

< 논 문 >

레일의 상하방향 불규칙성에 의한 차륜과 레일의 동 접촉력

Dynamic Wheel/Rail Contact Force due to Rail Irregularities

이 현 엽*

H. Y. Lee

(1998년 1월 17일 접수 ; 1998년 7월 2일 심사완료)

Key Words : Dynamic Contact Force(동접촉력), Wheel/Rail Interaction(차륜/레일 상호작용), Receptance Method(리셉턴스 방법), Discretely Supported Timoshenko Beam(불연속 지지 티모셴코 보), Periodic Structure Theory(주기구조이론)

ABSTRACT

An analytical method has been developed to estimate the dynamic contact force between wheel and rail when trains are running on rail with vertical irregularities. In this method, the effect of Hertzian deformation at the contact point is considered as a linearized spring and the wheel is considered as an sprung mass. The rail is modelled as a discretely-supported Timoshenko beam, and the periodic structure theory was adopted to obtain the driving-point receptance. As an example, the dynamic contact force for a typical wheel/rail system was analysed by the method developed in this research and the dynamic characteristics of the system was also discussed. It is revealed that discretely-supported Timoshenko beam model should be used instead of the previously used continuously-supported model or discretely-supported Euler beam model, for the frequency range above several hundred hertz.

기 호 설 명

$\alpha_w(\omega)$: 차륜의 리셉턴스	K_d : 등가 동적 스프링상수
$\alpha_r(x, \omega)$: 레일의 가진점 위치가 x 일 때 가진점 리셉턴스	K_p : 패드의 스프링상수
C_p : 패드의 감쇠계수	L : 침목 간격
C_b : 발라스트의 감쇠계수	M_w : 차륜의 질량
$d(t)$: Hertzian 변형에 의한 상하방향 변위	M_s : 침목의 질량
K_H : 차륜과 레일의 접촉 변형을 고려한 스프링 상수	P : 차륜과 레일의 동접촉력의 진폭
K_b : 발라스트의 스프링상수	P_o : 차량의 자중에 의해 차륜에 걸리는 수직 정하중
	$p(t)$: 차륜과 레일의 동접촉력
	v : 차륜의 주행속도
	ω : 원주파수
	$w(x)$: 레일의 상하방향 불규칙량
	$w(t)$: 스프링과 레일 사이에 입력되는 불규칙량

* 정회원, 충남대학교 공과대학

- $y_w(x, t)$: 차륜의 상하방향 변위
- $y_r(x, t)$: 레일의 상하방향 변위
- λ : 레일의 상하방향 불규칙량의 파장
- δ : 레일의 상하방향 불규칙량의 진폭

1. 서론

철도차륜이 불규칙한 레일 위를 굴러가면, 차륜과 레일의 상호작용에 의해 차륜과 레일에 진동과 소음이 유발되며, 또한 차체에 전달되어 차체의 진동과 소음을 발생한다. 철도차량의 주행속도가 높아질수록 이로 인한 진동과 소음은 더욱 커지며, 고주파 영역의 진동해석이 요구된다. 환경에 대한 관심이 높아지면서, 이 분야에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다^(1,2).

본 연구에서는 주행시 차륜/레일의 고주파 동접촉력과 진동 특성을 해석하기 위하여, Fig. 1과 같은 리셉턴스(Receptance)모델⁽³⁾을 사용하였다. 접촉에 의한 변형은 Hertz의 이론을 적용하였고^(4,5), 차륜 상부에 대해서는 차륜의 관성력만을 고려해도 무방함을 설명하였다. 레일 하부에 대해서는, 레일을 침목 위치에서만 지지된 티모셴코 보 모델링하여 주기구조이론(periodic structure theory)을 사용하여 가진점 리셉턴스를 해석적으로 구하였다.

레일의 상하진동 문제는 Timoshenko⁽⁶⁾가 1926년에 균일 분포 스프링 위에 탄성지지된 무한 오일러 보로 해석한 논문을 발표할 정도로 매우 고전적인 문제이다. 그러나 이 같은 연속지지모델(continuously supported model)은 파장이 침목 간격보다 매우 긴 저주파 영역에서는 타당하지만⁽⁷⁾, 파장이 침목 간격보다 매우 길지 않은 고주파 영역에서는 연속지지모델보다는 침목의 위치에서만 지지된 불연속지지모델(discretely supported model)을 사용하여야 한다.

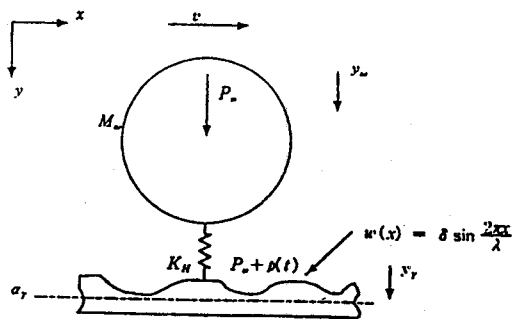


Fig. 1 Model of rolling wheel on rail

또한, Grassie⁽³⁾ 등은 불연속지지 오일러 보로 해석하였으나, 고주파 영역에서는 전단변형과 회전관성의 영향이 커지므로 이 영향에 대한 검토가 필요하다.

레일 위의 가진점은 차륜의 주행속도로 이동하므로, 레일의 가진점 리셉턴스를 구하기 위하여는 이동 가진원(moving source)에 대한 해석이 필요하다. 연속지지모델에서는 길이 방향으로 균일한 특성을 갖고 있으므로, 가진점을 따라가는 이동좌표계를 사용함으로써 큰 어려움 없이 해석적으로 가진점 리셉턴스를 구할 수 있다. 그러나, 불연속지지모델에서는 가진원의 이동을 고려하게 되면, 해석적인 해를 얻기가 용이하지 않으며, FEM을 사용하더라도 무한길이 레일의 모델링, 시간영역의 가진력 입력 등의 번거로움과 또한 가진점 리셉턴스를 수학적 함수로 얻지 못하고 수치로 갖게되는 어려움을 갖게 된다.

본 연구에서는 우선 연속지지 티모셴코 보 모델로 해석하는 기법을 전산화하여, 이동속도가 100 m/sec(시속 360 km)인 이동가진원에 대한 가진점 리셉턴스와 이동속도가 0인 고정가진원에 대한 가진점 리셉턴스를 비교한 결과, 이동속도의 영향은 무시할 수 있음을 확인하였다. 또한 레일을 오일러 보로 처리해도 되는가를 확인하기 위하여 연속지지 모델을 이용하여 검토한 결과, 수백 Hz 이상에서는 티모셴코 보로 처리하는 것이 타당함을 확인하였다. 따라서, 본 연구에서는 불연속지지 티모셴코 보 모델을 사용하되, 가진원의 이동속도의 영향을 무시함으로써 해석적 방법으로 레일의 가진점 리셉턴스를 구하였다. 이 기법을 이용하여 실제의 철도⁽³⁾에 대해 차륜과 레일의 동접촉력을 구했으며, 또한 진동 특성을 검토하였다.

2. 리셉턴스 모델

철도차륜이 상하방향으로 불규칙한 레일 위를 굴러갈 때 유발되는 차륜과 레일의 상하진동 해석을 위하여 Fig. 1과 같은 리셉턴스 모델⁽³⁾을 사용하였다. 차륜과 레일 사이의 스프링은 접촉영역에서의 Hertzian 변형^(4,5)을 고려한 것으로서 K_H 로 나타내었다.

차륜과 레일이 접촉하고 있다는 기하학적 적합조건으로부터, 차륜의 변위(y_w)는 다음 식과 같이 레일의 변위(y_r), 차륜/레일 접촉점의 상하방향 불규칙량(w), 스프링의 압축량(d)의 합으로 표

현할 수 있다.

$$y_w = y_r + w + d \quad (1)$$

w 는 레일의 상하방향 불규칙량으로서 다음과 같이 파장 λ 의 정현파형을 가정한다.

$$w(x) = \delta \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (2)$$

이 불규칙량 위를 차륜이 속도 v 로 주행하게 되면, 스프링과 레일 사이에 입력되는 불규칙량은 다음과 같이 시간의 함수로 표현된다.

$$w(t) = \text{Real} [\delta e^{j\omega t}] \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad (4)$$

불규칙량이 식 (3)과 같이 조화함수로 표현되면, 차륜과 레일 사이의 동 접촉력, d, y_w, y_r 모두 시간에 대한 조화함수로 표현되며, 차륜과 레일 사이의 동접촉력 또한 조화함수로 표현된다. 차륜과 레일 사이의 동 접촉력(압축력일 때 +)을 $p(t) = \text{Real} [P e^{j\omega t}]$ 라 하면, 스프링의 압축량은 다음과 같이 표현된다.

$$d(t) = \text{Real} \left[\frac{P}{K_H} e^{j\omega t} \right] \quad (5)$$

레일의 가진점 리셉턴스는 불연속지지 모델에서는 가진점의 위치에 따라 달라지므로, 주파수의 함수일 뿐 아니라 가진점 위치의 함수가 된다. 차륜의 주행속도로 가진점이 이동하게 되므로, $t=0$ 일 때 가진점 위치를 $x=0$ 로 하면 가진점의 위치는 $x=vt$ 가 된다. 차륜과 레일의 리셉턴스를 각각 $\alpha_w(\omega), \alpha_r(x, \omega)$ 이라 하면, y_w 와 y_r 은 다음 식으로 표현된다.

$$y_w(t) = \text{Real} [-\alpha_w(\omega) P e^{j\omega t}] \quad (6)$$

$$y_r(t) = \text{Real} [\alpha_r(x=vt, \omega) P e^{j\omega t}] \quad (7)$$

식 (3),(5),(6),(7)을 식 (1)에 대입하면, 아래와 같이 동 접촉력을 구할 수 있다.

$$p(t) = \text{Real} \left[\frac{-K_H \delta}{1 + K_H \{ \alpha_r(x=vt, \omega) + \alpha_w(\omega) \}} e^{j\omega t} \right] \quad (8)$$

다음 소절에서 α_w, α_r, K_H 를 산정하는 방법을 설명한다.

2.1 Hertzian 변형에 의한 스프링상수

Hertzian 접촉이론에 의하면^(4,5), 상하변위는 아래의 식과 같이 수직력의 2/3승에 비례하게 된다. 즉, 수직력(P)과 상하변위(y)는 비선형의 관계를 갖게된다.

$$y = \frac{P^{2/3}}{C} \quad (9)$$

본 문제의 경우, 차체의 자중에 의한 하중이 레일의 불규칙성에 의해 유발되는 동 접촉력에 비해 매우 크므로, 아래의 식과 같이 수직력이 자중에 의한 하중, P_o ,일 때에 대한 선형화된 스프링상수를 사용한다.

$$K_H = \frac{dP}{dy} = C P^{1/3} \approx C P_o^{1/3} \quad (10)$$

2.2 차륜 상부의 리셉턴스(α_w)

차량의 기본진동수는 수 Hz 미만이다. 따라서 차륜상부의 리셉턴스는 수 십 Hz 이상의 고주파 영역에서는, 차륜의 관성력에 의해 결정되므로 아래의 식으로 구한다.

$$\alpha_w = \frac{-1}{M_w \omega^2} \quad (11)$$

여기서, M_w 는 차륜의 질량이며, ω 는 원진동수이다.

2.3 레일하부의 리셉턴스 (α_r)

전철이나 고속철도에서는 콘크리트 침목(sleeper)을 사용하며, 침목과 레일 사이에는 패드를 사용하여 동하중의 전달을 억제한다. 따라서 레일과 침목의 상대변위가 존재하게 되는데, 그 영향을 고려하기 위하여 Fig. 2와 같이 모델링한다. 침목은 강성

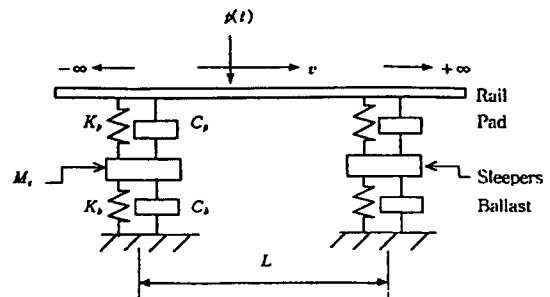


Fig. 2 Schematic diagram of rail support

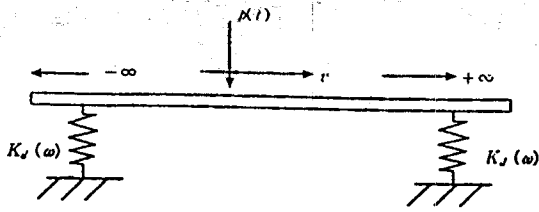


Fig. 3 Model of rail on discrete equivalent dynamic spring

은 없고 질량 (M_s)만을 갖는다. 레일과 침목 사이의 패드는 스프링 (K_p)와 감쇠 (C_p)로, 또한 침목 하부의 발라스트는 스프링 (K_b)과 감쇠 (C_b)로 모델링한다.

패드, 침목, 발라스트로 이루어지는 지지는 Fig. 3과 같이 하나의 등가 동적 스프링 (K_d)으로 처리할 수 있다. 그 값은 pad에 하중을 가할 때, 하중과 패드 변위와의 관계로 부터 구하는데, 그 결과는 다음과 같다.

$$K_d(\omega) = A/B \quad (12)$$

$$A = -M_s(K_p + j\omega C_p)\omega^2 + (K_p + j\omega C_p)(K_b + j\omega C_b) \quad (13)$$

$$B = -M_s\omega^2 + (K_p + j\omega C_p) + (K_b + j\omega C_b) \quad (14)$$

레일 위의 가진점은 차륜의 주행속도와 같은 속도로 이동하는데, 본 연구에서는 가진점의 이동속도는 무시하고 가진점에서의 리셉턴스를 구한다. 그 타당성은 3장에서 설명한다. Fig. 3에서 보듯이, 철도 레일은 균일한 간격으로 침목에 의해 지지되는 주기적 구조이다. 따라서, 본 연구에서는 주기구조이론(periodic structure theory)^(9,10)을 사용하였는데, 다음과 같은 과정으로 해석하였다.

티모셴코 보의 단면에서의 시스템벡타는 (처짐, 처짐각, 전단력, 모멘트)로 표현되는데, 우선 티모셴코 보의 좌측단에서 우측단으로의 전달매트릭스와 보의 우측단에서 스프링을 지나 다음 보의 좌측단으로의 전달매트릭스를 구하여, 이들을 결합함으로써 보의 우측단에서 다음 보의 우측단으로의 전달매트릭스를 구한다. 이 전달매트릭스를 이용하여 전파상수와 자유특성파를 구한 다음, 가진점에서의 적합조건을 이용하여 보의 변위를 구한다. 자세한 유도과정은 참고문헌 (11)에 정리되어 있다.

3. 계산 예

실제 계산에 필요한 입력자료는 참고문헌 (3)의 자료를 이용하였는데, Table 1에 주어져 있다. 차륜의 질량 350 kg은 British Rail에서 일반적으로 사용하는 수치이고, 차륜과 레일의 접촉강성을 나타내는 스프링상수 1.5 GN/m은 Deltic locomotive의 자료이다. 레일의 질량, 굽힘강성, 전단강성, 회전 관성 모멘트는 계산으로 얻은 수치이고, 그 외의 입력자료는 실험을 통한 계측치이다.

패드와 침목과 발라스트로 이루어지는 지지를 식 (12)로 계산한 동적 스프링상수의 실수 값은 정적 스프링상수를 의미하고, 허수부를 원주파수(rad/sec)으로 나눈 값은 감쇠계수를 의미한다. Fig. 4에 동적 스프링상수를 정적스프링 상수와 감쇠계수로 나타냈다. 주파수가 낮은 영역(100 Hz 미만)에서의 동적스프링 상수는, 침목질량과 감쇠의 영향이 없고 단지 패드의 스프링과 발라스트의 스프링이 직렬 연결된 값을 나타낸다. 1 kHz 이상의 고주파 영역에서는 스프링상수와 감쇠계수가 패드의 수치와 비슷한데 이는 침목이 움직이지 않는다는 것을 의미하며 주파수를 고려하면 패드의 스프링보다는 감쇠가 지배적임을 알 수 있다.

본 연구에서는 우선 가진원의 이동속도와 전단변

Table 1 Input parameters

Wheel mass	350 kg
Wheel/rail contact spring const.	1.5 GN/m
Rail mass	56 kg/m
Bending stiffness of rail	4.86 MNm ²
Shear stiffness of rail	201 MN
Mass moment of inertia of rail	0.1843 kgm ² /m
Spring constant of pad	260 MN/m
Damping coefficient of pad	63 kN/(m/sec)
Sleeper mass	110 kg
Sleeper span	0.698 m
Spring constant of ballast	180 MN/m
Damping coefficient of ballast	82 kN/(m/sec)

형/회전관성의 영향을 검토하기 위하여 연속지지 보 모델로 해석하는 기법을 전산화하여, Table 1의 자료에 대하여 레일의 가진점 리셉턴스를 구하였으며 그 결과를 Fig. 5에 실었다. 실선은 가진원의 이동속도가 100 m/sec(시속 360 km)인 이동가진원에 대해 티모셴코 보로 해석한 결과이며 점선은 가진원의 이동속도가 0인 고정가진원에 대해 티모셴

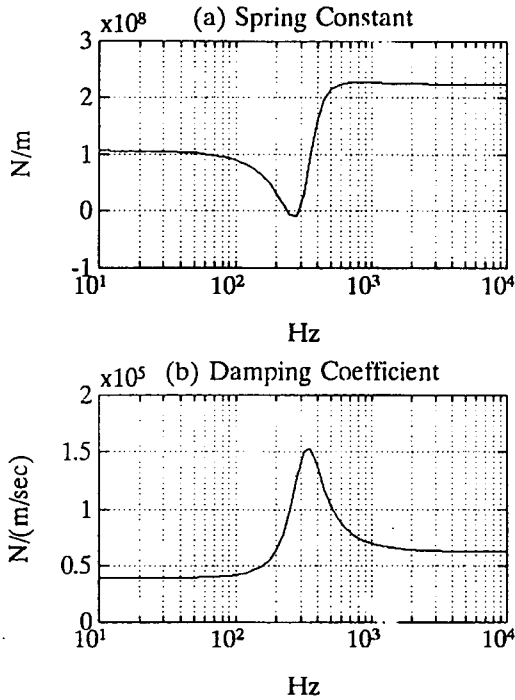


Fig. 4 Equivalent spring constant and damping coefficient for the rail support

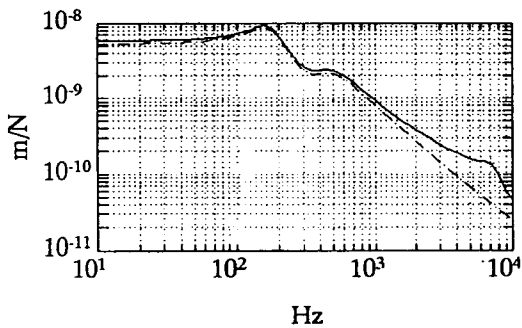


Fig. 5 Magnitudes of the driving-point receptance of the rail calculated by continuously supported model
 ----- : Timoshenko beam, 100 m/sec
 : Timoshenko beam, 0 m/sec
 : Euler beam, 0 m/sec

코 보로 해석한 결과인데, 그림에서 구별하기 힘들 정도로 일치한다. 그러나 오일러 보로 해석한 결과(일점쇄선)는 고주파로 갈수록 차이를 보인다. 즉, 레일의 가진점 리셉턴스를 구하는데 있어서, 가진원의 이동속도의 영향은 무시할 수 있으나, 전단변형과 회전관성의 영향은 고려하여야 함을 나타내고 있다.

Fig. 6은 불연속지지 티모셴코 보로 레일의 가진점 리셉턴스를 계산한 결과이다. 앞에서 설명한 바와 같이 가진원의 이동속도는 무시하였다. 이 경우에는 가진점의 위치에 따라 리셉턴스의 값이 달라지게 된다. 약 800 Hz 근처에서 큰 차이를 보이는

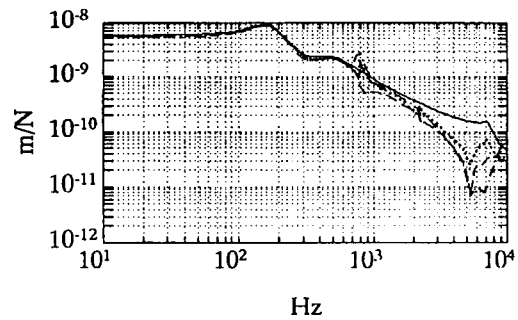


Fig. 6 Magnitudes of the driving-point receptance of the rail calculated by discretely supported Timoshenko beam model
 : at half span
 : at quarter span
 : at sleeper
 ----- : by continuous model

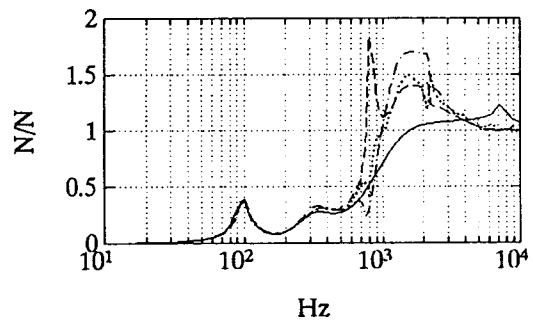


Fig. 7 Dynamic contact force normalized by $K_H \delta$
 : at half span
 : at quarter span
 : at sleeper
 ----- : by continuous model

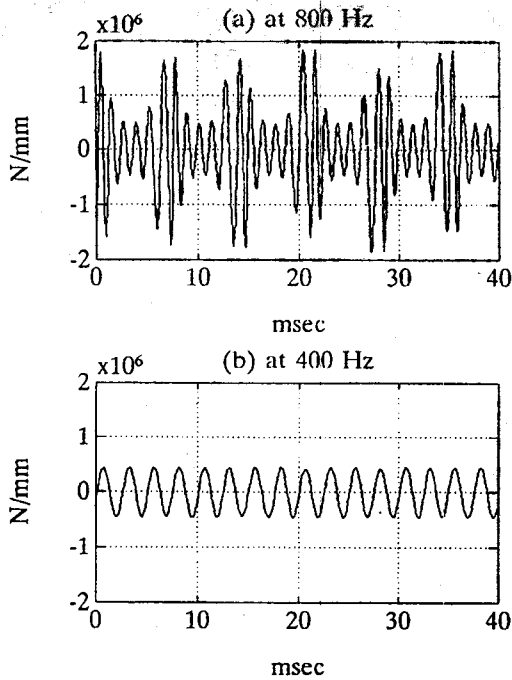


Fig. 8 Time history of contact force per unit vertical rail irregularities when speed is 100 m/sec

데, 이 주파수는 침목 사이의 한 스패인이 양단 단순 지지일 경우의 고유진동수와 일치한다. 스패인의 중앙(일점 쇄선)에서와 $L/4$ 지점(점선)에서 가진될 때는 공진에 의하여 800 Hz 근처에서 극값을 갖는다. 그러나 침목의 위치(쇄선)에서 가진할 때는 오히려 작은 값을 갖게 되는데, 이는 가진 위치가 가진 주파수에 대한 진동모드의 절점이기 때문이다. 참고로 연속지지 티모셴코 보로 해석한 결과를 실선으로 표시하였다.

Fig. 7에는 불연속지지 티모셴코 보로 해석한 경우의 동접촉력을 $K_H \delta$ 로 무차원화하여 나타냈다. 참고로 연속지지 티모셴코 보로 해석한 결과도 같이 나타냈다. 100 Hz 근처에서 극값은 차륜의 공진에 의한 것이다. 즉 100 Hz에서 레일의 리셉턴스는 Fig. 6에서 보면 약 7×10^{-9} m/N이므로 스프링 상수(리셉턴스의 역수)는 1.429×10^8 N/m이다. 이 스프링과 Herzian 변형을 나타내는 스프링 ($K_H = 1.5 \times 10^9$ N/m)이 직렬연결된 위에 차륜 질량 350 kg이 있을 때의 고유진동수는 약 100 Hz이다. 800 Hz 근처의 급격한 변화는 레일의 공진에 의한 것이다. 또한 5 kHz 이상에서는 무차원화된 접촉력이 1에 가깝다. 이것은 식 (11)과 Fig.

8에서 보면 고주파일수록 레일과 차륜의 리셉턴스가 작아지는데, 이럴 경우 식 (8)에서 보면 동접촉력은 $K_H \delta$ 에 가까워지기 때문이다.

Fig. 8(a)은 진폭이 1 mm이고 파장이 12.5 cm인 정현파형의 불규칙량 위를 100 m/sec의 속도로 주행할 때의 동접촉력을 시간에 따라 나타낸 것이다. 100 m/sec의 속도로 주행할 때 입력되는 주파수 (v/λ)는 800 Hz 이다. Fig. 6에서 보듯이 800 Hz에서는 가진점의 위치에 따라 레일의 리셉턴스가 차이가 나므로, 동접촉력에서는 진폭변조가 나타난다. 이런 현상은 연속지지 모델로는 나타날 수 없는 현상이다.

Fig. 8(b)는 진폭은 같고 파장이 두 배인 정현파형의 불규칙량 위를 같은 속도로 주행할 때의 동접촉력을 시간에 따라 나타낸 것이다. 이 경우 입력되는 주파수는 400 Hz 이다. Fig. 6에서 보듯이, 400 Hz에서는 가진점의 위치에 따라 레일의 리셉턴스가 차이가 별로 없다. 따라서, 이 경우에는 amplitude modulation이 나타나지 않는다.

4. 결 론

본 연구에서는 레일의 불규칙성에 의한 차륜과 레일의 동접촉력을 구하기 위하여, Fig. 1과 같은 모델⁽³⁾에 대해 리셉턴스 방법으로 해석하였다. 이 과정에서 레일의 가진점 리셉턴스를 구해야 되는데, 본 연구에서는 불연속지지 티모셴코 보 모델에 주기구조이론을 사용하여 이를 구하는 해석적인 방법을 개발하였다.

본 연구에서는 우선 연속지지 티모셴코 보 모델로 해석하는 기법을 전산화하여, 실제의 철도⁽³⁾에 대하여 가진원의 이동속도와 전단변형/회전관성이 레일의 가진점 리셉턴스에 미치는 영향을 검토한 결과, 전단변형/회전관성은 수백 Hz 이상의 고주파 영역에서는 무시할 수 없으나 가진원의 이동속도는 무시할 수 있음을 확인함으로써 본 모델의 타당성을 입증하였다.

본 연구에서 제시한 기법으로 실제의 철도⁽³⁾에 대하여 해석을 수행하였으며, 결과는 다음과 같다. 수백 Hz 이상의 고주파에 대해서는, 레일이 침목에서만 지지되는 불연속지지의 영향이 나타난다. 즉, 동접촉력은 진폭변조를 나타내는데 이런 현상은 침목사이의 하나의 span의 공진 주파수 근처에서 두드러진다. 이는 연속지지모델에서는 볼 수 없는 현상이다.

또한, 패드와 침목과 발라스트로 이루어지는 레일하부의 지지에 대해 동적 스프링상수를 계산한 결과, 주파수가 낮은 영역(100 Hz 미만)에서는 패드의 스프링과 발라스트의 스프링이 직렬로 연결되었을 때의 값과 같아지며, 이들이 레일 하부의 지지강성을 결정하는 주 파라미터가 된다. 1000 Hz 이상의 고주파 영역에서의 레일 하부의 지지강성은 패드의 감쇠에 의해 결정된다. 즉, 콘크리트 슬리퍼를 사용하는 경우 레일의 고주파 진동을 제어 하기 위하여는, 패드의 감쇠를 조절하는 것이 가장 효과적이다.

철도에 대한 실용적인 결과를 얻기 위하여는 침목지지 부위에 대한 해석, 패드재료의 주파수/온도의존특성 해석, 침목의 탄성모델, 또한 실제의 철도에서와 같이 여러 개의 차륜이 동시에 레일 위를 주행할 때에 대한 해석, 횡진동과의 연성등이 심도 있게 다루어져야 하는데, 이들은 향후과제로 남겨둔다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 '97 특정기초연구(95-0200-15-01-3)로 연구된 결과이다.

참 고 문 헌

- (1) Reimington, P., and Webb, J., 1996, "Estimation of Wheel/Rail Interaction Forces in the Contact Area due to Roughness", *J. of Sound and Vibration* 193(1), pp. 83~102.
- (2) Remington, P., Dixon, N. R., and Wittig, L., 1993, "Control of Wheel/Rail Noise and Vibration", U.S. Department of Transportation Report UMTA-MA-06-0099-82-5.
- (3) Grassie, S. L., Gregory, R. W. and Johnson, K. L., 1980, "The Harmonic Response of Railway Track to Vertical, Lateral, and Longitudinal Point Forces", Report No. CUED/C-Mech/TR18, Univ. Eng. Dept..
- (4) Hertz, H., 1895, "Gesamelte Werke", Leipzig Vol. 1, p. 155.
- (5) Grag, V. K., 1984, 'Dynamics of Rainway Vehicle Systems', Academic Press.
- (6) Timoshenko, S. P., 1926, "Method of Analysis of Statical and Dynamical Stress in Rails", 2nd Int. Congress of Applied Mechanics, Zurich, pp. 407~418.
- (7) Kerr, A. M., 1972, "The Continuously Supported Rail Subjected to an Axial Force and a Moving Load", *Int. J. Mech. Sci.* 14 pp. 71~78.
- (8) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W., 1974, 'Vibration Problems in Engineering', 4th edn., pp. 432~435, John Wiley, New York.
- (9) Engels, R. C., 1980, "Response of Infinite Periodic Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, pp. 181~197.
- (10) Mead, D. J., 1973, "A General Theory of Harmonic Wave Propagation in Linear Periodic Systems with Multiple Coupling", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 27, pp. 235~260.
- (11) 김정태 외 4인, 1997, '저소음 철도차량설계를 위한 핵심 기본기술연구', 한국과학재단 '96 특정기초연구(95-0200-15-01-3) 제 2 차년도 중간보고서.