

〈논 문〉

축방향력에 의한 축 플레이트계의 방사소음

Radiated Noise from a Shaft-Plate System by an Axial Force

박 찬 일* · Karl Grosh**

Chan Il Park and Karl Grosh

(1998년 6월 5일 접수 ; 1998년 9월 9일 심사완료)

Key Words : Radiated Noise(방사소음), Spectral Method(스펙트럴 법), Four-Pole Parameter(4단자 파라미터), Circular Plate(원형플레이트)

ABSTRACT

Analogous problem for a gear dynamics where helical gears excite longitudinal forces in the shaft is studied. These shaft forces excite the supporting gear housing through bearing, causing structural vibration. In this study, shaft is modeled as a rod, and bearing is modeled by a massless spring. A simple model for gear housing is a clamped circular plate. To model this force transmission, the transfer functions from the shaft to a clamped circular plate are analytically derived by using the spectral method and four-pole parameter. Finally, radiated noise is computed, using the acoustic relations due to plate surface vibration.

1. 서 론

기어소음은 기어 설계에서 고려하여야 할 가장 중요한 요소이다. 또한 환경소음에 대한 관심이 증가함에 따라 소음 저감의 요구가 많아지고 있다. 이러한 소음 저감에 대한 강조와 고객의 소음 인지도가 증가함에 따라 설계에서 기어 소음의 중요성은 최근 현저히 증가되고 있다. 기어가 동력전달을 위해 사용되는 곳에서 기어 소음은 특히 중요하다. 왜냐하면 기어소음이 순음에 가깝고 높은 음압수준을 가지며 주요 주파수가 귀의 가장 민감한 부분에 있기 때문이다.

기어의 소음은 기어치의 강성변화, 치형오차, 조립

오차 등에 의해 생겨서 축과 베어링을 통해 하우징(housing)을 통해 외부로 구조전달소음(structure borne noise)에 의해 주로 전달된다. 지금까지의 연구는 기어만을 모델링하여 치의 강성 변화나 치형 오차를 고려한 운동방정식을 유도하여 진동을 평가함으로써 기어소음을 유추하는 논문이 발표되고 있다^(1,2). 그러나 기어 소음은 기어만이 아니라 축, 베어링, 하우징에 의한 영향이 고려되어야만 정확한 평가가 가능하다는 것이 최근의 실험 논문에서 발표되고 있다⁽³⁾.

그러므로 이 연구에서 헬리컬기어의 축방향 조화 가진력에 의한 축, 베어링, 하우징의 영향을 해석적으로 검토하기 위해 축은 로드(rod)로써 베어링은 스프링으로 모델링하였다. 또한 실제 기어 하우징은 모드가 너무 복잡하여 그 진동 및 음향의 기본 특성을 설계자가 파악하기 어려우므로 기어 하우징을 단순화하면 양쪽이 막힌 원통으로 볼 수 있으며 그 중

* 정회원, 강릉대학교 공과대학 정밀기계학과

** University of Michigan, USA

에서 음향학적으로 가장 기여를 많이 할 것으로 기대되는 막힌 양쪽 판을 대상으로 고정된 원형 플레이트로 모델링하여 하우징의 기본 특성을 표현하였다. 축으로부터 플레이트까지 힘의 전달을 표현하기 위해 스펙트럴법을 사용하여 전달함수를 유도하였다. 최종적으로 플레이트 표면의 진동에 의한 음향학적 관계를 사용하여 방사소음을 계산하였다. 또한 플레이트의 재질 및 두께등의 파라미터를 변경하여 음압과의 상관관계를 조사하였다.

2. 해석 모델

Fig. 1은 본 해석에 사용된 모델이다. 이 모델에서 로드와 스프링 요소는 파의 전파를 묘사하기 위해 스펙트럴법으로 정식화된 요소(spectrally formulated element)를 사용하였다. 이 방법에 의한 요소는 구조물의 정확한 주파수에 의존한 강성을 표현하기에 적합하며 컴퓨터 매트릭스 전개에도 적합하다. 이러한 주파수 영역의 응답은 FFT(fast Fourier transform) 알고리즘을 사용하여 시간영역의 응답으로 변환된다. 기존의 유한요소법의 경우에는 질량관성 모멘트 분포가 적당히 모델링되기 위해서는 많은 요소가 사용되어야 한다. 결과적으로 동력학 문제를 풀기 위해 필요한 요소의 수는 같은 정력학 문제에 필요한 요소보다 더 크게 된다. 반면에 스펙트럴법으로 정식화한 요소들은 분포된 질량을 정확히 취급한다.

또한 이 방법은 조인트 사이에 특별히 균열이 없다면 한 요소로 충분히 모델링하는 것이 가능하다. 이것은 실질적으로 시스템의 미지 자유도를 줄인다. 본질적으로 멤버안에 복잡한 파전파가 조인트 거동

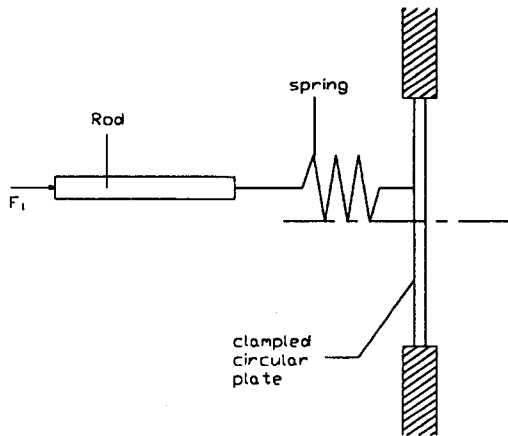


Fig. 1 Model for a shaft-plate system

에 의해서 완전히 묘사된다⁽⁴⁾. 특히 이것은 충격과 같은 고주파수를 포함하는 경우에 잘 적용할 수 있다.

각 요소의 전달함수는 4단자 파라미터(four-pole parameter)에 의해 묘사되었다. 즉 시스템의 입력측이 가진력 F_1 에 응답하여 변위 U_1 으로 조화적으로(sinusoidally) 진동하고 시스템의 출력측이 다음 시스템의 입력측에 힘 F_2 변위 U_2 를 발휘한다고 가정하자. 그러면 시스템은 입력단자에 힘 F_1 과 변위 U_1 은 출력단자에 힘 F_2 와 변위 U_2 를 생산하는, 입력단자와 출력단자를 가지고 있다고 말할 수 있다. 입력측과 출력측의 힘과 변위를 연결하는 4단자 시스템은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_2 &= a_{11} F_1 + a_{12} U_1 \\ U_2 &= a_{21} F_1 + a_{22} U_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 는 4단자 파라미터이다.

$U_2 = 0$ 는 출력측 단자가 막혀있다는 것을 의미하고 $F_2 = 0$ 는 출력측 단자가 구속조건이 없는 자유로운 상태임을 의미한다. 파라미터 a_{11}, a_{22} 는 무차원 양이고, a_{12} 와 a_{21} 는 차원이 있는 양이다. 일반적으로 4단자 파라미터는 주파수에 의한 복소수 양이다. 장점은 이미 결정된 시스템에 의해 특정되어지고 앞의 시스템이나 뒤의 시스템에 의해 영향을 받지 않는다는 점이다⁽⁵⁾.

이 연구에서 축은 축방향 하중만 전달하므로 로드로 모델링하여 이 4단자 파라미터를 유도하였다. 베어링 강성의 모델은 베어링 축방향 강성만을 선형화시켜 4단자 파라미터를 유도하였다.

로드 요소의 4단자 파라미터로 이루어진 전달함수는 스프링 요소의 입력이 되므로 두 전달함수를 곱하여 원형 플레이트로 전달되는 힘과 변위를 구한다. 이 힘의 가진에 의한 구조 진동응답을 구한 다음 원형 플레이트로부터 방사되는 음압을 계산한다.

2.1 로드 요소

로드의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

$A(x) = A$ 로 일정하다고 가정하고 $u(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ 로 표현하면 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k_r^2 u = 0 \quad (3)$$

여기서

$$c_r = \sqrt{E/\rho}, \quad k_r = \omega/c_r$$

E = 탄성계수, ρ = 밀도

이러한 파 방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$u = C \cos(k_r x) + D \sin(k_r x) \quad (4)$$

길이 l 인 로드의 입력측 힘과 변위 출력측의 힘과 변위를 식 (4)에 대입하여 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ U_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$a_{11}^1 = \cos(k_r l)$$

$$a_{12}^1 = zw \sin(k_r l), \quad z = \sqrt{E\rho}A$$

$$a_{21}^1 = -\sin(k_r l)/zw$$

$$a_{22}^1 = \cos(k_r l)$$

2.2 스프링 요소

로드와 같은 방법으로 스프링요소의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서

K = 스프링의 강성

$$a_{11}^2 = 1$$

$$a_{12}^2 = 0$$

$$a_{21}^2 = -1/K$$

$$a_{22}^2 = 1$$

2.3 고정된 원형 플레이트 요소

r = a에서 고정된 원형 플레이트가 W(r, θ, t) = W(r, θ)e^{iωt}로 거동하고 r = r₀, θ = θ₀에 집중하중 F₃가 작용한다고 가정하면 지배방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 W - \rho h \omega^2 W = F_3 \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) / r \quad (7)$$

여기서

$$D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

h = 플레이트의 두께

ν = 포아송 비

식(7)의 강제 진동 응답은 플레이트 모드의 직교성을 이용하여 구할 수 있으며 이를 위하여 모드를 계산할 수 있는 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^4 W - \beta^4 W = 0, \quad \beta^4 = \omega^2 \rho h / D \quad (8)$$

r = 0에서 유한해야 된다는 조건하에 식(8)의 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$W(r, \theta) = [A_{1m} J_m(\beta r) + C_{1m} I_m(\beta r)] \sin(m\theta) + [A_{2m} J_m(\beta r) + C_{2m} I_m(\beta r)] \cos(m\theta) \quad (9)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

고정된 원형 플레이트의 경계조건 W(a, θ) = ∂W(a, θ)/∂r = 0에 의한 특성방정식은 다음과 같다.

$$I_m(\beta a) J'_m(\beta a) - J_m(\beta a) I'_m(\beta a) = 0 \quad (10)$$

m의 각 값에 대하여 특성방정식의 근 β_{mn}을 구하고 각 주파수에 대해 대응하는 두 개의 정규모드는 다음 식으로 주어진다.

$$W_{mn}(r, \theta) = H_{mn}(\beta_{mn} r) (A_{1m} \sin(m\theta) + A_{2m} \cos(m\theta)) \quad (11)$$

여기서

$$H_{mn}(\beta_{mn} r) = J_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} a)}{I_m(\beta_{mn} a)} I_m(\beta_{mn} r)$$

모드의 직교성을 이용하여 A_{1m}은 다음 식으로 구해진다.

$$A_{1m} (\beta_{mn}^4 - \beta^4) \int_0^{2\pi} \int_0^a H_{mn}^2 \sin^2(m\theta) r dr d\theta = 1/D \times \int_0^{2\pi} \int_0^a F_3 \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) H_{mn} \sin(m\theta) dr d\theta \quad (12)$$

A_{2m}도 식 (12)에서 sin(mθ)대신 cos(mθ)를 대입하여 구한다. 구한 결과를 식 (11)에 대입하면 플레이트 평면에 수직한 변위는 다음과 같이 된다.

$$W(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_3 H_{mn}(\beta_{mn} r_0) H_{mn}(\beta_{mn} r)}{\epsilon \pi a^2 (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \Lambda_{mn}} \times \cos(m\theta - m\theta_0) e^{i\omega t} \quad (13)$$

여기서

$$\Lambda_{mn} = \rho h [J_m^2(\beta_{mn} a) + I_m^2(\beta_{mn} a)]^{[6]}$$

$$\text{if } m > 0 \quad \epsilon = 1$$

$$\text{if } m = 0 \quad \epsilon = 2$$

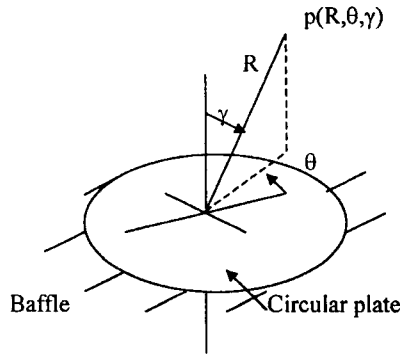


Fig. 2 Coordinate system

2.4 방사음압

플레이트 위의 (r_o, θ_o) 에 위치한 집중하중에 의해 가진된 고정된 원형 플레이트는 무한 배플(baffle)에 설치되어 있고 플레이트 진동에 의한 소음은 공기 중으로 방사된다. 플레이트 진동 모드 (m, n) 에 기인한 방사음압 관계식은 모드 변위크기에 의해 원거리 음장(far field)에서 레일리 적분(Rayleigh integral)을 사용하여 Fig. 2의 구면 좌표계에서 다음식으로 표현된다^(7,8).

$$p(R, \theta, \gamma) = \frac{\rho_o \omega^2 F_3}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^m H_{mn}(\beta_{mn} r_o)}{\epsilon \pi \Lambda_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \times \cos(m\theta - m\theta_o) \Delta e^{i\omega t - ik_o R} \quad (14)$$

여기서

ρ_o = Air density

k_o = Wave number in air

$$\Delta = \int_0^1 H_{mn}(\beta_{mn} r) J_m(k_o r \sin \gamma) (r/a) d(r/a)$$

3. 해석결과 및 토의

수치 계산을 위하여 직경 0.05 m와 길이 0.5 m를 가진 강제 로드 사용되고 6000 N의 조화 가진력이 로드에서 적용된다. 테이퍼 로울러 베어링의 축방향 강성을 선형화하여 스프링 강성으로 0.4×10^9 N/m을 사용하였다⁽⁹⁾. 반경 0.5 m와 두께 0.0025 m를 가진 알루미늄 원형 플레이트가 축에 연결되었고 그의 위치는 플레이트 상의 $r_o = 0.1, \theta_o = 0$ 이다. 방사되는 음향 매질은 공기이고 이 시스템 수치계산에 사용된 재질은 Table 1과 같다.

플레이트의 변위를 구하기 위해 고유치가 먼저 계산되어야 한다. 이를 위하여 25모드 ($m = 4, n = 5$)

Table 1 Material properties

Material	E (GPa)	ρ (kg/ m ³)	ν
Steel	206	7700	0.29
Aluminum	71	2700	0.33
Magnesium	44.8	1796	0.35
Air		1.21	

Table 2 Eigenvalues of circular plate, $\beta_{mn}a$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
0	3.169	6.306	9.440	12.577	15.716
1	4.611	7.799	10.958	14.109	17.256
2	5.906	9.197	12.402	15.580	18.744
3	7.144	10.537	13.795	17.005	20.192
4	8.347	11.837	15.150	18.396	21.608

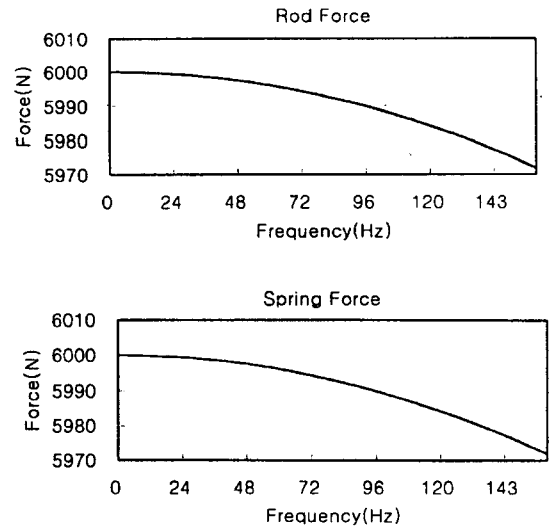


Fig. 3 Rod force and spring force

가 식 (10)에 의해 구해졌으며 그 값은 Table 2에 표시하였다.

플레이트로부터 방사된 음압은 플레이트 모드를 고려하여 주파수 영역 0에서 160 Hz까지 계산하였다. 음압을 계산할 때 적분 Δ 이 먼저 계산되어야 하고 이는 Hansen의 결과⁽⁸⁾를 수정하여⁽¹¹⁾ 사용하였다. 음압은 dB로 표현하였고 계산은 MATLAB을 사용하여 개인용 컴퓨터에서 하였다.

Fig. 3은 로드 끝에 작용된 힘과 플레이트에 전달

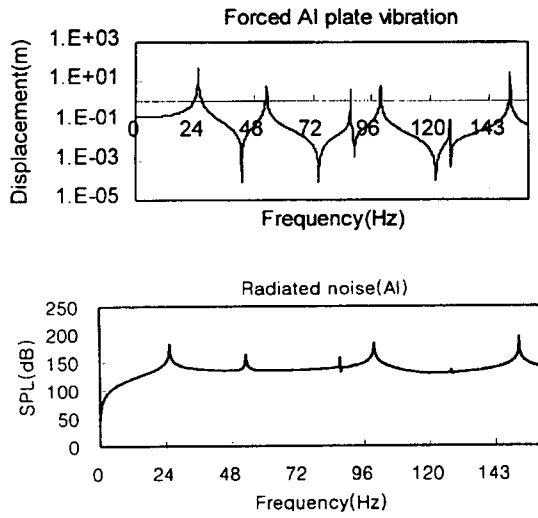


Fig. 4 Plate vibration and radiated noise

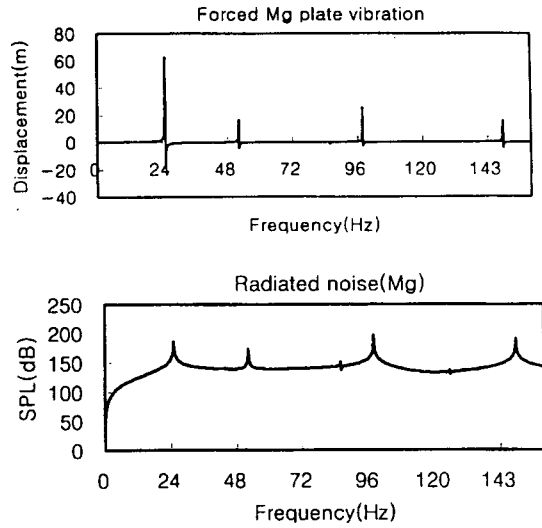


Fig. 6 Magnesium plate

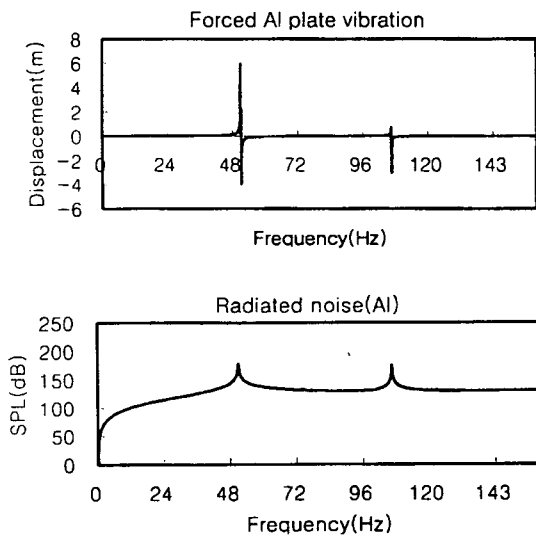


Fig. 5 Vibration and noise at thickness 0.05 m

된 스프링 힘이다. 조사된 주파수 영역에서 주파수가 증가할수록 로드 힘과 스프링 힘이 같은 양으로 단조 감소하고 있음을 알 수 있다. 이것은 스프링 강성이 0에서 160Hz까지의 주파수 영역에서는 시스템에 영향을 끼치지 않는 저역통과필터(low pass filter)로 작용함을 알 수 있다.

Fig.4의 위 그림은 가진 점을 의미하는 $r=0.1$ m, $\theta=0$ 에서의 플레이트의 변위응답을 작은 피크도 볼 수 있도록 대수눈금으로 표시한 것이고 아랫그림은 $R=2$ m, $\gamma=45^\circ$, $\theta=0$ 에서의 음압레벨을

선형눈금으로 표시한 것이다. 그 결과 진동의 피크(peak)는 항상 같은 주파수에서 음압의 피크도 발생시키며, 특히 127 Hz에서 다른 변위에 비해 진동의 변위가 0.1로 극히 작더라도 음압은 비교적 큰 피크를 가진다.

플레이트의 두께를 0.005 m로 두배 증가시켰을 때의 진동과 음압의 관계를 Fig. 5에 도시하였다. 두께가 0.0025 mm 이었을 때는 6개의 피크를 가지는 것에 반해 여기에서는 단지 2개 만의 피크를 가지는 것을 볼 수 있다.

플레이트의 재질을 알루미늄에서 최근 경량화를 위해 하우징 재질로 고려되고 있는 마그네슘으로 변경하였을 때의 특성을 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 마그네슘으로 재질을 변경하여도 알루미늄과 비슷한 주파수 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 그러므로 조사된 주파수 대역에서 NVH 관점에서 재질 변경은 큰 문제가 없는 것으로 생각된다. 또한 두께의 변경이 재질의 변경보다 더 큰 주파수 변화를 주는 것을 알 수 있다.

4. 결론 및 요약

이 연구에서, 고정된 원형 플레이트, 스프링, 로드 시스템으로 모델링된 기어 동력학의 유추 문제를 검토하였다. 로드와 스프링의 전달함수를 스펙트럴 법과 4 단자 시스템을 사용하여 유도하였고 원형 플레이트의 강제진동 문제를 해석하였다. 또한 배플에 설치되어 있는 플레이트로부터의 방사 소음이 원거

리 음장에서 계산되었다.

이 모델로 방사소음에 대한 로드, 스프링, 플레이트 요소의 기여도를 조사한 결과 플레이트의 진동이 로드와 스프링의 진동보다 방사 소음에 더 중요하였다. 그리고 플레이트의 알루미늄 재질과 마그네슘 재질의 NVH 상의 특성을 비교하고 두께의 변경을 할 때의 특성을 검토할 때 두께 변경이 진동, 소음에 더욱 민감함을 알 수 있었다. 이 연구는 설계 단계에서 기어 및 변속기 소음을 예측하는 데 사용하기 위한 첫단계 연구로써 차후 기어의 반경반향 하중을 고려하고 더욱 복잡한 하우징 모델을 사용하여 정도를 향상시킬 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Özgüven, H. N. and Houser, D.R., 1988, "Mathematical Models Used in Gear Dynamics-A Review," Journal of Sound and Vibration, Vol. 121, No.3, pp. 383~411.
- (2) 박찬일, 이장무, 1996, "치형오차를 가진 헬리컬 기어의 진동특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집(A) 제 20 권 제 5 호, pp. 1534~1542.
- (3) Park, C.I. and Lee, J.M., 1996, "Vibration Transmission Characteristics of Helical Gear System with Lead Error," ASME International Mechanical Engineering Congress, Georgia, Atlanta, USA, pp. 109~116.
- (4) Doyle, J.F. and Farris, T.N., 1990, "A Spectrally Formulated Element For Wave Propagation in 3-D Frame Structures," International Journal of Analytical Experimental Modal Analysis Vol. 5, No. 4, pp. 223~237.
- (5) Snowdon, J.C., 1971, "Mechanical Four-Pole Parameters and Their Application," Journal of Sound and Vibration, Vol. 15, No. 3, pp. 307~323.
- (6) Morse, P.M. and Ingard, K. U., 1968, Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, NY.
- (7) Fuller, C.R., 1990, "Active Control of Sound Transmission/Radiation From Elastic Plates by Vibration Inputs," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 1~15.
- (8) Hansen, C.H. and Bias, D.A., 1976, "Optical Holography for the Study of Sound Radiation From Vibrating Surfaces," The Journal of the Acoustical Society of America Vol. 60, No. 3 pp. 543~555.
- (9) Rautert, J. and Kollmann, F.G., 1989, "Computer Simulation of Dynamic Forces in Helical and Bevel Gears," Proceedings of 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Vol. 1, pp. 435~446.
- (10) Graff, K.F., 1991, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, NY.
- (11) McLachlan, N.W., 1941, Bessel Functions for Engineers, Oxford University, London.
- (12) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan, NY. Chap.5,7.