

〈논 문〉

## 출력 소음을 고려한 직접방사형 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명

Identification of Nonlinear Parameters of Electrodynamical Direct-Radiator  
Loudspeaker with Output Noise

박 석 태\* · 홍 석 윤\*\*

Seok-Tae, Park and Suk-Yoon, Hong

(1998년 5월 27일 접수 : 1998년 7월 9일 심사완료)

**Key Words :** Loudspeaker(라우드스피커), Harmonic Balance Method(하모닉 발란스법), Gaussian Probability Distribution Function(가우스 확률 밀도 함수), Harmonic Distortion(고조파 왜곡), Lagrange Multiplier Method(라그랑지 배수법), Maximum Likelihood Estimation(최대 우도법), Nonlinear Parameter (비선형 매개변수)

### ABSTRACT

It has been resulted that Lagrange multiplier method with statistical approach was superior to traditional harmonic balance method in identifying the nonlinear loudspeaker parameters when output signals were contaminated with Gaussian random noise. We have known that the displacement-dependent characteristic values of nonlinear parameters identified by traditional harmonic balance method were estimated less than original values by the increase of output noise and the stiffness coefficients were very sensitive to output noise. Also, by the sensitivity analysis we have verified that the harmonic distortions in acoustic radiation was mainly due to nonlinearity of force factor caused by uneven magnetic fields and that reducing the nonlinearity of damping coefficients were very effective for improving second harmonic distortion of acoustic radiation.

### 1. 서 론

자동차 오디오 및 각종 오디오 시스템은 방송을 수신하는 튜너부와 이를 증폭하는 앰프 및 소리를 발생시켜 주는 출력부인 라우드스피커로 구성되어 있다. 같은 가격 대의 튜너나 앰프의 성능은 거의 대

등하므로 소리 발생기인 라우드스피커의 특성이 음질 성능에 크게 기여한다고 볼 수 있다. 전자공학 기술의 눈부신 발달로 오디오 헤드 유닛의 전기적 왜곡 특성은 놀랍게 개선되고 있으며 이에 대응하는 전기, 기계 및 음향의 복합 시스템인 라우드스피커 성능 개선에 대한 소비자들의 요구가 점점증하고 있다. 고풍력 오디오에서는 저주파수 음역에서 귀에 거슬리는 음을 듣게 되는 경우가 있는데 이는 주로 라우드스피커 다이어프램의 비선형 특성에 기인한다. 따라서, 비선형 왜곡이 작은 제품이 고급품으로 여겨지며 이러한 제품을 만들기 위한 설계 기술이

\* 정회원, 아주대학교 공과대학 시스템공학과  
고등기술연구원 자동차기술연구소

\*\* 정회원, 서울대학교 공과대학 조선해양공학과

라우드스피커 제조 회사의 자산이며 첨단 기술로 인식되고 있다.

비선형 왜곡으로 인한 음의 찌그러짐을 해결하기 위하여 라우드스피커를 구성하는 비선형 매개변수에 대한 연구가 진행되어 왔다. Olson은 다이아프램의 비선형 지지 스프링(suspension)과 라우드스피커 상자 내의 공기에 의한 비선형 컴플라이언스에 대한 이론적 해석을 하여 지지 스프링 및 공기에 의한 복원력을 각각 다이아프램 변위의 3차 및 2차 다항식으로 표현하고 근사해법으로 해석하였다<sup>(1)</sup>. Ashley와 Swan은 Beranek의 라우드스피커에 대한 이론에 근거하여 실험적으로 선형 매개변수를 구하였다<sup>(2)</sup>. Harwoods는 자장에 의한 비선형성, 도플러(doppler) 왜곡, 통기구의 비선형성등에 대한 연구를 하였다<sup>(3)</sup>. Kaizer는 시스템의 선형 및 비선형 매개변수를 정적인 시험을 통하여 측정하였고, 힘 요소(force factor), 지지 스프링의 강성 계수 및 자기인덕턴스(self-inductance)를 변위의 2차 다항식으로 표현하여 비선형 미분방정식에 대입한 후에 Volterra 급수 전개법과 조화탐사법(harmonic probing method)을 사용해 시스템의 고차 주파수 응답을 구하여 라우드스피커의 여러 비선형 특성을 해석하였다<sup>(4)</sup>. Klippel은 선형 및 비선형 매개변수를 정, 동적 시험을 하여 구한 후 Kaizer의 방법을 이용해 지지 스프링 및 힘 요소가 주요 비선형 특성의 진원이라 생각하여 이를 변위의 2차 다항식으로 가정한 후 하모닉 발란스법을 사용하여 비선형 미분방정식의 해를 구하였다. 또한 시불변 비선형계에 Volterra 급수 전개를 사용하여 고차 시스템 전달 함수를 구한 후 하모닉 왜곡 및 상호 변조(intermodulation)분석을 수행하였다<sup>(5)</sup>.

앞서의 연구자들은 선형 및 비선형 매개변수를 정, 동적으로 먼저 구한 후에 비선형 특성 파악을 위하여 비선형 미분방정식의 해를 구하는 등의 비선형특성에 비중을 둔 반면에, 힘 요소, 지지 스프링의 강성 계수 및 감쇠 계수를 변위의 2차 다항식으로 가정하고 하모닉 발란스법을 라우드스피커의 비선형 방정식에 적용하여 비선형계수들을 규명하려는 시도도 있었으나<sup>(6)</sup>, 이러한 집중 질량계로 라우드스피커를 모델링하고 하모닉 발란스법으로 비선형 매개변수를 규명하려는 방법은 출력에 소음이 없다는 가정하에 이루어 졌다.

Yasuda등은 비선형계에서는 출력 소음이 있는 경우에는 하모닉 발란스법을 사용하여도 매개변수 규명에 부정확성이 있음을 보이고 이를 개선하기 위하여 통계적 방법을 도입하여 Duffing 진자 및 2자유

도계에 적용하여 좋은 결과를 얻었다<sup>(7,8)</sup>.

본 논문에서는 라우드스피커를 집중질량계로 모델링하고, 기존의 하모닉 발란스법을 이용한 매개변수 규명과 통계적 접근법을 도입하여 비선형 매개변수를 규명하는 방법의 타당성을 출력 소음의 유, 무에 따라 비교하여 출력 소음이 있는 경우에는 통계적 접근법을 사용하여 규명하는 것이 타당함을 검토하였으며, 또한 민감도 해석으로 출력 소음의 크기에 따른 매개변수의 추이를 고찰하였다.

## 2. 하모닉 발란스법에 의한 출력 소음이 없는 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명

라우드스피커의 경우, 저주파수 영역에서는 집중 질량계로서 모델링을 할 수 있다. 다이아프램의 변위는 가진 전압이 낮은 경우에는 선형적으로 비례하지만 높은 가진 전압에서는 비선형 특성을 나타낸다. 변위의 비선형성은 라우드스피커를 구성하는 시스템 매개변수의 변위에 대한 비선형성에서 기인한다. 이러한 비선형 특성은 대략 변위의 2차 항까지를 고려하면 된다고 알려져 있다. 라우드스피커에 대한 비선형 미분방정식은 다음과 같이 표현 할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$L \dot{i} + R i + d(x) \dot{x} = e \quad (1)$$

$$m \ddot{x} + b(x) \dot{x} + c(x)x = d(x) i \quad (2)$$

여기서,

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad (3a)$$

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (3b)$$

$$d(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 \quad (3c)$$

$$\dot{b}(x) = b_1 \dot{x} + 2b_2 x \dot{x} \quad (4a)$$

$$\dot{c}(x) = c_1 \dot{x} + 2c_2 x \dot{x} \quad (4b)$$

$$\dot{d}(x) = d_1 \dot{x} + 2d_2 x \dot{x} \quad (4c)$$

로 표현된다. 하모닉 발란스 방법을 윗식에 적용하기 위하여 주파수 성분의 3차 하모닉성분까지를 고려하고 입력전압을  $e(t)$ , 출력전류를  $i(t)$ , 그리고 다이아프램변위를  $x(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0 + |E_1| \cos(\omega t + \phi_{E_1}) + |E_2| \cos(2\omega t + \phi_{E_2}) \\ &\quad + |E_3| \cos(3\omega t + \phi_{E_3}) \\ &= E_0 + \frac{1}{2} (E_1 e^{j\omega t} + E_2 e^{j2\omega t} + E_3 e^{j3\omega t} \\ &\quad + E_1^* e^{-j\omega t} + E_2^* e^{-j2\omega t} + E_3^* e^{-j3\omega t}) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= I_0 + |I_1| \cos(\omega t + \phi_{I_1}) + |I_2| \cos(2\omega t + \phi_{I_2}) + |I_3| \cos(3\omega t + \phi_{I_3}) \\
 &= I_0 + \frac{1}{2} (I_1 e^{j\omega t} + I_2 e^{2j\omega t} + I_3 e^{3j\omega t} + I_1^* e^{-j\omega t} + I_2^* e^{-2j\omega t} + I_3^* e^{-3j\omega t})
 \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= X_0 + |X_1| \cos(\omega t + \phi_{X_1}) + |X_2| \cos(2\omega t + \phi_{X_2}) + |X_3| \cos(3\omega t + \phi_{X_3}) \\
 &= X_0 + \frac{1}{2} (X_1 e^{j\omega t} + X_2 e^{2j\omega t} + X_3 e^{3j\omega t} + X_1^* e^{-j\omega t} + X_2^* e^{-2j\omega t} + X_3^* e^{-3j\omega t})
 \end{aligned} \quad (5c)$$

로 표현할 수 있는데, 식 (3) ~ (5)를 식 (1)과 (2)에 대입하고 같은 차수의 하모닉계수를 비교하여 정리하면 다음과 같으며

$$A S = B \quad (6)$$

식 (6)의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = [A^T A]^{-1} A^T B \quad (7)$$

여기서,

$$S = \{L \ R \ m \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ c_0 \ c_1 \ c_2 \ d_0 \ d_1 \ d_2\}^T \quad (8a)$$

$$A = [A_1^T \dots A_i^T \dots A_N^T]^T \quad (8b)$$

$$B = \{B_1^T \dots B_i^T \dots B_N^T\} \quad (8c)$$

$$N : \text{가진 주파수의 경우 수} \quad (8d)$$

이며,  $A_i$  와  $B_i$  는 부록에 정리하였다.

입력 전압에 대하여 전류와 변위의 복소 하모닉성분을 구하기 위한 반복 대입법을 사용할 수 있도록 식 (6)을 다음과 같은 식으로 표현할 수 있는데

$$\begin{aligned}
 I_{i0} &= \frac{1}{R} \left[ E_0 + \frac{1}{2} E_2 X_0^2 + \frac{1}{4} E_2 (X_1 X_1^* + X_2 X_2^* + X_3 X_3^*) \right]
 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned}
 I_{i1} &= \frac{2}{R + AL} \left[ \frac{1}{2} E_1 - (d_0 A_{2,10} + d_1 A_{2,11} + d_2 A_{2,12}) \right]
 \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned}
 I_{i2} &= \frac{2}{R + 2AL} \left[ \frac{1}{2} E_2 - (d_0 A_{3,10} + d_1 A_{3,11} + d_2 A_{3,12}) \right]
 \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned}
 I_{i3} &= \frac{2}{R + 3AL} \left[ \frac{1}{2} E_3 - (d_0 A_{4,10} + d_1 A_{4,11} + d_2 A_{4,12}) \right]
 \end{aligned} \quad (9d)$$

$$\begin{aligned}
 X_{i0} &= -\frac{1}{c_0} [c_1 A_{5,8} + c_2 A_{5,9} + d_0 A_{5,10} + d_1 A_{5,11} + d_2 A_{5,12}]
 \end{aligned} \quad (9e)$$

$$\begin{aligned}
 X_{i1} &= -\frac{2}{c_0 - mQ + b_0 P} \times [b_1 A_{6,5} + b_2 A_{6,6} + c_1 A_{6,8} + c_2 A_{6,9} + d_0 A_{6,10} + d_1 A_{6,11} + d_2 A_{6,12}]
 \end{aligned} \quad (9f)$$

$$\begin{aligned}
 X_{i2} &= -\frac{2}{c_0 - 4mQ + 2b_0 P} \times [b_1 A_{7,5} + b_2 A_{7,6} + c_1 A_{7,8} + c_2 A_{7,9} + d_0 A_{7,10} + d_1 A_{7,11} + d_2 A_{7,12}]
 \end{aligned} \quad (9g)$$

$$\begin{aligned}
 X_{i3} &= -\frac{2}{c_0 - 9mQ + 3b_0 P} \times [b_1 A_{8,5} + b_2 A_{8,6} + c_1 A_{8,8} + c_2 A_{8,9} + d_0 A_{8,10} + d_1 A_{8,11} + d_2 A_{8,12}]
 \end{aligned} \quad (9h)$$

여기서,

$$P = j\omega_i \quad (10a)$$

$$Q = \omega_i^2 \quad (10b)$$

$I_{ij}$  :  $\omega = \omega_i$ 로 계를 가진하여 얻은 전류의  $j$ 차 복소 하모닉 성분

$X_{ij}$  :  $\omega = \omega_i$ 로 계를 가진하여 얻은 변위의  $j$ 차 복소 하모닉 성분

을 의미한다. 반복 대입법을 식 (9a ~ h)에 적용하여 식 (8b)의 행렬  $A$ 를 구하고, 식 (7)을 이용하여 비선형 스피커 매개변수인  $S$ 를 구할 수 있다. 그런데, 식 (8a ~ c)을 보면 행렬  $A$ 와 벡터  $B$ 의 성분들은 복소수이고  $S$ 의 성분들은 실수가 되므로 식 (6)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C S = D \quad (11)$$

여기서,

$$C = [C_1^T \dots C_i^T \dots C_N^T]^T \quad (12a)$$

$$C_i = [\text{Re}(A_i^T) \ \text{Im}(A_i^T)]^T \quad (12b)$$

$$D = [D_1^T \dots D_i^T \dots D_N^T]^T \quad (12c)$$

$$D_i = [\text{Re}(D_i^T) \ \text{Im}(D_i^T)]^T \quad (12d)$$

이다. 윗식에서  $C_i$ 는  $16 \times 12$  행렬,  $D_i$ 는  $16 \times 1$ 인 벡터이므로 방정식의 수는 16개이고, 구하고자 하는

매개변수  $S$ 의 성분은 12 개이므로,  $N=1$  인 경우에도 구할 수 있다. 일반적으로 구하고자 하는 미지수의 수보다 주어진 방정식의 수가 많은 경우에는 가상 역행렬(pseudo-inverse) 방법을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = [C^T C]^{-1} C^T D \quad (13)$$

이러한 방법은 최소 자승 오차법과 같은 의미로 오차를 최소화하도록 매개변수를 규명하는 데 사용되고 있다.

### 3. 통계적 접근법에 의한 출력 소음이 있는 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명

2장의 하모닉 발런스법과 같은 기존의 규명 방법은 소음의 크기 및 성질에 따라 부정확한 결과를 나타낼 수 있다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 본 논문에서는 통계적인 접근법을 적용하였는데, 실험에서 얻게 되는 출력 신호에 포함된 소음의 평균값이 "0"이고 Gauss 랜덤분포를 한다고 가정하면 통계적인 특성을 이용하여 최대우도법(MLE, Maximum Likelihood Estimation)에 라그란지 배수법(Lagrange Multiplier Method)을 사용하여 계의 비선형 매개변수를 규명할 수 있다<sup>(8)</sup>.

실험에서 얻어진 출력의 시간 영역 데이터인  $i(t)$ ,  $x(t)$ 에 소음이 없다면 식 (13)에 의하여 비선형 방정식의 매개변수를 규명할 수 있으나,  $i(t)$ ,  $x(t)$ 에 랜덤 소음 성분이 섞이게 되면 식 (13)과 같은 방법으로는 정확한 해를 구할 수 없다. 측정데이터를 어떤 동일한 시간에서 반복적으로 얻을 수 있는 여러 경우에  $i(t)$ ,  $x(t)$ 가 정규 분포를 갖는다고 하면 시간 영역 데이터인  $i(t)$ ,  $x(t)$ 를 푸리에 변환하여 주파수 영역으로 변환하여 얻은 복소 하모닉 주파수 성분인  $I(f)$ ,  $X(f)$ 도 정규분포를 한다고 볼 수 있다.  $\omega = \omega_i$  로 가진하여  $H$ 차 하모닉 성분( $H=3$ )까지만 고려할 때의 출력의 복소 하모닉성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{Y_{ij}\} &= \{Re(Y_{ik}) \quad Im(Y_{ij})\} \quad i=1, N, \\ j &= 1, 2+4*H, \quad k=1, H+1, \quad l=1, H \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Re(Y_{ij}) &= \{Re(X_{i1}) \quad Re(X_{i2}) \quad Re(X_{i3}) \\ &\quad Re(I_{i1}) \quad Re(I_{i2}) \quad Re(I_{i3})\} \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} Im(Y_{ij}) &= \{Im(X_{i1}) \quad Im(X_{i2}) \quad Im(X_{i3}) \\ &\quad Im(I_{i1}) \quad Im(I_{i2}) \quad Im(I_{i3})\} \end{aligned} \quad (15b)$$

이다. 또한 확률 변수  $\{Y_{ij}\}$ 는 식 (16)과 같은 Gauss 확률 밀도 함수를 갖는 분포를 한다.

$$f = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{2+4*H} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}}} \exp \left\{ -\frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} \right] \quad (16)$$

여기서,

- $Y_{ij}$  :  $\{Y\}$ 의 요소로  $\omega = \omega_i$ 로 계를 가진하여 얻은 출력의  $j$ 번째 하모닉 성분
- $\bar{Y}_{ij}$  :  $\{\bar{Y}\}$ 의 요소로  $Y_{ij}$ 의 추정치
- $\sigma_{ij}^2$  :  $Y_{ij}$ 의 분산
- $N$  : 가진 주파수의 경우 수
- $H$  : 하모닉 성분의 차수

을 각각 의미한다. 많은 시험을 하면  $Y_{ij}$ 는 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 를 평균값으로 하고 분산이  $\sigma_{ij}^2$ 인 정규 분포를 하게 된다. 따라서, 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 는  $f$ 가 최대가 될 때 얻어지게 되며, 이 값은 모집단의 참값의 최적 불편 추정치(best unbiased estimate)가 된다.  $f$ 가 최대로 되기 위한 조건은  $T(\geq 0)$ 값이 최소가 되어야 하는데

$$T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2+4*H} \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \quad (17)$$

여기서,

- $N$  : 사용된 가진 주파수 경우의 수
- $H$  : 하모닉 차수

을 의미한다. 또한, 추정치  $\bar{Y}_{ij}$ 는 다음 식을 만족하여야 하고

$$C S = D \quad (18)$$

라그란지 함수(Lagrangian Function)  $L$ 을 정의하면 다음과 같다.

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2+4*H} \left\{ \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\} + \{\xi\}^T (C S - D) \quad (19)$$

여기서,  $\xi$ 는 라그란지 계수이다. 한편, 규명하려는 변수들은  $\bar{Y}_{ij}$ ,  $S$  및  $\{\xi\}$ 이므로  $L$ 을 최소화하기 위하여 식 (19)을 이들 변수들로 편 미분하여 구한

다. 이렇게 하여 얻은 결과 식들은 식 (20)~(22)과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial Y_{ij}} = \frac{\bar{Y}_{ij} - Y_{ij}}{\sigma_{ij}^2} + \{\zeta\}^T \left[ \frac{\partial C}{\partial Y_{ij}} \right] S = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = C^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \{\zeta\}} = C S - D = \{0\} \quad (22)$$

식 (20)을 정리하면,

$$\bar{Y}_{ij} - Y_{ij} + \sigma_{ij}^2 \{\zeta\}^T \left[ \frac{\partial C}{\partial Y_{ij}} \right] S = 0 \quad (23)$$

가 되는데, 위식은 상수들이므로 양변에 대하여 전치(transpose)를 취하면

$$\bar{Y}_{ij} - Y_{ij} + \sigma_{ij}^2 S^T \left[ \frac{\partial C}{\partial Y_{ij}} \right]^T \{\zeta\} = 0 \quad (24)$$

이 되고, 확장하면

$$\{\bar{Y}\} - \{Y\} + [\sigma^2] E^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (25)$$

로 표현된다. 여기서,

$$\{\bar{Y}\} = \left\{ \left\{ \bar{Y}_{11} \bar{Y}_{12} \dots \bar{Y}_{14} \right\} \dots \left\{ \bar{Y}_{n1} \bar{Y}_{n2} \dots \bar{Y}_{n4} \right\} \right. \\ \left. \dots \left\{ \bar{Y}_{M1} \bar{Y}_{M2} \dots \bar{Y}_{M4} \right\} \right\} \quad (26a)$$

$$\{Y\} = \left\{ \left\{ Y_{11} Y_{12} \dots Y_{14} \right\} \dots \left\{ Y_{n1} Y_{n2} \dots Y_{n4} \right\} \right. \\ \left. \dots \left\{ Y_{M1} Y_{M2} \dots Y_{M4} \right\} \right\} \quad (26b)$$

$$[\sigma^2] = \begin{bmatrix} [\sigma_{1j}^2] & [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [\sigma_{2j}^2] & [0] & \dots & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [\sigma_{ij}^2] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & \dots & \dots & \dots & [\sigma_{Nj}^2] \end{bmatrix} \quad (26c)$$

$$[\sigma_{ij}^2] = \begin{bmatrix} \sigma_{n1}^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{ij}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{n4}^2 \end{bmatrix} \quad (26d)$$

$$E^T = S^T \left[ \frac{\partial C}{\partial Y_{ij}} \right]^T \quad (26e)$$

$$= \begin{bmatrix} [E_{1j}]^T & [0]^T & \dots & \dots & \dots & [0]^T \\ [0]^T & [E_{2j}]^T & [0]^T & \dots & \dots & [0]^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0]^T & [0]^T & \dots & [E_{ij}]^T & \dots & [0]^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]^T & \dots & \dots & \dots & \dots & [E_{Nj}]^T \end{bmatrix} \quad (26f)$$

$$[E_{ij}]^T = S^T \left[ \frac{\partial C_i}{\partial Y_{ij}} \right]^T \quad i=1, N, j=1, 2+4 \cdot H \quad (26g)$$

이다. 그런데, 구하여야 할 미지수가 너무 많고 비선형 방정식이므로 직접 해를 구하기가 대단히 어려우므로 Gauss-Seidel 반복 대입법을 사용하였다.  $\{\bar{Y}\}$ ,  $S$ 의 초기 치를  $\{\bar{Y}\}_0$ ,  $S_0$ 로 가정하고 대입하면

$$\{\bar{Y}\} = \{\bar{Y}\}_0 + \{\Delta \bar{Y}\} \quad (27)$$

이 되고, 식 (27)을 식 (22)에 대입하면

$$C(\bar{Y})S - D = \left[ C(\bar{Y}_0) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{2+4 \cdot H} \frac{\partial C}{\partial Y_{ij}} \Delta \bar{Y}_{ij} \right] S - D \\ = C(\bar{Y}_0)S - D + \left[ \frac{\partial C}{\partial Y_{11}} S \dots \frac{\partial C}{\partial Y_{114}} S \right. \\ \left. \dots \frac{\partial C}{\partial Y_M} S \dots \frac{\partial C}{\partial Y_{M4}} S \right] \{\Delta \bar{Y}\} \\ = C S - D + E \{\Delta \bar{Y}\} = \{0\} \quad (28)$$

이 된다. 식 (27)을 식 (25)에 대입하면

$$\{\bar{Y}\}_0 + \{\Delta \bar{Y}\} - \{Y\} + [\sigma^2] E^T \{\zeta\} = \{0\} \quad (29)$$

이 되고 식 (29)에서

$$\{\Delta \bar{Y}\} = -\{\bar{Y}\}_0 + \{Y\} - [\sigma^2] E^T \{\zeta\} \quad (30)$$

이 얻어진다. 또한 식 (29)을 식 (28)에 대입하면

$$C S - D - E (\{\bar{Y}\}_0 - \{Y\}) = E [\sigma^2] E^T \{\zeta\} \quad (31)$$

으로 표현되고, 다시 정리하면 식 (31)에서

$$\{\zeta\} = (E [\sigma^2] E^T)^{-1} \{C S - D - E (\{\bar{Y}\}_0 - \{Y\})\} \quad (32)$$

이 된다. 식 (32)을 식 (21)에 대입하여 정리하면

$$P S = Z \quad (33)$$

또는

$$S = P^{-1} Z \quad (34)$$

이 되는데, 여기서,

$$P = C^T (E [\sigma^2] E^T)^{-1} C \quad (35a)$$

$$Z = C^T (E [\sigma^2] E^T)^{-1} [D + E (\{\bar{Y}\}_0 - \{Y\})] \quad (35b)$$

로 표현할 수 있다.

이 과정을 다시 요약하면

첫째,  $\{\bar{Y}\}_0$ ,  $S_0$ 를 가정한다.

둘째, 식 (34)에서  $S$ 를 구한다.

셋째, 식 (32)에서  $\{\xi\}$  를 구한다.

넷째, 식 (30)에서  $\{\Delta \bar{Y}\}$  를 구한다.

다섯째,  $\{\bar{Y}\} = \{\bar{Y}\}_0 + \alpha\{\Delta \bar{Y}\}$  를 사용하고  $S = S_0 + \alpha \Delta S$  관계를 반복적으로 적용하여  $S$  를 구한다. 여기서,  $\alpha$  는  $0 < \alpha \leq 0.5$  의 값으로 수렴이 되도록 적당한 값을 선택하였다. 초기 값으로는 실험으로 얻은  $\{Y\}$  과 하모닉 밸런스법으로 얻은  $S = S_0$  를 사용하였다. 한편, 모분산  $\{\sigma_{ij}^2\}$  의 추정치는  $\omega = \omega_i$  에서 가진 시험을 하여  $M$  회 측정하여 다음과 같이 구한다.

$$\{\sigma_{ij}^2\} = \frac{\sum_{k=1}^M \{(Y_{ijk} - E(Y_{ij}))^2\}}{M-1}$$

$$i = 1, N, j = 1, 14 \quad (36a)$$

$$E(Y_{ij}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M Y_{ijk} \quad (36b)$$

여기서

- $\{\sigma_{ij}^2\}$  :  $\omega = \omega_i$  때의  $M$  회 측정된 출력의 하모닉성분의 모분산 추정치
- $E(Y_{ij})$  :  $\omega = \omega_i$  때의  $M$  회 측정된 출력의 평균값 추정치
- $M$  :  $\omega = \omega_i$  로 가진할때 시험의 수 이다.

#### 4. 시뮬레이션 및 결과

##### 4.1 라우드스피커에 출력 소음이 없는 경우

본 시뮬레이션은 먼저 하모닉 밸런스법의 정확도를 검증하기 위하여 수행되었다. 라우드스피커 모델의 비선형 매개변수를 규명하기 위하여 사용된 매개

변수와 규명된 결과를 Table 1에 나타냈다. 입력으로는 10볼트 전압을 사용하였고, 가진 주파수는 30 Hz에서 120 Hz까지 10 Hz 간격으로 하여 반복 대입법을 사용하는 수치해법으로 출력 전류와 변위의 복소 하모닉 성분을 구하였다. 비선형 매개변수를 규명하기 위하여 식 (13)을 이용하였으며 시험 경우의 수가 하나인 경우에도 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 반복 대입법으로 출력 전류와 변위의 복소 하모닉 성분을 구할 때의 오차 한계(error criteria)를  $10^{-7}$ 으로 주었을 경우에 규명된 12개의 매개변수의 오차는 모두  $10^{-5}$  %이내에 있음이 확인되었다. 따라서, 하모닉 밸런스법을 이용하여 라우드스피커의 비선형 매개변수를 구하는 방법은 그 타당성이 입증되었다.

##### 4.2 라우드스피커의 출력 소음을 고려한 경우

실제 실험을 할 경우에는 출력 전류 및 변위 데이터에 소음이 섞일 경우가 있고, 이러한 소음은 Gauss 확률 분포(Gaussian or normal distribution)를 한다고 가정하였다. 3장에서 언급한 라그랑지 함수를 최적화 하는 방법을 사용하여 라우드스피커의 비선형 매개변수를 규명하였다. 매개변수로는 Table 1에서 사용된 계수를 사용하였고, 입력 전압은 10볼트를 사용하였다. 가진 주파수는 30 Hz에서 120 Hz까지 10 Hz간격으로 시뮬레이션을 수행하였다. 이렇게 하여 각각의 경우에 대한 출력 전류와 변위의 복소 하모닉성분을 얻었고, 식 (5a ~ c)에 대입하여 출력 소음이 없는 출력 전류 및 변위의 시간 영역 데이터를 얻었으며 출력 소음이 섞인 출력 데이터를 얻기 위하여 식 (37) ~ (39)과 같은 방법으로 각 경우의 가진 시험에서 각각 100회의 시뮬레이션을 수행하여 모집단의 분산을 얻는데 사용하였다.

Table 1 Validity check for harmonic balance method for nonlinear loudspeaker parameters identification

	Given	Identified	Error (%)		Given	Identified	Error (%)
$L, H$	0.1000E-2	0.1000E-2	0.0	$c_0, N/m$	0.4000E+4	0.4000E+4	0.0
$R, \Omega$	0.5000E+1	0.5000E+1	0.0	$c_1, N/m^2$	-0.5000E+5	-0.5000E+5	0.0
$m, kg$	0.5000E-1	0.5000E-1	0.0	$c_2, N/m^3$	0.5000E+8	0.5000E+8	0.0
$b_0, N \cdot s/m$	0.1000E+2	0.1000E+2	0.0	$d_0, N/A$	0.1000E+2	0.1000E+2	0.0
$b_1, N \cdot s/m^2$	-0.5000E+3	-0.5000E+3	0.0	$d_1, N/A^2$	-0.3000E+3	-0.3000E+3	0.0
$b_2, N \cdot s/m^3$	-0.3000E+6	-0.3000E+6	0.0	$d_2, N/A^3$	-0.5000E+6	-0.5000E+6	0.0

$$\tilde{e}(t)_{i,k} = e(t)_{i,k} \quad (37)$$

$$\tilde{x}(t)_{i,k} = x(t)_{i,k} + \frac{a}{100} \left[ \frac{\max(\text{abs}(x(t)))}{\max(\text{abs}(\epsilon(t)_k))} \right] * \epsilon(t)_k \quad (38)$$

$$\tilde{i}(t)_{i,k} = i(t)_{i,k} + \frac{b}{100} \left[ \frac{\max(\text{abs}(i(t)))}{\max(\text{abs}(\epsilon(t)_k))} \right] * \epsilon(t)_k \quad (39)$$

여기서,

$e(t)_{i,k}$  :  $\omega = \omega_i$  에서 가진하여 얻은 입력 전압의 시간 영역의  $k$  번째 데이터 샘플

$\tilde{x}(t)_{i,k}$  :  $\omega = \omega_i$  에서 가진하여 얻은 소음이 섞인 다이아프램 변위의 시간 영역  $k$  번째 데이터 샘플

$\tilde{i}(t)_{i,k}$  :  $\omega = \omega_i$  에서 가진하여 얻은 입력 전압의 시간 영역  $k$  번째 데이터 샘플

$\epsilon(t)_k$  : Gauss 확률 분포를 하는 소음

이다.

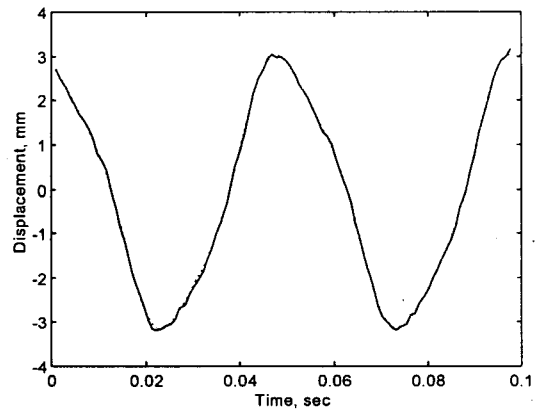
비선형 매개변수를 구하기 위하여 출력 소음이 섞인 시간 영역 데이터들을 푸리에 변환을 하여 복소 하모닉성분들을 구하였고, 3장에서 언급한 방법을 사용하여 비선형 매개변수를 규명하였다. 가진 주파

Table 2 Comparison of nonlinear parameters with harmonic balance method and Lagrange multiplier method(1% noise)

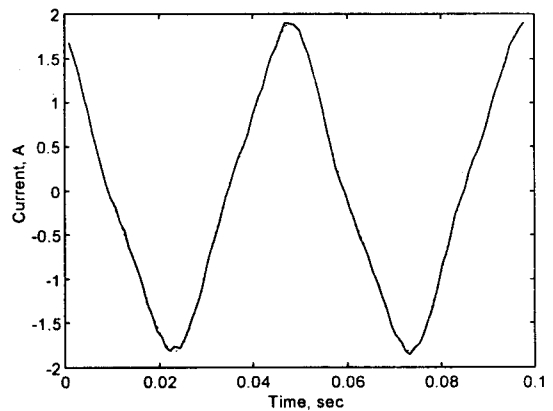
	Harmonic balance method		Lagrange multiplier method	
	Identified	Error (%)	Identified	Error (%)
$L, H$	0.9949E-3	0.5	0.9989E-3	0.1
$R, \Omega$	0.5001E+1	0.0	0.5000E+1	0.0
$m, kg$	0.4998E-1	0.0	0.5002E-1	0.1
$b_0, N \cdot s/m$	0.1000E+2	0.0	0.9999E+1	0.0
$b_1, N \cdot s/m^2$	-0.4966E+3	0.7	-0.4997E+3	0.1
$b_2, N \cdot s/m^3$	-0.3003E+6	0.1	-0.2999E+6	0.0
$c_0, N/m$	0.3991E+4	0.2	0.4005E+4	0.1
$c_1, N/m^2$	-0.4910E+5	1.8	-0.5009E+5	0.2
$c_2, N/m^3$	0.5210E+8	4.2	0.4952E+8	1.0
$d_0, N/A$	0.9994E+1	0.1	0.1000E+2	0.0
$d_1, N/A^2$	-0.2963E+3	1.2	-0.2995E+3	0.2
$d_2, N/A^3$	-0.4965E+6	0.7	-0.4998E+6	0.0

수가 30 Hz인 10볼트 전압으로 가진하고 출력 소음이 각각 1%인 경우 ( $a=b=1$ )에 얻은 출력변위 및 전류의 데이터를 이용하여 규명된 매개변수들은 Table 2에서 보는 바와 같이 비선형 강성 계수 ( $c_2$ )의 경우 기존의 하모닉 밸런스법에서는 4.2%의 오차를 나타냈으나, 개선된 방법에서는 1%정도의 오차를 보이고 있다. 따라서, 출력데이터에 미소한 소음이 섞여도 하모닉 밸런스법으로는 매개변수 규명이 부정확 할 수 있음이 예상되었다.

Fig.1(a), (b)에는 출력 소음이 5% ( $a=b=5$ )일 경우를 나타내는데 그림 상으로는 큰 차이가 없으나, 이 데이터를 이용하여 규명된 매개변수들을 보면 기존의 방법은 비선형 강성 계수에서 9% ( $c_1$ )와 30% ( $c_2$ )정도의 오차를 보이는 반면에 개선된 방법



(a)



(b)

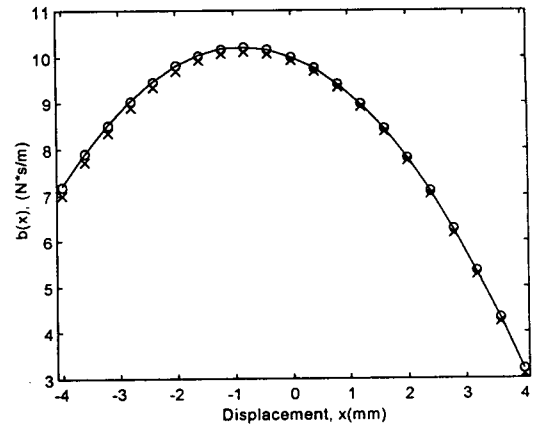
Fig. 1 Time history of (a)Diaphragm displacement, (b)Current  $f=30$  Hz,  $f_s=1024$  Hz, 5% noise. solid: simulated; dotted: given.

**Table 3** Comparison of nonlinear parameters with harmonic balance method and Lagrange multiplier method(5% noise)

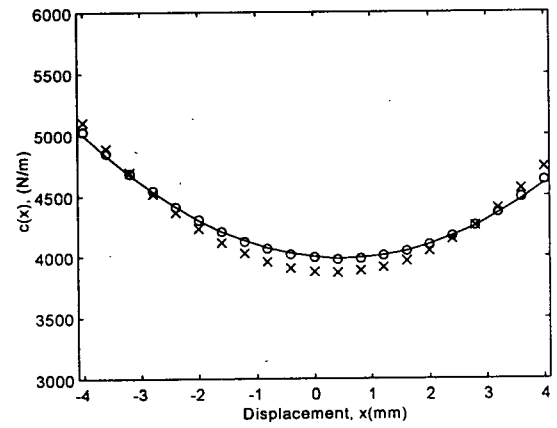
	Harmonic balance method		Lagrange multiplier method	
	Identified	Error (%)	Identified	Error (%)
$L, H$	0.9341E-3	6.6	0.9909E-3	0.9
$R, \Omega$	0.5019E+1	0.4	0.5005E+1	0.1
$m, kg$	0.4926E-1	1.5	0.5014E-1	0.3
$b_0, N \cdot s/m$	0.9924E+1	0.8	0.9987E+1	0.1
$b_1, N \cdot s/m^2$	-0.4858E+3	2.8	-0.4985E+3	0.3
$b_2, N \cdot s/m^3$	-0.3051E+6	1.7	-0.2966E+6	1.1
$c_0, N/m$	0.3879E+4	3.0	0.4029E+4	0.7
$c_1, N/m^2$	-0.4567E+5	8.7	-0.5035E+5	0.7
$c_2, N/m^3$	0.6479E+8	29.6	0.4686E+8	6.3
$d_0, N/A$	0.9883E+1	1.2	0.9995E+1	0.1
$d_1, N/A^2$	-0.2807E+3	6.4	-0.2978E+3	0.7
$d_2, N/A^3$	-0.4763E+6	4.7	-0.4985E+6	0.3

은 각각 1%와 6%를 보이고 있다(Table 3). 자장의 비선형성을 나타내는 힘 요소의 비선형성 계수에서는 6% ( $d_1$ ), 5% ( $d_2$ )를 보이며, 개선된 방법은 각각 0.7% 및 0.3%의 오차를 보여준다. 특히 기존 방법에서는 자기 인덕턴스 오차가 7%를 보이므로 출력 소음에 민감함을 알 수 있다.

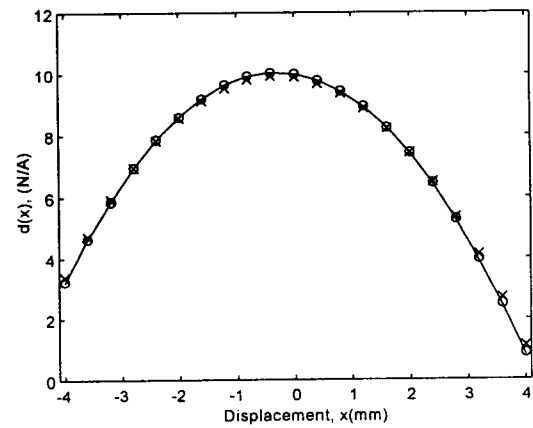
규명된 감쇠, 강성계수 및 힘 요소의 변위에 대한 특성을 Fig. 2~3에 나타냈다. 출력 소음이 1%와 5% 두 가지 경우에 대하여 하모닉 발란스법 및 개선된 방법으로 규명된 감쇠계수의 형상은 각각 Fig. 2(a)와 Fig. 3(a)에 나타나 있는데 개선된 방법이 기존 방법에 대하여 우수함을 알 수 있다. 강성 계수에 대하여는 Fig. 2(b)와 Fig. 3(b)에서 힘 요소에 대하여는 Fig. 2(c)와 Fig. 3(c)에 있으며 개선된 방법이 좋은 결과를 보여주었다. Fig. 1의 출력 전압에 대한 변위진폭이 3 mm이내에 있음을 알 수 있는데 이 범위에서 하모닉 발란스법으로 규명된 감쇠, 강성 및 힘 요소는 모두 출력 소음이 증가함에 따라 주어진 값보다 적어지는 경향을 보이나, 통계적 방법으로 규명한 경우는 미소하나 주어진 값보다 약간 증가하는 경향을 보인다. 따라서, 비선형 매개변수를 규명할 때에 출력 소음이 섞인 데이터를 사용하여 하모닉 발란스 방법을 이용하면 실제보다 작은 비선형 특성을 얻게 됨을 알 수 있었다.



(a)



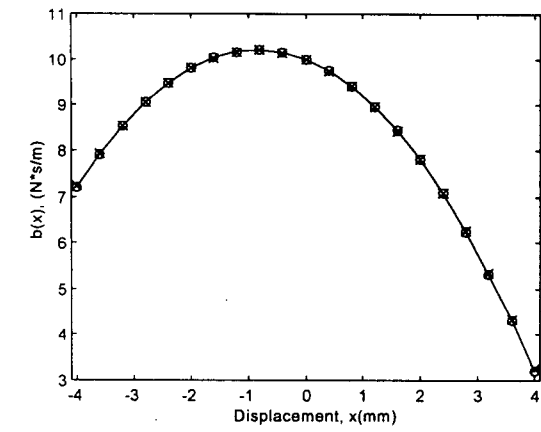
(b)



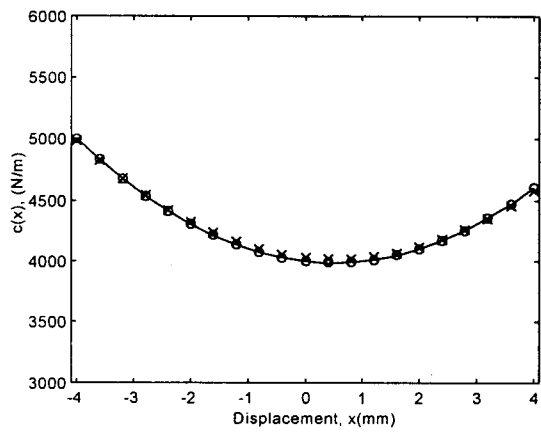
(c)

**Fig. 2** Comparison of dynamic characteristics of nonlinear parameters identified by traditional harmonic balance method, solid given: o 1%: x 5% noise. (a)Damping  $b(x)$ . (b)Stiffness  $c(x)$ . (c)Force factor  $d(x)$ .

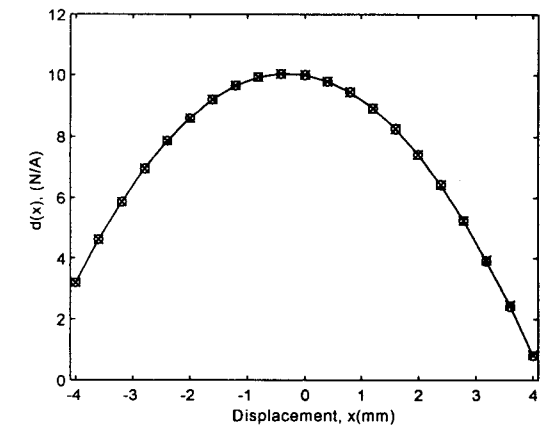




(a)

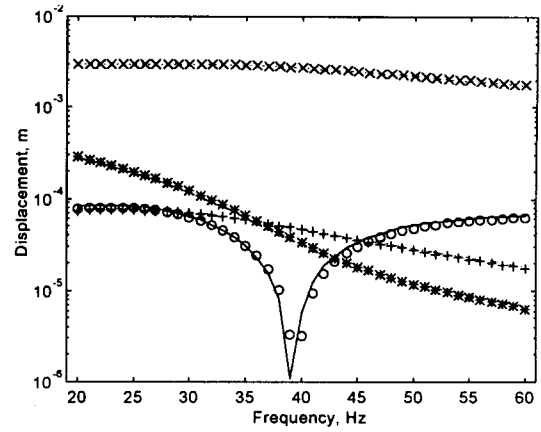


(b)

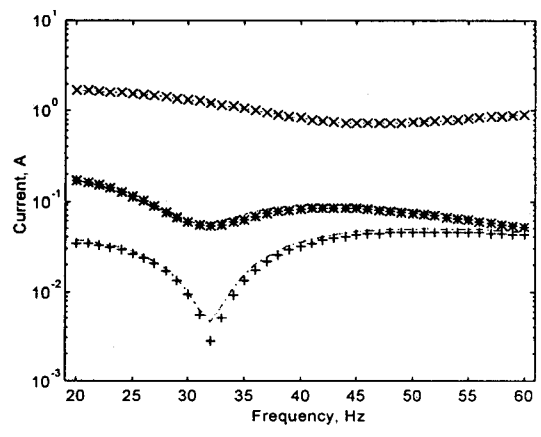


(c)

Fig. 3 Comparison of dynamic characteristics of nonlinear parameters identified by proposed Lagrange multiplier method. solid given: o 1% ; x 5% noise. (a)Damping  $b(x)$ . (b)Stiffness  $c(x)$ . (c)Force factor  $d(x)$ .



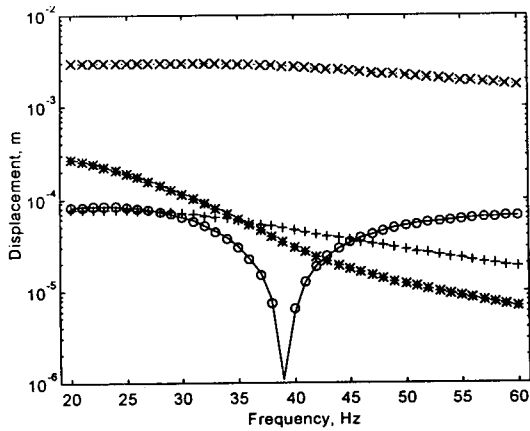
(a)



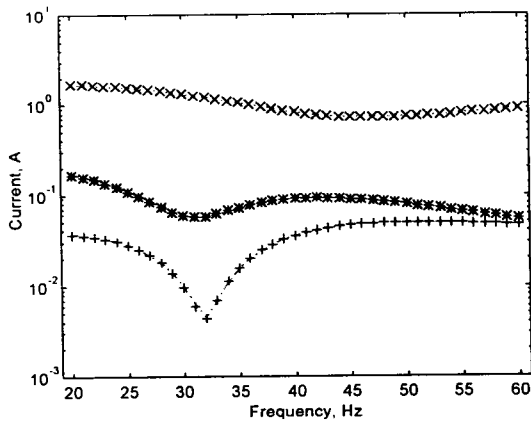
(b)

Fig. 4 Comparison of simulated response for 10 volt input. 5% noise included. Identified by traditional harmonic balance method. Given :solid dc; dotted fundamental; dashdot second harmonic; dashed third harmonic. Identified : o dc; x fundamental; + second harmonic; \* third harmonic. (a)Displacement, m. (b)Current, A.

출력 소음이 5% 포함된 데이터에 대하여 하모닉 밸런스법을 사용하여 규명된 계수를 식 (13)에 대입하여 수치해법으로 구한 다이아프램의 출력변위와 출력 전류의 하모닉 왜곡 특성을 Fig. 4a, b에 나타냈고 개선된 방법인 통계적 접근법인 라그랑지 배수법으로 규명된 비선형 매개변수를 사용하여 얻은 결과는 Fig. 5(a), (b)에 나타냈다. 가진 주파수는 20 Hz에서 130 Hz까지로 1 Hz 간격으로 계산하였으나 편의상 20 Hz에서 60 Hz 구간만 나타냈다. 여기서 통계적 접근 방법을 사용한 것이 주어진 하모닉 왜곡과의 차이가 적음을 보여주고 있다. 한편, 음압은



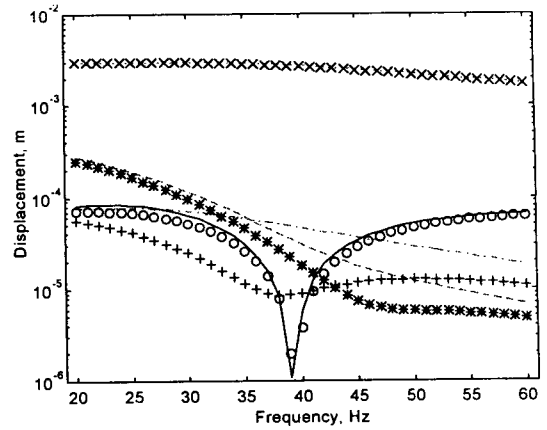
(a)



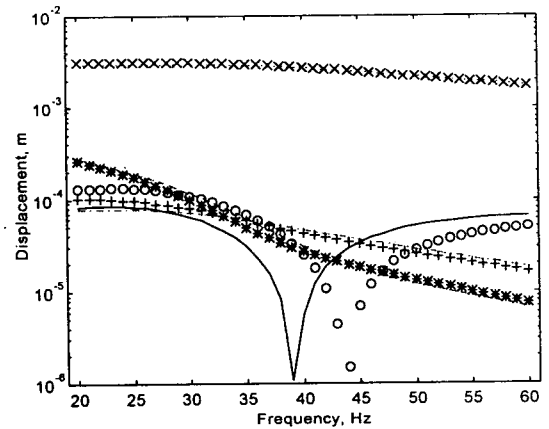
(b)

Fig. 5 Comparison of simulated response for 10 volt input. 5% noise included. Identified by Lagrange multiplier method. Given :solid dc: dotted fundamental: dashdot second harmonic: dashed third harmonic. Identified : o dc: x fundamental: + second harmonic: \* third harmonic. (a) Displacement, m. (b) Current, A.

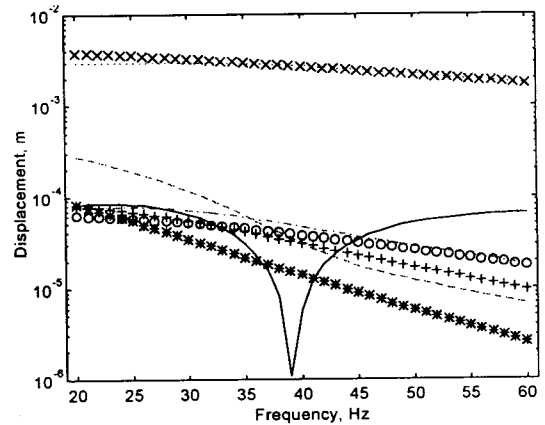
라우드스피커 다이어프램의 가속도에 비례하므로 음압의 음향 왜곡과 직접적인 영향이 있는 다이어프램 변위의 하모닉 왜곡 현상을 좀 더 분석해 보면 35 Hz 이하에서는 3차, 2차 하모닉 및 dc 성분의 순서로 하모닉 왜곡의 크기가 나타나며 35 Hz에서 45 Hz 구간에서는 2차, 3차 하모닉 및 dc 성분의 순서로 하모닉 왜곡이 나타나고 45 Hz 이상에서는 dc 성분, 2차 및 3차 하모닉 성분의 크기로 다이어프램의 하모닉 왜곡이 나타나므로 라우드스피커에서 방사되는 음향의 하모닉 왜곡도 같은 현상을 보여준다. 이러한 특성을 이용하면 제어하고자 하는 주파수 범위가 결정되었을 때 음향 왜곡을 효과적으로 제어하고



(a) Damping (linear)



(b) Stiffness (linear)



(c) Force factor

Fig. 6 Comparison of contribution of displacement nonlinearities for 10 volt input. Given: solid dc: dotted fundamental: dashdot second harmonic: dashed third harmonic. Identified: o dc: x fundamental: + second harmonic: \* third harmonic. (a) Damping (linear). (b) Stiffness (linear). (c) Force factor (linear).

자 할 때의 변위의 어느 하모닉성분을 제어 할 것인지 선택할 수 있다. 일례로, 45 Hz 이상의 주파수에 대한 하모닉 왜곡을 제어하기 위해서는 변위의 dc 성분 즉, 다이아프램의 초기 편차를 적게 하는 방안을 강구하는 것이 최선의 방법이 된다.

### 4.3 민감도 해석

감쇠, 강성 계수 및 힘 요소의 비선형 항들이 하모닉 왜곡에 미치는 영향을 파악하여 효과적으로 방사 음향의 하모닉 왜곡의 원인을 파악하고자 하였다. 앞서 언급하였듯이 방사 음향은 다이아프램의 가속도에 비례하므로 다이아프램변위의 하모닉 왜곡 특성을 시뮬레이션 한 결과를 Fig. 6에 나타냈다.

Fig. 6(a)는 비선형 감쇠항들만 없을 때 ( $b_1 = b_2 = 0$ )의 결과로 dc 성분과 1차 성분은 거의 변하지 않고 있으나 2차 및 3차 하모닉 성분은 각각 40 Hz 및 45 Hz 까지는 감소하였다가 그 이상부터는 주파수 축과 평행한 특성을 보이고 있다. Fig. 6(b)는 지지 스프링의 강성(스프링)이 선형 특성만 있다고 가정 ( $c_1 = c_2 = 0$ )하였을 때의 결과로 1차 성분과 2, 3차 하모닉 성분은 비선형 강성을 갖는다고 할 때와 거의 동일한 수준이나, dc 성분은 주파수에 따라 많은 변동이 있음을 보여주고 있다. Fig. 6c는 힘 요소의 비선형성만을 제거하였을 경우 ( $d_1 = d_2 = 0$ )로 dc 성분은 주파수 증가에 따라 감소하는 경향을 보이고 있다. 이러한 결과는 예상된 것으로 자장의 불균일성을 해소 시켜 주면 다이아프램의 초기 편차가 적어짐을 보여주는 것이다. 한편, 2차, 3차 하모닉 성분은 주파수 증가에 따라 크게 감소하는 특성을 보이고 있다. 따라서, 힘 요소의 비선형성이 변위의 하모닉 왜곡에 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 출력에 정규분포 특성을 갖는 소음이 섞여 있는 경우에 대하여 기존의 하모닉 발란스 법과 제안된 통계적 접근법을 사용하여 라우드스피커의 비선형 매개변수 규명을 비교하였다. 출력 소음이 1%에서 5%까지 섞인 경우를 고찰하였는데, 5%의 출력 소음이 있을 경우 기존의 하모닉 발란스 법을 사용하였을 때는 규명된 비선형 매개변수에 최대 30%의 오차가 발생하나 개선된 방법을 사용하면 6%이내로 규명할 수 있음을 알 수 있었다. 변위

의 의존성을 갖는 감쇠, 강성 계수 및 힘 요소들이 출력 소음에 따라 변동하는 것을 확인하였고 하모닉 발란스법으로 규명된 비선형 감쇠, 강성 계수 및 힘 요소들은 출력 소음의 증가에 따라 실제 값들보다 적게 규명됨을 알 수 있었으며, 출력 소음에 가장 민감한 비선형 계수들은 강성 계수들임을 알 수 있었다. 방사 음향이 다이아프램의 가속도에 비례한다는 것에 근거하고 변위의 하모닉 왜곡 특성 분석을 통하여 음의 찌그러짐을 효과적으로 제어할 수 있는 방안을 분석하였다.

민감도 해석 결과로 힘 요소의 비선형성이 방사 음향의 2, 3차 하모닉 왜곡의 주원인이 되며 dc 성분에도 많은 영향을 주고 있음을 확인하였으며 강성 계수의 비선형특성은 2, 3차 하모닉 왜곡에 별로 영향을 주지 못함을 알 수 있었다. 감쇠계수의 비선형성을 제거하면 2, 3차 하모닉 왜곡이 감소함을 알 수 있었다.

실제 실험의 경우에 출력 소음이 어느 정도는 반드시 존재하게 되며, 이러한 소음은 대개 랜덤 특성을 갖게 된다. 또한, 중심극한정리(central limit theorem)에 의하여 이것은 정규분포를 한다고 알려져 있으므로 본 논문에서 사용한 통계적 접근법에 의한 라우드스피커 비선형 매개변수 규명법은 타당한 방법이라 생각된다.

## 참 고 문 헌

- (1) Olson, H. F., 1962, "Analysis of the Effects of Nonlinear Elements Upon the Performance of a Back-Enclosed, Direct Radiator Loudspeaker Mechanism," J. Audio Eng. Soc., vol. 10, pp. 156~162.
- (2) Ashley, J. R., 1969, "Experimental Determination of Low-Frequency Loudspeaker Parameters," J. Audio Eng. Soc., vol. 17, pp. 525~531.
- (3) Harwood, H. D., 1972, "Loudspeaker Distortion Associated With Low-Frequency Signals," J. Audio Eng. Soc., vol. 20, pp. 718~728.
- (4) Kaizer, A. J. M., 1987, "Modeling of the Nonlinear Response of an Electrodynamic Loudspeaker by a Volterra Series Expansion," J. Audio Eng. Soc., vol. 35, pp. 421~433.
- (5) Klippel, W., 1992, "Nonlinear Large-Signal Behavior of Electrodynamic Loudspeakers at

Low Frequencies," J. Audio Eng. Soc., vol. 40, pp. 483~496.

(6) Hyuk, J., Jeong-Guon, Ih., 1996, "Harmonic Balance Method for Estimating the Nonlinear Parameters of Electrodynamical Direct-Radiator Loudspeakers," J. Audio Eng. Soc., vol. 44, pp. 245~254.

(7) Keisuke Kamiya and Kimihiko Yasuda, 1991, "Identification of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems. (An Attempt to Improve

Accuracy by Introducing a Statistical Method)," Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, vol. 57, n. 542, pp. 3113~3120.

(8) Kimihiko Yasuda and Keisuke Kamiya, 1991, "Identification of Nonlinear Systems," Proc. Asia-Pacific Vibration Conf. (Melbourne, Australia.), pp. 2.29~2.33

부 록

$$\begin{aligned}
 A(1,1) &= 0. \quad A(1,2) = I_0. \quad A(1,3) = \dots A(1,12) = 0. \quad A(2,1) = \frac{1}{2} P I_1. \quad A(2,2) = \frac{1}{2} I_1 \\
 A(2,3) &= \dots = A(2,9) = 0. \quad A(2,10) = \frac{1}{2} P X_1. \quad A(2,11) = \frac{1}{4} P (2X_0 X_1 + X_1^* X_2 + X_2^* X_3) \\
 A(2,12) &= \frac{1}{8} P (4X_0^2 X_1 + X_1^2 X_1^* + 4X_0 X_1^* X_2 + 2X_1 X_2 X_2^* + X_1^2 X_3 + 4X_0 X_2^* X_3 + X_2^2 X_3^* + 2X_1 X_3 X_3^*) \\
 A(3,1) &= P I_2. \quad A(3,2) = \frac{1}{2} I_2. \quad A(3,3) = \dots = A(3,9) = 0. \quad A(3,10) = P X_2 \\
 A(3,11) &= \frac{1}{4} P (X_1^2 + 4X_0 X_2 + 2X_1^* X_3) \\
 A(3,12) &= \frac{1}{4} P (2X_0 X_1^2 + 4X_0^2 X_2 + 2X_1 X_1^* X_2 + X_2^2 X_2^* + 4X_0 X_1^* X_3 + 2X_1 X_2^* X_3 + 2X_2 X_3 X_3^*) \\
 A(4,1) &= \frac{3}{2} P I_3. \quad A(4,2) = \frac{1}{2} I_3. \quad A(4,3) = \dots = A(4,9) = 0. \quad A(4,10) = \frac{3}{2} P X_3 \\
 A(4,11) &= \frac{1}{4} P (3X_1 X_2 + 6X_0 X_3) \\
 A(4,12) &= \frac{1}{8} P (X_1^3 + 12X_0 X_1 X_2 + 3X_1^* X_2^2 + 12X_0^2 X_3 + 6X_1 X_1^* X_3 + 6X_2 X_2^* X_3 + 3X_3^2 X_3^*) \\
 A(5,1) &= \dots = A(5,6) = 0. \quad A(5,7) = X_0. \quad A(5,8) = X_0^2 + \frac{1}{2} (X_1 X_1^* + X_2 X_2^* + X_3 X_3^*) \\
 A(5,9) &= X_0^3 + \frac{3}{2} X_0 (X_1 X_1^* + X_2 X_2^* + X_3 X_3^*) + \frac{3}{4} (X_1^* X_2^* X_3 + X_1 X_2 X_3^*) + \frac{3}{8} (X_1^{*2} X_2 + X_1^2 X_2^*) \\
 A(5,10) &= -I_0 \\
 A(5,11) &= -I_0 X_0 - \frac{1}{4} (I_1^* X_1 + I_1 X_1^* + I_2^* X_2 + I_2 X_2^* + I_3^* X_3 + I_3 X_3^*) \\
 A(5,12) &= -I_0 X_0^2 - \frac{1}{2} (I_1^* X_0 X_1 + I_1 X_0 X_1^* + I_0 X_1 X_1^* + I_2^* X_0 X_2 + I_2 X_0 X_2^* + I_0 X_2 X_2^* - \frac{1}{8} (I_2^* X_1^2 + I_2 X_1^{*2}) \\
 &\quad + I_3^* X_0 X_3 + I_3 X_0 X_3^* + I_0 X_3 X_3^*) - \frac{1}{4} (I_3^* X_1 X_2 + I_1^* X_1^* X_2 + I_1 X_1 X_2^* \\
 &\quad + I_3 X_1^* X_2^* + I_2^* X_1^* X_3 + I_1^* X_2^* X_3 + I_2 X_1 X_3^* + I_1 X_2 X_3^*) \\
 A(6,1) &= A(6,2) = 0. \quad A(6,3) = -\frac{1}{2} Q X_1. \quad A(6,4) = \frac{1}{2} P X_1. \quad A(6,5) = \frac{1}{4} P (2X_0 X_1 + X_1^* X_2 + X_2^* X_3) \\
 A(6,6) &= \frac{1}{8} P (4X_0^2 X_1 + X_1^2 X_1^* + 4X_0 X_1^* X_2 + 2X_1 X_2 X_2^* + X_1^2 X_3 + 4X_0 X_2^* X_3 + X_2^2 X_3^* + 2X_1 X_3 X_3^*)
 \end{aligned}$$

$$A(6, 7) = \frac{1}{2} X_1. \quad A(6, 8) = \frac{1}{2} (2X_0X_1 + X_1^*X_2 + X_2^*X_3)$$

$$A(6, 9) = \frac{1}{8} (12X_0^2X_1 + 3X_1^2X_1^* + 12X_0X_1^*X_2 + 6X_1X_2X_2^* + 3X_1^{*2}X_3 + 12X_0X_2^*X_3 + 3X_2^2X_3^* + 6X_1X_3X_3^*)$$

$$A(6, 10) = -\frac{1}{2} I_1. \quad A(6, 11) = -\frac{1}{4} (2I_1X_0 + 2I_0X_1 + I_2X_1^* + I_1^*X_2 + I_3X_2^* + I_2^*X_3)$$

$$A(6, 12) = -I_0X_0X_1 - \frac{1}{8} (I_1^*X_1^2 + I_3X_1^{*2} + I_3^*X_2^2) - \frac{1}{4} (I_1X_1X_1^* + I_2^*X_1X_2 + I_2X_1X_2^* \\ + I_1X_2X_2^* + I_3^*X_1X_3 + I_1^*X_1^*X_3 + I_3X_1X_3^* + I_2X_2X_3^* + I_1X_3X_3^*) \\ - \frac{1}{2} (I_1X_0^2 + I_2X_0X_1^* + I_1^*X_0X_2 + I_0X_1^*X_2 + I_3X_0X_2^* + I_2^*X_0X_3 + I_0X_2^*X_3)$$

$$A(7, 1) = A(7, 2) = 0. \quad A(7, 3) = -2QX_2. \quad A(7, 4) = PX_2. \quad A(7, 5) = \frac{1}{4} P(X_1^2 + 4X_0X_2 + 2X_1^*X_3)$$

$$A(7, 6) = \frac{1}{4} P(2X_0X_1^2 + 4X_0^2X_2 + 2X_1X_1^*X_2 + X_2^2X_2^* + 4X_0X_1^*X_3 + 2X_1X_2^*X_3 + 2X_2X_3X_3^*)$$

$$A(7, 7) = \frac{1}{2} X_2. \quad A(7, 8) = \frac{1}{4} (X_1^2 + 4X_0X_2 + 2X_1^*X_3)$$

$$A(7, 9) = \frac{1}{8} (6X_0X_1^2 + 12X_0^2X_2 + 6X_1X_1^*X_2 + 3X_2^2X_2^* + 12X_0X_1^*X_3 + 6X_1X_2^*X_3 + 6X_2X_3X_3^*)$$

$$A(7, 10) = -\frac{1}{2} I_2. \quad A(7, 11) = -\frac{1}{4} (2I_2X_0 + I_1X_1 + I_3X_1^* + 2I_0X_2 + I_1^*X_3)$$

$$A(7, 12) = -I_0X_0X_2 - \frac{1}{8} I_2^*X_2^2 - \frac{1}{2} (I_2X_0^2 + I_1X_0X_1 + I_3X_0X_1^* + I_1^*X_0X_3 + I_0X_1^*X_3) \\ - \frac{1}{4} (I_0X_1^2 + I_2X_1X_1^* + I_1^*X_1X_2 + I_1X_1^*X_2 + I_3X_1X_2^* + I_2X_2X_2^* \\ + I_2^*X_1X_3 + I_3^*X_2X_3 + I_1X_2^*X_3 + I_3X_2X_3^* + I_2X_3X_3^*)$$

$$A(8, 1) = A(8, 2) = 0. \quad A(8, 3) = -\frac{9}{2} QX_3. \quad A(8, 4) = \frac{3}{2} PX_3. \quad A(8, 5) = \frac{1}{4} P(3X_1X_2 + 6X_0X_3)$$

$$A(8, 6) = \frac{1}{8} P(X_1^3 + 12X_0X_1X_2 + 3X_1^*X_2^2 + 12X_0^2X_3 + 6X_1X_1^*X_3 + 6X_2X_2^*X_3 + 3X_3^2X_3^*)$$

$$A(8, 7) = \frac{1}{2} X_3. \quad A(8, 8) = \frac{1}{2} (X_1X_2 + 2X_0X_3)$$

$$A(8, 9) = \frac{1}{8} (X_1^3 + 12X_0X_1X_2 + 3X_1^*X_2^2 + 12X_0^2X_3 + 6X_1X_1^*X_3 + 6X_2X_2^*X_3 + 3X_3^2X_3^*)$$

$$A(8, 10) = -\frac{1}{2} I_3. \quad A(8, 11) = -\frac{1}{4} (2I_3X_0 + I_2X_1 + I_1X_2 + 2I_0X_3)$$

$$A(8, 12) = -I_0X_0X_3 - \frac{1}{2} (I_3X_0^2 + I_2X_0X_1 + I_1X_0X_2 + I_0X_1X_2) - \frac{1}{8} (I_1X_1^2 + I_1^*X_2^2 + I_3^*X_3^2) \\ - \frac{1}{4} (I_3X_1X_1^* + I_2X_1^*X_2 + I_3X_2X_2^* + I_1^*X_1X_3 + I_1X_1^*X_3 + I_2^*X_2X_3 + I_2X_2^*X_3 + I_3X_3X_3^*)$$

$$B(1) = E_0 + \frac{1}{2} E_2X_0^2 + \frac{1}{4} E_2(X_1X_1^* + X_2X_2^* + X_3X_3^*)$$

$$B(2) = \frac{1}{2} E_1. \quad B(3) = \frac{1}{2} E_2. \quad B(4) = \frac{1}{2} E_3. \quad B(5) = B(6) = B(7) = B(8) = 0$$

$$P = j\omega_i. \quad Q = \omega_i^2$$