

< 논 문 >

## 치형수정된 기어쌍의 치합전달오차 모델링

### Modeling of Transmission Error of A Gear Pair with Modified Teeth

주상훈\* · 노오현\*\* · 정동현\*\*\* · 배명호\*\*\*\* · 박노길\*\*\*\*\*

S. H. Joo, O. H. Roh, D. H. Chung, M. H. Bae and N. G. Park

(1998년 5월 4일 접수 : 1998년 8월 17일 심사완료)

**Key Words** : Transmission Error(치합전달 오차), Whine Noise(화인소음), Tooth Modification(치형 수정), Laser Vibrometer(레이저 진동계)

#### ABSTRACT

In the gear manufacturing, tooth modification is usually applied for the prevention of tooth impact during the loading. In contrary, tooth profile error causes amplifying the whine noise which is cumbersome to reduce in the automobile gear box. So optimum quantity of the modifications must be obtained for the good performance in the vibrational sense. In this paper, a formulation to define the tooth curve by considering the profile manufacturing error and loading deformation of the gear tooth is suggested and the transmission error with modified tooth in the gear system is evaluated. A pair of gear set is mathematically modelled. The equivalent excitation in the gear vibrational model is formulated. For the experimental evaluation on the derived transmission error function, a simple geared system is set up in which the gears are designed to give pre-designed tooth profile modification and manufactured by CNC Wire Cutting Machine. Under slow speed operation, the transmission error of the gear pair is measured by using two rotational laser vibrometers, compared with the calculated one, of which the result shows good agreement.

#### 1. 서 론

차량변속기의 소음중에서 화인소음(whine noise)은 주로 치형수정에 기인하는 것으로서 가위의 법칙을 만족하는 이상적인 치형곡선에 벗어난 량만큼 기어시스템의 자료가진원으로 작용하게 된다.<sup>(1)</sup> 화인

소음은 차량변속기의 전반적인 소음레벨에 직접적인 영향을 주기 때문에 보다 효과적인 소음저감대책을 위하여 치형수정으로 인한 치합전달오차의 해석 및 가진력에 대한 정확한 모델링이 이루어져야 할 것이다.

A. Kubo<sup>(2)</sup>는 차량변속기용 기어의 치형오차곡면을 네 가지로 모듈화하여 그 형상곡면에 대한 치합전달오차와 소음레벨을 실측하여 상관관계를 실험적으로 밝히고 치합전달오차를 기어소음의 성능지수로 채택하고 있다. J.D. Smith<sup>(3)</sup>는 치합전달오차를 측정하기 위하여 rotary encoder와 tangential accelerometer를 이용한 방법을 제시하였으며 S. Kato<sup>(4)</sup>는 레이저 측정장치를 이용한 치합전달오차를 측정하는

\* 대우국민차 기술연구소 P/T설계팀

\*\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\*\* 진주 연암공업전문대학 기계설계과

\*\*\*\* 창원전문대학 자동차과

\*\*\*\*\* 정회원, 부산대학교 공과대학 기계공학부

방법을 제시하였다.

본 연구에서는 가공한계오차와 탄성변형량을 고려한 치형수정곡선을 정식화하고 치형수정된 기어쌍에 대한 치합전달오차를 유도하고자 한다. 치합전달오차에 대한 실험검증을 위하여 모형을 제작하고 비접촉식 센서로 치합전달오차를 측정하여 계산치와 비교하였다. 기어쌍의 기본제원과 치형수정량을 입력 데이터로 하여 치합전달오차가 계산되는 프로그램을 개발하였고 사륜구동변속기에 적용하여 그 효용성을 보였다.

## 2. 치합전달오차 모델링

### 2.1 치형곡선의 정식화

기어치의 고체충돌을 없애기 위하여 기어의 모서리부분과 인볼류트치형의 이끝부분과 이뿌리부분을 제거(relief)하는 것을 치형수정(tooth modification)이라 하는데 기어프로파일 방향의 수정과 리드방향 수정이 있다. 본 연구에서는 기어 프로파일 방향의 치형수정만을 고려하기로 한다. 기어 프로파일 방향의 치형수정을 압력각수정이라고도 하는데 가공시 발생하는 프로파일 가공오차량과 기어치의 탄성변형량을 고려하여 치형수정곡선이 결정된다.

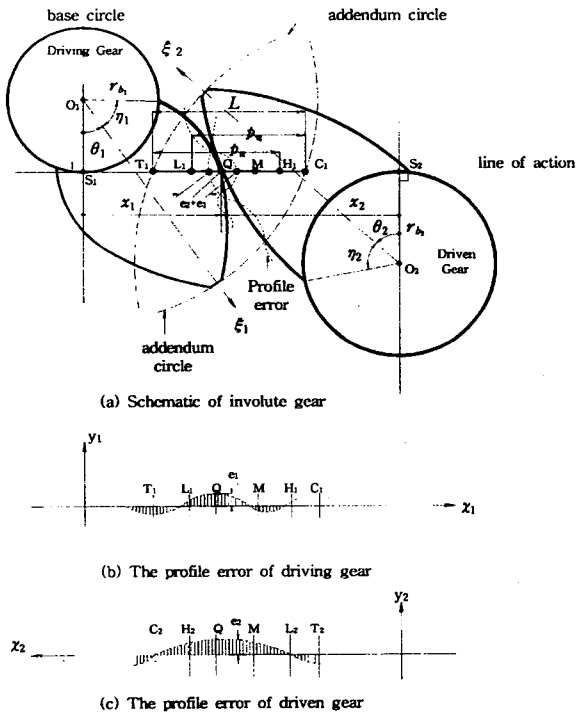


Fig. 1 Kinematic relationship of teeth modified gear system

치형수정곡선은 치접촉영역이 치면 중앙부에 위치하도록 하는 것을 일차적인 목표로 삼는다. 치형수정 곡선은 먼저 치형수정영역을 정한 후 목표치형곡선을 이 영역내에 있도록 설계한다. Fig. 1은 치형수정된 인볼류트 기어쌍의 기구학적 물림관계를 도시한 것이다. 두 인볼류트치형이 작용선상의 점 Q에서 접한다. 치접촉영역은 점 T<sub>1</sub>에서 점 C<sub>1</sub>까지인데 점 T<sub>1</sub>은 종동기어의 이끝원(addendum circle)과 작용선의 교점으로 구동기어의 True Involute Form (TIF)이 시작되는 점이다.

Fig. 2는 치형수정영역을 도시한 것이다. 가공한계오차량 E<sub>1</sub>(보통 4μ로 잡는다.)만큼을 TIF에서 중앙점(M)까지 그리고 기어변위 시작점(CHAMFER DIA.)에서 M까지 선형적으로 릴리프시킨 경계선과 기어 하중변형량 E<sub>2</sub>를 CHAMFER에서 최고 단일접촉영역 표시점(H)까지 선형적으로 릴리프시킨 경계선 등으로 치형수정영역을 정의하는데 빗금친 부분으로 표시된다.

치형수정영역의 점 T<sub>1</sub>, L<sub>1</sub>, M, H<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> 을 지나는 B-spline곡선을 상한계치형곡선이라 하고 점 T<sub>2</sub>, L<sub>2</sub>, M, H<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> 를 지나는 B-spline곡선을 하한계치형곡선이라 할 때, 목표치형곡선을 상한계치형곡선과 하한계치형곡선의 평균값으로 정의한다. 따라서 치접촉점 Q에서의 피니언(구동기어) 프로파일오차함수 e<sub>1</sub>(x<sub>1</sub>)는,

$$e_1(x_1) = A_1 + B_1x_1 + C_1x_1^2 + D_1x_1^3 + E_1x_1^4 \quad (1)$$

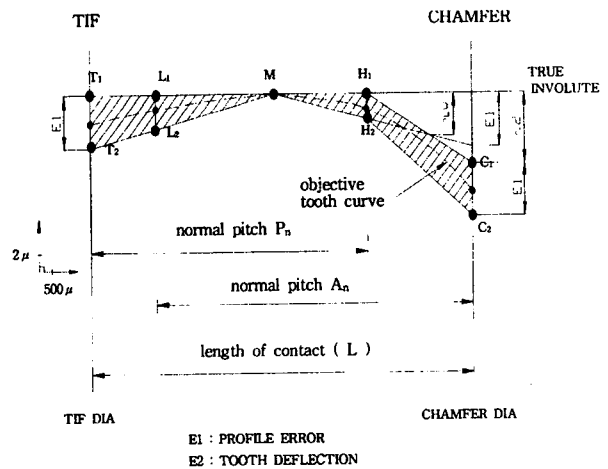


Fig. 2 Range of tooth modification in gear profile direction

로 정의되며 마찬가지로 증동기어 프로파일오차함수  $e_2(x_2)$  는,

$$e_2(x_2) = A_2 + B_2x_2 + C_2x_2^2 + D_2x_2^3 + E_2x_2^4 \quad (2)$$

로 정의되며 여기서

$$x_2 = \overline{S_1S_2} - x_1 \quad (3)$$

이다.

Fig. 1에서 구동기어의 회전각  $\theta_1$ 은 수평기준선 ( $O_1S_1$ )에서 구동기어 치중양선( $\xi_1$ 축)까지의 반시계방향 각도인데 작용선상의 점  $S_1$ 에서 치접촉점  $Q$ 까지의 거리  $x_1$ 와의 관계는,

$$x_1 = r_{b1}(\theta_1 + \eta_1), \quad \theta_{10} \leq \theta_1 \leq \theta_{11} \quad (4)$$

$$\theta_{10} = \frac{\overline{S_1T_1}}{r_{b1}} - \eta_1$$

$$\theta_{11} = \frac{\overline{S_1C_1}}{r_{b1}} - \eta_1$$

이다. 따라서 식 (1)~(4)에 의하여 양기어의 프로파일 함수  $e_1(x_1)$ ,  $e_2(x_2)$  는 매개변수  $\theta_1$ 으로 정의된다.

### 2.2 치합전달오차의 정식화

구동기어가  $\theta_1$  만큼 회전할 때 증동기어의 회전각

$\theta_2$  는 이론적으로  $\frac{N_1}{N_2} \theta_1$  이 되어야 하나 증동기어의 실제 회전각  $\theta_2$  는 이론적인 회전각과의 차이가 발생하게 되는데 그 차이를 치합전달오차  $\Delta\theta_2$  로 정의하며 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta\theta_2 = \theta_2 - \frac{N_1}{N_2} \theta_1 \quad (5)$$

Fig. 1에서 기어치형이 완전한 인블류트 곡선일 때 점  $Q$  에서 서로 접한다. 구동기어를 고정시켜 생각해 보면, 수정된 치형은 수정량  $e_1, e_2$  만큼 오차가 존재하는데 기어의 치접촉은 이론적인 인블류트 곡선이 아닌 수정된 치형이므로 이를 합한 량만큼 증동기어는 시계방향으로 밀린다. 따라서 치합전달오차  $\Delta\theta_2$  는,

$$\Delta\theta_2 = \frac{e_f^{(i)}}{r_{b2}} \quad (6)$$

이 된다. 여기서  $e_f^{(i)}$ 는 기어쌍의  $i$ 번째 치접촉부에 대한 수정량으로  $e_1 + e_2$  가 되며,  $r_{b2}$  는 증동기어의 기초원반경이다. 식 (2),(3)를 (6)에 대입하므로써, 치합전달오차가 매개변수  $\theta_1$ 의 함수로 정의된다.

인블류트기어는 물림길이내에서 항상 일점 접촉만 하는 것은 아니다. 일반적으로 물림틀이

$$\epsilon = N + \alpha \quad (7)$$

이라 가정하면, Fig. 3과 같이 A영역에서는  $N+1$  접촉을, B영역에서는  $N$ 접촉을 한다. 여기서  $N$ 은 정수,  $\alpha$ 는 1보다 작은 양수이다.

하나의 기어쌍이 물려 돌아갈 때 만나는 치들(mating teeth)이 작용선을 따라 통과하는데 인접한 만나는 치들도 물림길이 범위내에 일정간격으로 통과하므로 기어쌍에 대한 총 수정량은 각각의 치합수정량들을 겹친 상태에서의 최대값으로 나타낼 것이다. Fig. 4는 물림틀 2.4인 기어의 총 수정량  $e_{total}$ 를 나타낸 것이다. 따라서,

$$e_{total} = \max \{ e_f^{(1)}, e_f^{(2)}, \dots, e_f^{(N)} \} \quad (8)$$

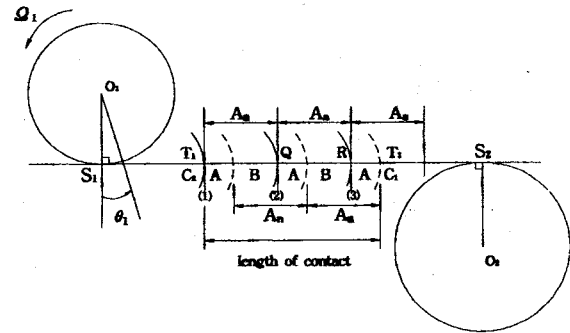


Fig. 3 Range of multiple teeth contacts

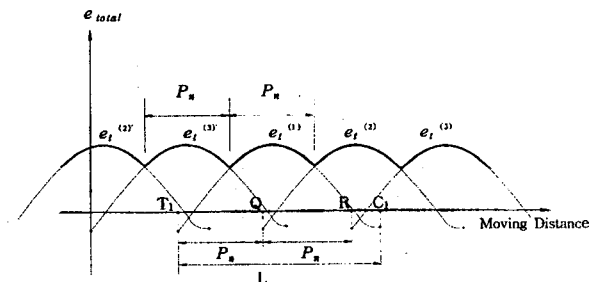


Fig. 4 Total modification function of mating gear

으로 정의된다. 만일 기어가 정속운전한다면  $\theta_1 = \Omega_1 t$  을 식 (4)에 대입하고, 다시 식 (3),(4)를 식 (1),(2)에 적용해서 식 (6)과 식 (8)의 관계로부터  $e_{total}(t)$  은 주기  $\frac{2\pi}{Z_1\Omega_1}$  인 주기함수가 됨을 알 수 있다.  $\Omega_1$  과  $Z_1$  은 각각 구동기어의 회전속도와 잇수이다.

### 2.3 치합전달오차와 기어시스템의 등가가진력과 의 관계

한 쌍의 기어에서 치형오차는 물려 돌아가는 동안 완전한 인볼류트곡선을 벗어나는 양(치형수정량)만큼 작용선 방향으로 자체적인 변위 가진 역할을 하게 된다. 따라서 치합전달오차와 시스템의 등가 가진력과 의 상관관계를 살펴보고자 한다. 설명을 위하여 Fig. 5와 같이 회전진동만 고려한 진동모델을 생각해 보자. 기어의 치변형효과는 작용선상의 등가스프링으로 가정하였다.

Fig. 6은 치접촉부의 역학모델을 나타낸다. 점 C

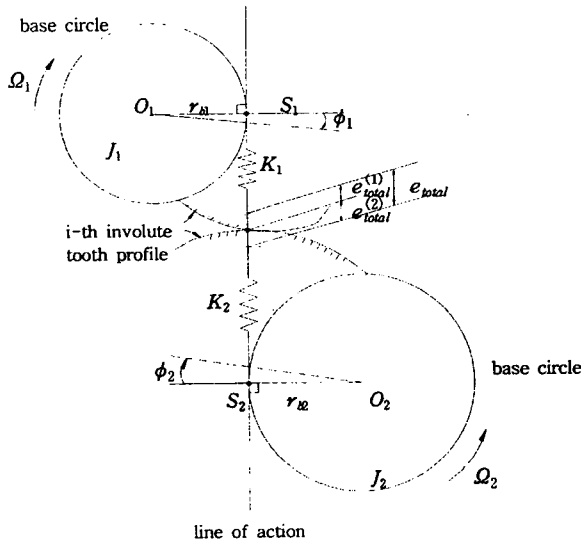


Fig. 5 A mathematical model of a gear pair

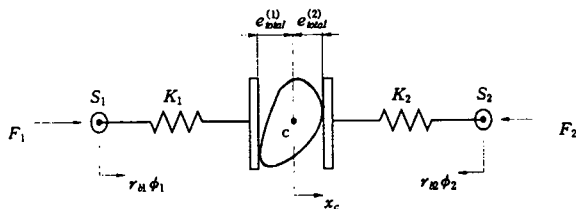


Fig. 6 A dynamic model of a gear pair

는 치형수정없는 완전한 인볼류트치형의 예상 접촉점이다. 치형수정은 강제적으로 변위를 접촉부에 작용시키는 결과가 되므로 일종의 변위가진이다. 따라서 점 C에 가상적인 캠기구를 설치하였다. 점 S1, S2에 각각 작용하는 압축력을 F1, F2라 할 때

$$F_1 = K_1(r_{b1}\phi_1 + e_{total}^{(1)} - x_c)$$

$$F_2 = K_2(r_{b2}\phi_2 + e_{total}^{(2)} + x_c)$$

$$F_1 = F_2$$

을 만족하며  $x_c$ 를 소거하면 다음과 같다.

$$F_1 = K_{eq}(r_{b1}\phi_1 + r_{b2}\phi_2 + e_{total}) \quad (9)$$

여기서  $K_{eq} = K_1K_2 / (K_1 + K_2)$ 이다. 따라서 Fig. 5의 구동기어와 종동기어에 대한 모멘트 방정식을 세우면 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$J_1\ddot{\phi}_1 + r_{b1}^2 K_{eq}\phi_1 + r_{b1}r_{b2}K_{eq}\phi_2 = T_1(t)$$

$$J_2\ddot{\phi}_2 + r_{b1}r_{b2}K_{eq}\phi_1 + r_{b2}^2 K_{eq}\phi_2 = T_2(t)$$

여기서  $J_1, J_2$ 는 각각 구동기어, 종동기어의 관성모멘트이고  $\phi_1, \phi_2$ 는 각각 비틀림 진동,  $r_{b1}, r_{b2}$ 는 각각 기초원 반경이다. 이때 가진토크  $T_1(t), T_2(t)$ 는 각각 구동기어와 종동기어에서의 치합전달오차로 인한 등가 가진토크로서 다음과 같이 정의된다.

$$T_1(t) = r_{b1}K_{eq}e_{total}(t) = r_{b1}r_{b2}K_{eq}\Delta\theta_2 \quad (10)$$

$$T_2(t) = r_{b2}K_{eq}e_{total}(t) = r_{b2}^2K_{eq}\Delta\theta_2$$

Fig. 5와 같은 간단한 모델에서 살펴볼 때 식 (10)으로부터 치합전달오차로 인한 기어시스템의 가진원은 기어의 치합전달오차에 비례함을 알 수 있다. 이 결과는 복잡한 기어시스템의 굽힘 및 축진동의 경우에도 일반적으로 성립되는데 그 이유는 식 (9)와 같이 치형수정으로 인한 탄성복원력과 변위가진으로 인한 반력으로 정의되는 치접촉 전달력은 기어회전체에 회전토크 뿐만 아니라 축의 수직방향 및 수평방향 힘으로도 작용하기 때문이다.<sup>(5)</sup>

## 3. 치합전달오차의 산출 및 실험검증

### 3.1 프로그램 개발

치합전달오차는 기어쌍의 기본제원(잇수, 모듈, 압력각, 전위량), 회전속도, 그리고 치형수정곡선을 결정해주는 치형가공한계오차량과 기어하중변형량을

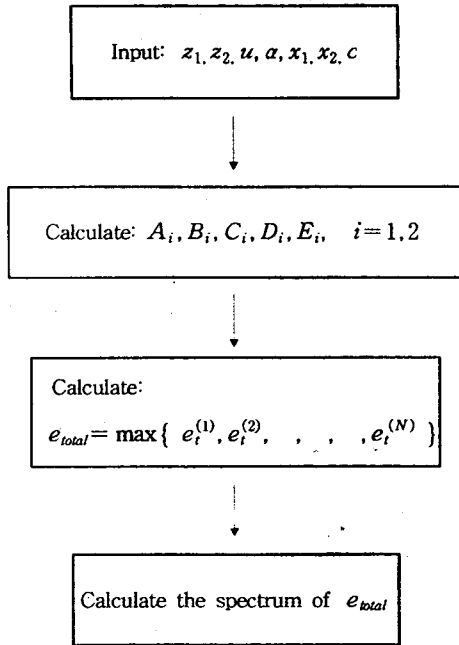


Fig. 7 Flow chart of program

입력매개변수로하여 정량적으로 산출될 수 있는데 복잡한 기구학적 계산을 필요로 하므로 프로그래밍하여 실용성을 높일 필요가 있다.

본 연구에서는 치합전달오차를 정의할 수 있는 입력매개변수를 입력하면 치합전달오차함수가 시간역과 주파수역으로 산출되는 프로그램을 개발하였다. 계산유통도가 Fig. 7에 도시되어 있다.

### 3.2 실험검증

치합전달오차 측정은 구동 및 종동 기어 축의 회전변위를 동시에 측정하는 센서를 필요로 한다. 비접촉식 레이저 진동 픽업은 일정 거리에서 조사시킴으로서 간단히 측정할 수 있는 매우 효율적인 센서로서, Fig. 8의 원리에 의해 회전체의 진원도에 무관하게 순수한 회전변위를 픽업할 수 있다. 두 빔의 반사광으로부터, 검출되는 신호는 조사점 A, B에서의 수직 속도성분은  $V_A, V_B$  이므로  $V_A - V_B = \Omega h$  가 성립된다. 따라서 두 빔사이의 거리와 수평을 유지하면 회전체의 진원도에 무관하게 순수 회전속도  $\Omega$  를 검출할 수 있다.

실험 검증용 기어시스템을 제작하기 위하여 미리 정한 치형수정량에 따라 수정된 치형곡선을 구하여 그것을 수치화하고 NC wire cutting machine으로 기어쌍을 제작하였다. Fig. 9는 제작된 실험장치로

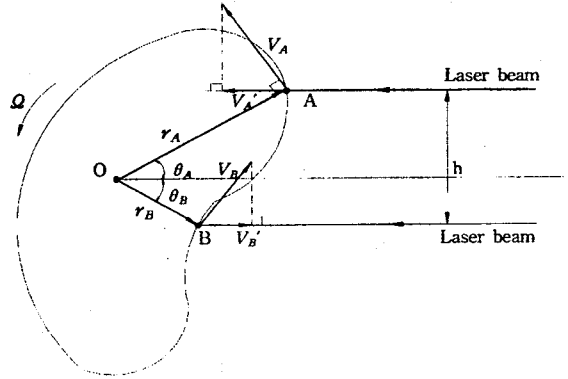


Fig. 8 The principle of laser vibrometer



Fig. 9 Test rig for the measurement of gear transmission error

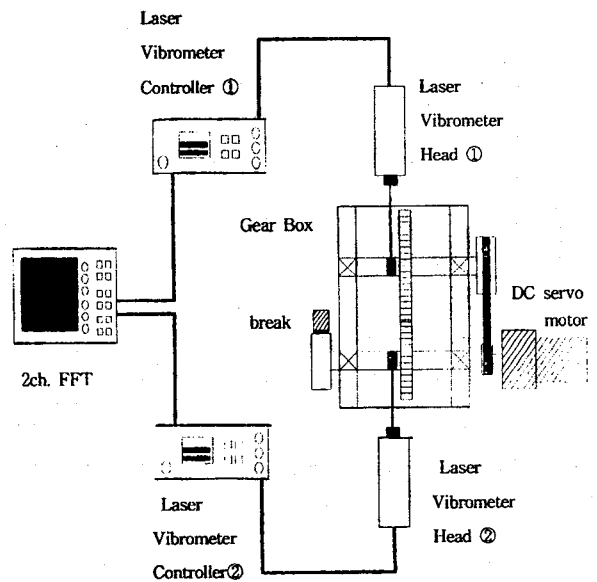
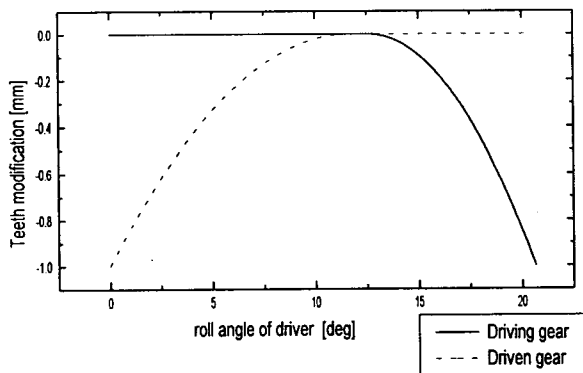


Fig. 10 Schematics of experimental system

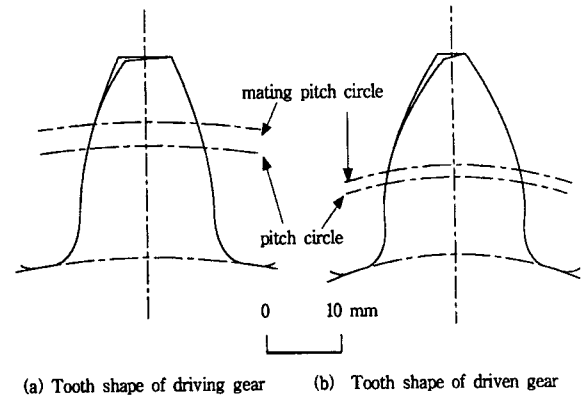
**Table 1** Input parameters of shifted gear pairing

Input parameter	Driving gear	Driven gear
Number of teeth ( $Z$ )	24 [개]	12 [개]
Module ( $m$ )	10 [mm]	
Tool pressure angle ( $\alpha$ )	20°	
Addendum of rack ( $A_r$ )	1.25 $m$	1.25 $m$
Radius of corner of rack ( $r_{rt}$ )	0.3 $m$	0.3 $m$
Addendum of gear ( $a$ )	$m$	$m$
Center distance ( $c$ )	184 [mm]	
Backlash ( $B$ )	0.3 [mm]	
Pitch radius ( $R_p$ )	120.0000 [mm]	60.0000 [mm]
Standard center distance	180.0000 [mm]	
Mating pitch radius ( $R_{pb}$ )	122.6667 [mm]	61.3333 [mm]
Mating pressure angle ( $\phi_b$ )	23.1812°	
Profile shift value ( $e$ )	0.0000 [mm]	3.87366 [mm]



**Fig. 11** The tooth modification values of two gears used in experiments

서, 기어쌍은 강성이 높은 구조물에 설치하여 진동 절연하였고, 평벨트를 이용하여 DC servo motor로 구동시켰다. 기어 백래쉬의 영향을 제거하기 위하여



**Fig. 12** The teeth shapes

중동축 풀리에 제동력을 줄 수 있도록 마찰식 브레이크를 설치하였다.

구동축과 중동축의 진동각을 동시에 측정하기 위하여 Fig. 10과 같이 2대의 회전진동측정용 레이저 진동피업(rotational laser vibrometer)을 이용하였고 조사된 빔의 반사광을 양호하게 하기 위하여 반사 회전부를 만들어 반사표면에 반사테이프를 붙여서 스펙클 효과를 줄였다. 2채널 FFT를 이용하여 구동축과 중동축의 진동각을 실시간으로 기록함으로써 치합전달오차를 측정하였다.

실험용 전위기어에 대한 설계제원은 Table 1에 나타내었다. 실험용 기어에 가해지는 치형수정량은 Fig. 11과 같이 설정하였다. 주어진 치형수정량에 따라 수정된 구동기어와 중동기어의 치형은 Fig. 12에 나타내었다. 기어를 제작하기 전에 수치적으로 기어의 수정치형에 대한 물림상태를 확인하였다.

관성효과를 최소화하기 위하여 구동기어를 30 rpm의 저속으로 회전시키고 치타음 신호를 없애기 위하여 중동기어 측에 약한 브레이킹을 하였다. 진동피업으로 얻은 구동기어와 중동기어 진동각의 시간역 신호가 Fig. 13에 도시되어 있다. 구동기어 측의 평균회전속도가 일정하지 않음을 관찰할 수 있는데 이는 DC motor의 교란토크로 인한 것이다. 그러나 치합전달오차는 양기어측에서의 상대변위로 정의되므로 구동축 회전속도의 자려변동은 소거되어 DC motor의 교란토크는 치합전달오차의 외란신호로 작용하지 않는다.

개발한 프로그램으로 치합전달오차를 구하고 같은 조건에서의 실험값과 비교한 것이 Fig. 14이다. 계산치와 측정치사이의 근접도가 양호하게 나타나므로 프로그램의 타당성이 확인되었다.

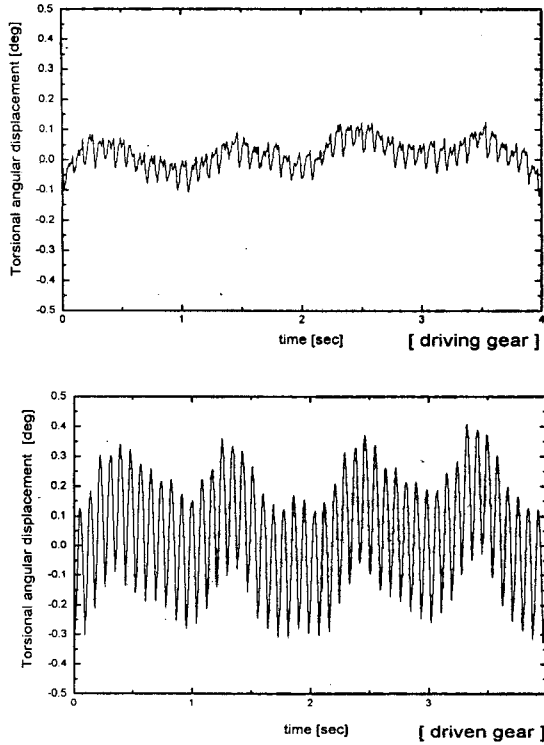


Fig. 13 Torsional angular displacements of two gears

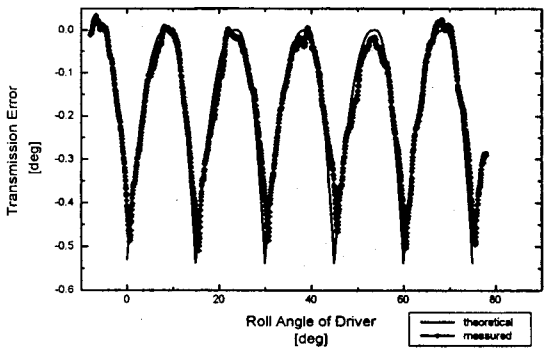


Fig. 14 Transmission errors of gear pair

3.3 상용차 변속기에의 적용

상용차 4륜구동용 변속기의 5단기어쌍에 존재하는 치합전달오차함수를 구해보았다. 계산에 필요한 입력데이터는 Table 2와 같다. Fig. 15는 각각 구동기어와 종동기어의 프로파일오차 곡선이다. Fig. 16은 구동기어 각변위에 대한 치합전달오차 함수이고 Fig. 17은 주파수역의 크기에 대한 스펙트럼 결과이다. 그림에서 0 Hz의 값은 의미없는 값이고 첫 번째 피크는 치통따주파수 ( $Z_1\Omega_1$ )에 해당하는 치합전

Table 2 Input parameter of gear system for simulation

Input parameter	Driving gear	Driven gear
Number of tooth ( $Z$ )	35 [개]	52 [개]
Module ( $m$ )	2.0 [mm]	
Pressure angle ( $\alpha$ )	17.5°	
Helix angle ( $\psi$ )	31.3975°	
Profile shift coefficient ( $\chi$ )	+0.19	-0.19
Center distance ( $c$ )	102 [mm]	
Length of contact ( $c_L$ )	10.692 [mm]	
Limit of gear manufacturing error ( $E_1$ )	15 [ $\mu\text{m}$ ]	
Tooth deflection ( $E_2$ )	7.5 [ $\mu\text{m}$ ]	8.4 [ $\mu\text{m}$ ]

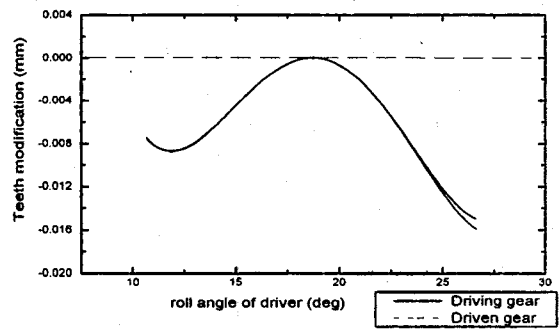


Fig. 15 The teeth modification curve of two gears

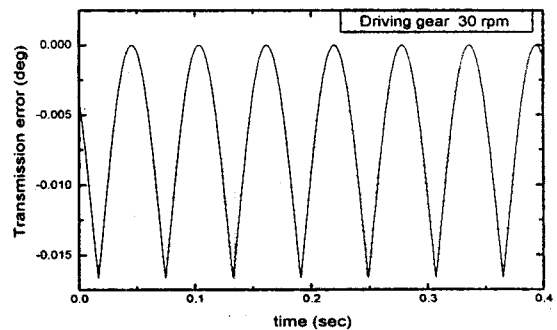


Fig. 16 The transmission error in time domain

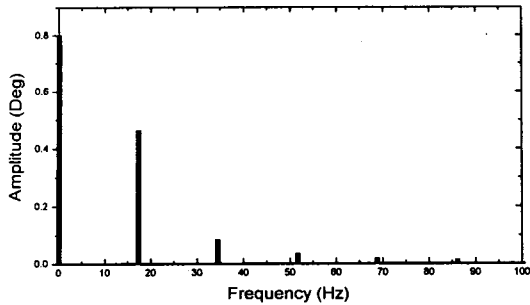


Fig. 17 Spectrum of amplitude of the transmission error

달오차의 세기이고 두 번째이상의 피크들은 주기적 특성으로 인한 harmonic 항의 세기인데 첫 번째 하모닉의 세기에 비하여 고차조화항의 세기는 대략 20% 이내에 있는 것으로 나왔다.

#### 4. 결 론

기어쌍의 기본제원과 프로파일 가공오차 및 하중 변형이 주어지면 치형수정곡선이 계산되고 이에 따른 치합전달오차함수를 산출할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 미리 주어진 치형수정곡선 계산결과가 레이저 진동픽업으로 실험검증한 결과와 잘 일치함을 보였다. 치합전달오차는 일반적인 기어시스템의 등가 가진력과 비례함을 간단한 모델의 예시를 통하여 보여주었다. 개발한 프로그램으로 상용차 변속기에 적용하여 치합전달오차를 산출하여 스펙트럼 분석한 결과 일차 하모닉항에 대한 고차 하모닉들이 20% 이내로 나왔다.

#### 후 기

본 과제는 과학진흥재단 목적기초의 '치합전달오차에 의한 차량 변속기의 진동특성 해석에 관한 연구' 과제와 관련하여 이루어졌으며 지원에 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

- (1) L.D.Mitchell and J.W.Daws, 1993, "A Basic Approach to Gearbox Noise Prediction", Transaction of SAE, vol. 91, pp. 3366~3379.
- (2) A. Kubo, 1990, "Representative Form Accuracy of Gear Tooth Flanks on the Prediction of Vibration and Noise of Power Transmission", 일본기계학회 논문집(C편), 제 56 권, 제 532 호, pp. 238~243.
- (3) J.D. Smith, 1990, "Comparing Encoder and Accelerometer Measurement of Transmission Error or Torsional Vibration", Proc.Inst.Mech. Eng., c404/027, pp. 43~49.
- (4) S. Kato, 1993, "Measurement of Transmission Error of Gears Using Laser Velocimeters", 일본기계학회 논문집(C편), 제 59 권, 제 564 호, pp. 288~293.
- (5) Nogil Park, 1987, "Analytical Investigation of Geared System Dynamics Containing Spur and Helical Gears", Ph.D Thesis, North Carolina State Univ. Raleigh.