로 $T_{i,i-1}$ 는 한 주기동안의 값이 반복되게 되며 $T_{i,i-1}$ 를 한 주기만큼 곱해두면 Poincaré 단면에서의 확률분포를 구할 수 있게 된다.

$$W_k = T_{ps} W_{k-1} \quad (16a)$$

$$T_{ps} = \prod_{i=1}^{2\pi/\omega} T_{i,i-1} \quad (16b)$$

여기서 아래첨자 ps 는 Poincaré 단면을 의미하고 W 는 Poincaré 단면에서의 확률밀도를 나타낸다.

식 (16)은 Poincaré 단면에서의 확률밀도를 구하는 행렬 관계식임과 동시에 다음과 같은 고유치 문제로 생각할 수 있다.

$$\lambda_i \phi_i = T_{ps} \phi_i \quad (17)$$

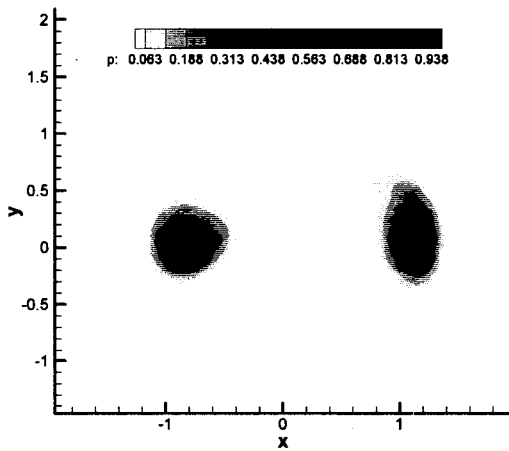
식 (16)과 (17)을 동시에 고려할 때 λ_i 중에서 가장 큰 값은 이론적으로 1이고 이에 해당하는 고유벡터 ϕ_i 는 정상해에 해당한다. 그러나 실제로

수치계산을 수행하는 과정에서 확률밀도함수가 분포되어 있는 모든 범위의 상태 공간을 고려할 수는 없으므로 절단 오차(truncation error)를 가지게 되고 고유치 중에서 가장 큰 값은 1에서 벗어나게 된다. 그러므로 고유치들의 값을 비교하기 전에 고유치들을 가장 큰 고유치에 의해 나누어 주는 표준화(normalization) 과정이 필요하다.

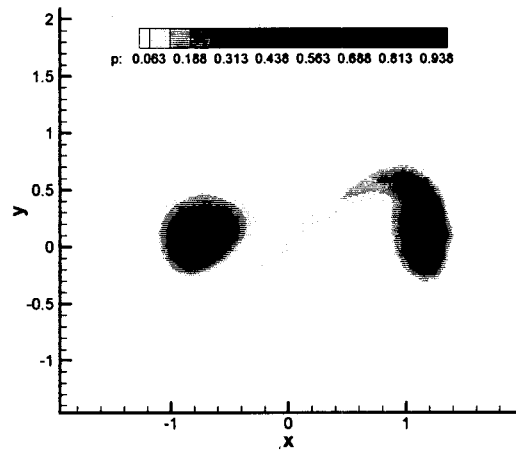
Path-integral solution에 의거한 수치적 방법에 의해 구해지는 고유치들은 Fokker-Planck 방

정식이 본래에 가지고 있던 고유치들과 밀접한 관계를 가지고 있다. 먼저 Fokker-Planck 방정식의 고유치 문제를 살펴보면 다음과 같다.

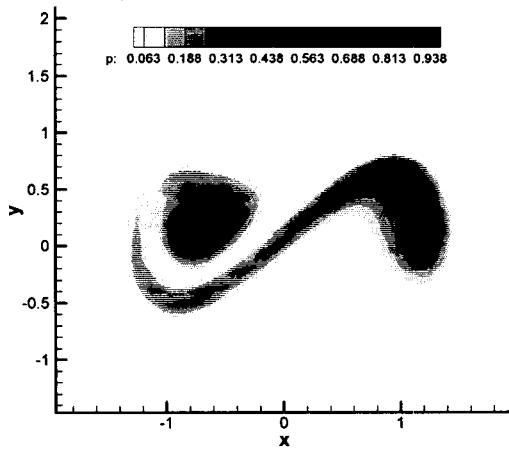
$$\lambda_F \phi_F(x, y, t) = - \frac{\partial D_x \phi_F(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial D_y \phi_F(x, y, t)}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 \phi_F(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (18)$$



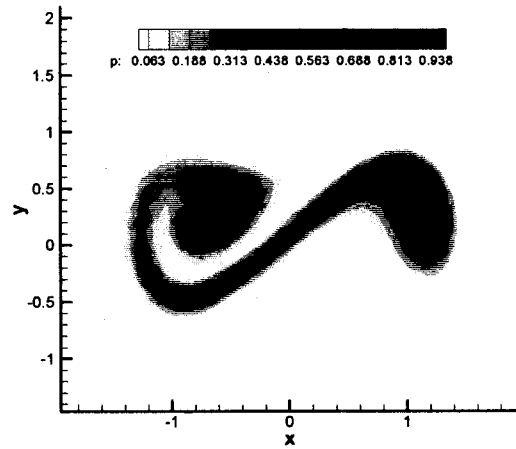
(a) $F=0.12, x=0.003$



(b) $F=0.16, x=0.003$



(c) $F=0.22, x=0.003$



(d) $F=0.26, x=0.003$

Fig. 5 Steady state probability density function

여기서 주의해야 할 것은 ϕ_F 가 x, y 뿐만이 아니라 t 의 함수이기도 하다는 것이다. 이것은 D_x 에 $F\cos(\omega t)$ 항이 포함되어 있기 때문인데 이로 인해 ϕ_F 도 t 의 주기함수가 된다. 근본적으로 식 (18)는 Floquet 고유치 문제이고 이와 유사한 문제에 관하여 고유치를 계산한 연구로는 참고문헌(5)와 (6)이 있다.

식 (17)과 (18)에서 구해지는 고유치들은 근본적으로 같은 계에 관한 것이므로 서로간의 관계식이 존재한다. 식 (18)는 시간의 변화에 따른 감쇠 비율을 고유치로 생각한 것이고 식 (17)은 한 주

기를 단위로 하는 감쇠 비율을 고유치로 하였다. 이들의 관계는 다음과 같음을 추론할 수 있다.

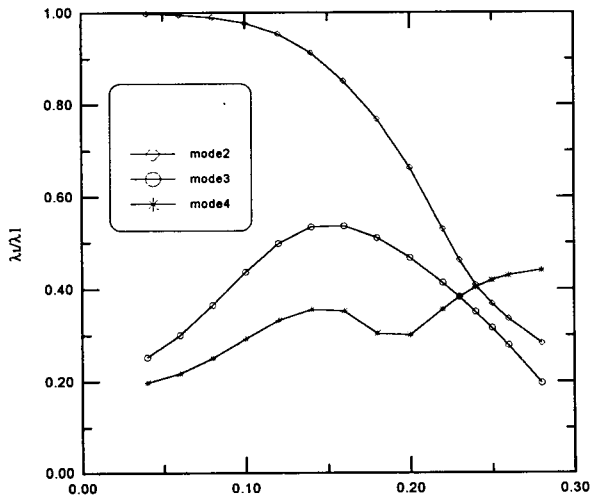
$$Real(\lambda_F) = \frac{\omega}{2\pi} \log |s| \quad (19)$$

특히 복소수의 값을 나타내는 고유치의 경우 식 (17)과 (18)의 의미는 서로 큰 차이가 있다. 식 (17)의 고유치가 복소수인 경우 그 모드의 감쇠 비율은 절대값인데 반해 식 (18)의 고유치가 복소수인 경우에는 실수부가 감쇠 비율을 나타내게 된다. 또한 λ 와 λ_L 에 해당하는 모드의 감쇠는 다음과 같은 관계로 이루어진다.

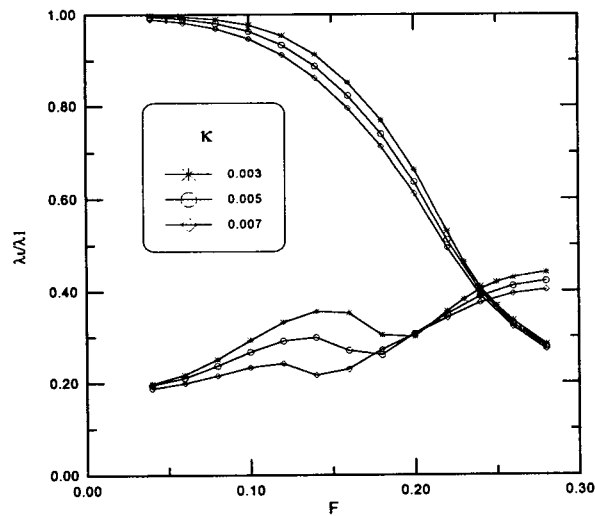
$$\begin{aligned} \lambda^n &=> n : \text{주기 수} \\ e^{\lambda_L t} &=> t : \text{시간} \end{aligned} \quad (20)$$

Poincaré 단면에서의 정상해는 식 (17)의 1차 모드에 해당하며 $x=0.003, F=0.12, 0.16, 0.22, 0.26$ 에 대하여 Fig. 5(a)~(d)에 나타나 있다. Fig. 4의 수치적 시뮬레이션에 의한 Poincaré map과 비교할 때 매우 유사한 모양을 지니고 있으며 이는 본 연구에서 사용한 확률적 미분방정식 (1)의 해가 ergodic 성질을 가지고 있다는 점에서 당연한 결과이다. 그러나 수치적 path integral solution의 유용성은 정상 상태에서의 결과에만 있지는 않다. 앞서 4.4절에서 구성된 고유치 문제의 해를 구함으로써 본 문제의 동적 특성에 관한 정보를 더욱 얻어낼 수 있다.

Fig. 6(a)는 $x=0.003$ 에서 F 를 변화시켜 가면서 계산한 T_{ps} 의 주요 고유치 크기이다. 그림에 나타난 세 가지 모드는 모두 1차 모드의 고유치에 의해 표준화 된 값이고 편이를 위해 명칭은 모드 2,3,4로 정하였다. 모드 2의 곡선을 보면 F 가 커짐에 따라 급격하게 감소하는 것을 볼 수 있는데 이것은 모드 2의 모양을 살펴봄으로서 설명된다. 모드 2의 모양은 Fig. 7에 잘 나타나 있듯이 +와 -의 두 potential well에 확률밀도가 반대 부호로 집중되어 있는 모양이다. 확률밀도가 음의 값을 가지는 것은 물리적 의미에 어긋나지만 모드 2를 1차 모드와 동시에 고려한다면 아주 중요한 정보를 제공한다. 1차 모드와 모드 2가 초기 조건에서 같은 크기로 존재한다면 한 쪽 potential well에 확률이 집중되어 있는 형태가 된다. 그러므로 모드 2의 고유치 크기는 탈출 시간과 밀접한 관련을 가지고 나아가서는 점프 현상의 크기를 나



(a) $x=0.003$



(b) various noise intensity

Fig. 6 Absolute value of normalized eigenvalue

타내는 척도가 된다. Fig. 6(a)에서 F 가 매우 작은 부분을 보면 모드 2의 고유치가 1에 매우 근접해 있음을 볼 수 있는데 이것은 탈출 시간이 매우 커져서 점프 현상이 거의 일어나지 않는 것을 의미하며 긴 시간동안 한쪽 potential well에 확률이 집중되어 있는 상태가 계속되는 현상을 보여 준다.

이것을 다른 관점에서 이해한다면 과도 시간(transient time)이 매우 길다는 의미가 되며 이는 Fig. 8를 통해 눈으로 확인할 수 있다. Fig. 8은 $F=0.12, 0.16$ 에서 marginal 확률밀도의 과도해(transient solution)를 나타낸 것인데 $F=0.12$ 의 경우에 100 주기가 지나서야 정상 상태에 수렴하고 있는데 반해 $F=0.16$ 의 경우 25 주기 정도에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 결정론적 계에서 주기적 운동은 짧은 과도 시간을 가지고 혼돈 운동의 경우는 무한히 긴 과도시간을 가진다는 사실과 비교할 때 반대의 양상을 보인다.

Fig. 6(a)에서 주목할 만한 것은 $F=0.25$ 부근에서 모드 2와 모드 4가 교차한다는 사실이다. 모드 2가 탈출 비율(escape rate)를 나타내므로 $x=0$ 일 때 혼돈운동의 시작점이라 할 수 있는 F 의 부근에서 모드 2의 고유치 크기가 계속해서 감소하는 것은 예상할 수 있다. 그러므로 이 부분에서 오히려 증가하고 있는 모드 4의 성질을 살펴보는 것이 매우 중요하다. 모드 4는 $F=0.18$ 부근에서 복소 모드로 바뀌게 되는데 이것은 주기가 지남에 따라 일정한 모양을 가지지 않고 변화

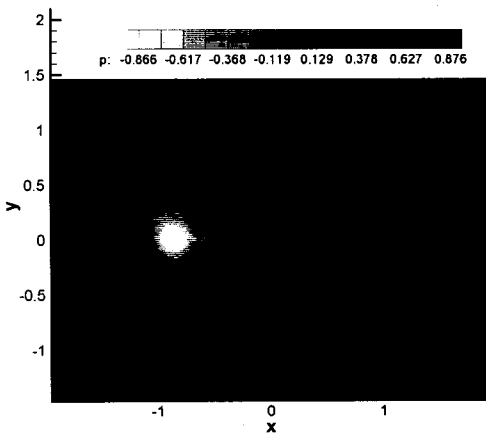
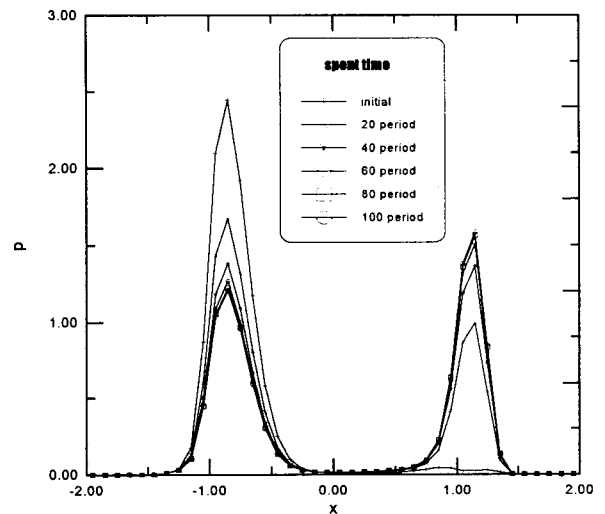


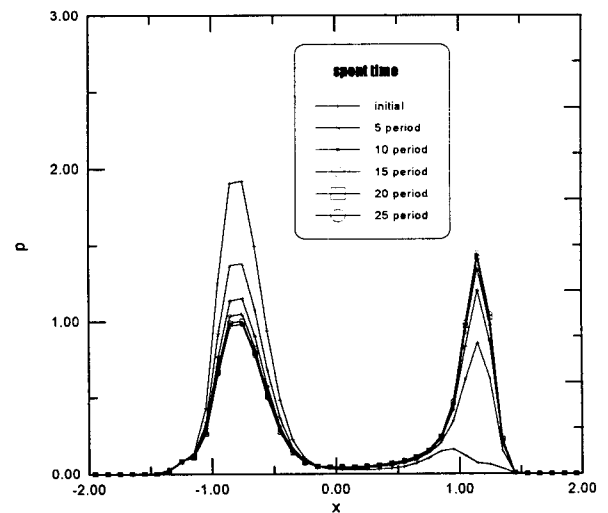
Fig. 7 Mode shape of mode 2 ($F=0.12, x=0.003$)

한다는 것을 의미한다. 이는 $x=0$ 인 경우에 혼돈 운동에서 볼 수 있는 사상(mapping) 과정과 연결지어 생각할 수 있다.

Fig. 6(b)은 여러 가지 x 에 대하여 고유치들을 계산한 결과이다. x 가 증가함에 따라서 모드 2의 고유치가 감소하고, 이는 점프 현상의 증가를 나타내며 작은 F 에서도 혼돈 운동과 유사한 반응이 나타날 수 있음을 말해준다. 또한 모드 4가 복소모드로 변화하는 시점이 점차 빨라짐은 알 수 있다. 또한 모드 2, 4의 고유치가 변화해 가는 양



(a) $F=0.12, x=0.003$



(b) $F=0.16, x=0.003$

Fig. 8 Time history of marginal probability density

상에 미루어 볼 때 x 가 매우 작아지면 모드 2의 고유치는 계단함수(step function)와 같이 급격한 모양이 될 것으로 예상된다. 그러나 이와 같은 경우의 계산은 매우 작은 요소에 의한 Path-integral solution을 요구하게 되므로 현재의 계산 속도로는 불가능하다.

3. 결 론

본 연구를 통하여 주기적 가진과 불규칙한 잡음이 동시에 가해지는 비선형 계의 동적 특성을 정성적인 측면과 정량적인 측면에서 살펴보았다. 결정론적 계에서 혼돈운동과 주기적 운동의 판단 기준으로 사용되는 Lyapunov 멱지수를 확률론적 계에 적용한 결과, 잡음에 의해 야기되는, 혼돈운동과 유사한 운동을 확인하였고 Poincaré map을 통해 가시화 하였다. 잡음에 의하여 Lyapunov 멱지수의 변화가 완만해지고 이런 사실은 결정론적 계에서 Lyapunov 멱지수의 부호가 가지는 중요성을 상실하게 한다. 이런 사실들에 비추어 볼 때 확률론적 계에서는 Lyapunov 멱지수의 부호보다 그 크기를 비교하는 것이 동적 특성의 판단에 더욱 유용하다는 사실을 알 수 있다. 본 연구에서 다루었던 two well potential 문제의 혼돈 운동은 두 potential well 사이에서 일어나는 점프 현상에 기인한다고 볼 수 있으므로 그러한 현상의 확률적 크기를 알아내는 것은 매우 중요하다. Fokker-Planck 방정식의 path-integral solution을 수치적으로 계산하는 과정에서 만들어지는 고유치 문제는 점프 현상의 확률적 크기를 제시해 줄 수 있는 좋은 방법이 될 수 있다는 사실을 모드의 모양을 통해 알 수 있었다. Poincaré 단면 사이의 확률 변화 행렬의 두 번째 모드가 두 potential well사이의 점프 확률의 척도가 되고 잡음에 의해 야기되는 혼돈운동이 발전해 가면서 두 번째 모드의 고유치가 급격하게 감소하는 현상이 발견되었다. 또한 혼돈운동과 유사한 운동이 발달하는 과정에서 서서히 강해지는 복소 모드가 있었고 혼돈운동이 완전히 자리잡은 뒤에는 두 번째 모드와 교차되는 현상이 관찰되었다.

본 연구에서 다루었던 계의 특성은 확률론적 공진현상에 대한 연구와 매우 밀접한 관계가 있으며 두 potential well 사이에서 일어나는 점프 현상은 혼돈운동 뿐만이 아니라 확률론적 공진의 주요

원인이 된다. 그러므로 잡음에 의해 야기되는 혼돈운동과 확률론적 공진와의 상호 관계에 대한 연구가 이루어져야 할 것이며 이를 위해서는 파워스펙트럼의 성질 또는 신호 대 잡음 비(signal to noise ratio)에 관한 고찰이 필요하다. 또한 혼돈운동의 중요한 특성인 차원분열 현상에 미치는 잡음의 영향에 관한 연구가 있어야 할 것이며 이러한 모든 사항에 관한 고찰을 위해서는 주기적 가진이 작용하는 확률론적 계의 Fokker-Planck 방정식을 수치적으로 뿐만이 아니라 수학적 또는 이론적으로 다루는 방법이 더욱 개발되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Wolfram JUST, 1989, "Dynamics of the Stochastic Duffing Oscillator in Gaussian Approximation", *Physica D*, Vol. 40, pp. 311~330.
- (2) A. R. Bulsara, E. W. Jacobs, W. C. Schieve, 1990, "Noise Effect in a Nonlinear Dynamic System: The RF Superconducting Quantum Interference Device", *Phys. Rev. A*, Vol. 42, No. 8, pp. 4614~4621.
- (3) Ting Zhou, Frank Moss, Peter Jung, 1990, "Escape-time Distributions of a Periodically Modulated Bistable System with Noise", *Phys. Rev. A*, Vol. 42, No. 6, pp. 3161~3169.
- (4) L. Gammaitoni, E. Menichella-Saetta, S. Sntucci, F. Marchesoni, C. Presilla, 1989, "Periodically Time-modulated Bistable Systems: Stochastic Resonance", *Phys. Rev. A*, Vol. 40, No. 4, pp. 2114~2119.
- (5) P. Alpatov, L. E. Reichl, 1994, "Spectral Properties of a Time-periodic Fokker-Planck Equation", *Phys. Rev. E*, Vol. 49, No. 4, pp. 2630~2638.
- (6) Sukkeun Kim, L. E. Reichl, 1996, "Stochastic Chaos and Resonance in a Bistable Stochastic System", *Phys. Rev. E*, Vol. 53, No. 4, pp. 3088~3095.
- (7) H. Lin, S. C. S. Yim, 1996, "Analysis of a Nonlinear System Exhibiting Chaotic

- Noisy Chaotic, and Random Behaviors", ASME J. of Applied Mechanics, Vol.63, pp. 509~516.
- (8) E. Simiu, 1996, "Melnikov Process for Stochastically Perturbed, Slowly Varying Oscillators: Application to a mode 1 of Wind-Driven Coastal Current", ASME J. of Applied Mechanics, Vol.63, pp. 429~435.
- (9) W. Y. Tseng, J. Dugundji, 1971, "Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam under Harmonic Excitation", ASME J. of Applied Mechanics, pp. 467~476.
- (10) D. M. Tang, E. H. Dowell, 1988, "On the Threshold Force for Chaotic Motions for a Buckled Beam", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 190~196.
- (11) N. S. Abhyankar, E. K. Hall, S. V. Hanagud, 1993, "Chaotic Vibrations of Beams: Numerical Solution of Partial Differential Equations", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 167~174.
- (12) F. C. Moon, 1980, "Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 638~644.
- (13) R. Mannella, V. Palleschi, 1989, "Fast and Precise Algorithm for Computer Simulation of Stochastic Differential Equation", Phys. Rev. A, Vol.40, No. 6, pp. 3381~3386.
- (14) W. Q. Zhu, Y. Q. Yang, 1996, "Exact Stationary Solutions of Stochastically Excited and Dissipated Integrable Systems", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 493~500.
- (15) H. Risken, 1989, The Fokker-Planck Equations: Methods of Solution and Applications, Spinger-Verlag, Berlin.
- (16) B. F. Spencer Jr., L. A. Bergman, 1993, "On the Numerical Solution of the Fokker-Planck Equation for Nonlinear Stochastic Systems", Nonlinear Dynamics, Vol.4, pp. 357~372.
- (17) W. Yi, S. F. Wojtkiewicz, L. A. Bergman, B. F. Spencer Jr., 1996, "Application of Infinite Element Method to Solution of the Fokker-Planck Equation", Proceedings of the 10th ASCE Engineering Mechanics Conference, Fort Lauderdale, Florida, May 19-22, pp. 685~688.
- (18) M. F. Wehner, W. G. Wolfer, 1983, "Numerical Evaluation of Path-Integral Solutions to Fokker-Planck Equations", Phys. Rev. A, Vol.27, No. 5, pp. 2663~2670.
- (19) T. T. Soong, M. Grigoriu, 1993, Random Vibration of Mechanical and Structural Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.