

< 논 문 >

집중 질량 및 관성모멘트를 갖는 회전하는 티모센코 보의 면외굽힘 진동

Flapwise Bending Vibration of Rotating Timoshenko Beams with Concentrated Mass and Mass Moment of Inertia

박 정 훈* · 유 흥 희**

Jung Hun Park and Hong Hee Yoo

(1998년 1월 5일 접수 ; 1998년 2월 13일 심사완료)

Key Words : Rotating Beams (회전보), Flapwise Bending Vibration (면외굽힘 진동), Timoshenko Beams (티모센코 보), Shear and Rotary Inertia Effects (전단 및 단면관성 효과), Slenderness Ratio (세장비), Concentrated Mass and Mass Moment of Inertia (집중 질량 및 관성 모멘트), Natural Frequency and Mode Shape Variations (고유 진동수 및 모드형상 변화)

ABSTRACT

In this paper, a modeling method for the bending vibration analysis of rotating Timoshenko beams with concentrated mass and mass moment of inertia is presented. The shear and rotary inertia effects become critical for the accurate estimation of the natural frequencies and mode shapes as the slenderness ratio decreases. The natural frequencies obtained by using the Timoshenko beam theory are lower than those by using the Euler beam theory. The critical angular speed, which does not exist only with the concentrated mass, exists with the concentrated mass moment of inertia.

1. 서 론

보의 축에 수직방향 회전운동은 원심 관성력을 발생시켜 굽힘방향 시스템 강성의 변화를 초래하며 결과적으로 고유진동수의 변화를 일으킨다. 많은 실제 공학적 예제들은 다양한 보의 형상을 보여주며 그 중에는 집중질량이나 관성모멘트를 갖는 예제들도 있다. 그러나 이러한 집중질량이나 관성모멘트를 갖는 예제들에 대한 연구문헌은 발견하기가 쉽지

않다. 그 이유는 보의 회전에 따른 적절한 모델링의 선택이 간단하지가 않기 때문이다.

회전운동을 하는 단순한 외팔보의 진동에 관한 연구는 1920년경에 Rayleigh Energy 평형이론을 이용해 시작된 이래 많은 연구문헌들이^(1~3) 등장하였다. 또한 최근에는 더 복잡한 형태의 보의 진동해석들이 수행되어 왔는데 Hoa와⁽⁴⁾ Yoo는⁽⁵⁾ 끝단질량을 가진 회전 외팔보의 해석을 하였고, 최근 Kuo 등은⁽⁶⁾ 고정단의 변형효과와 보단면의 변화까지 고려한 해석결과를, Yokoyama와⁽⁷⁾ Shin 등은⁽⁸⁾ 티모센코 보에 대한 해석결과들을 발표하였다. 또 Abramovich와 Hamburger는⁽⁹⁾ 티모센코 보가 집중 질량만을 가질 경우의 해석결과를 발

* 한양대학교 대학원

** 정희원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

표했으며 Bhat는⁽¹⁰⁾ 회전에 의한 운동에너지를 고려하고 오일러 보 가정에 근거하여 끝단 질량과 관성 모멘트를 고려한 해석결과를 발표하였다.

본 논문에서는 티모센코 보 가정에 근거하여 보의 임의 지점에서의 집중질량 뿐 아니라 관성모멘트도 고려할 수 있는 면외방향 진동방정식을 유도하고, 이에 근거하여 진동특성을 연구하는데 목적을 두었다. 본 논문은 기존의 연구결과들과 비교하여 다음과 같은 고유한 연구결과를 지니고 있다. 첫째, 집중질량과 관성모멘트가 외팔보의 자유단이 아닌 임의의 위치에 존재할 경우에 대한 모델링을 제시하였다. 둘째, 회전시 집중 질량과 관성모멘트에 의한 강성변화를 명시적인 행렬로 제시하였다. 셋째, 전단 및 단면관성효과에 의해 면외방향 진동의 경우도 임계 각속도가 존재함을 보였다. 이러한 결과들은 집중질량을 임의의 위치에 선정할 수 있게 함으로써 블레이드의 모델링을 기존 모델링에 비해 더 자유롭게 하며, 강성변화를 명시적으로 품으로써 매개변수들에 의한 특성변화를 용이하게 파악할 수 있게 한다. 만일 최적화나 민감도 해석등이 필요하다면 명시화된 공식은 결정적인 역할을 할 수 있다. 마지막으로 면외방향 진동이 발생하는 임계각속도의 존재는 집중질량을 갖는 블레이드의 설계시 고려해야할 중요사항이다. 본 연구에서는 효율적 수치계산을 위해 Rayleigh-Ritz 가상 모드 방법을 사용했으며, 보 고정단에서의 기하학적 경계조건을 만족시키고 직교성을 지니는 Polynomial들을 가상모드들로 사용하였다.

2. 진동방정식 유도

Fig. 1은 반경 r 인 강체축 A 에 고정되어 일정한 각속도 ω_3 로 회전하는 티모센코 보를 보여준다. 이 보의 임의의 위치에 집중 질량과 관성모멘트를 갖는다. 그림에서 \hat{a}_1 과 \hat{a}_3 는 축 A 에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이며, x 는 O 점으로부터 변형전 보의 임의점 P_0 까지 거리를, a 는 변형전 집중 질량까지 거리를 나타낸다. 변형전 임의점 P_0 는 변형후 P 로 이동하고 \vec{u} 는 점 P_0 로부터 점 P 까지의 변위를 나타낸다. 그림 중 확대된 부분은 P 점을 중심으로 갖는 보의 미소부분으로 기준틀 A 에 속한 좌표계와 변형후 보 미소부분 B 의 관계를 보여준다. 여기서 θ_2 는 A 에 속한 좌표계와 B 에 속한 좌표계의 단위벡터들 사이의 자세각을 나타낸다. 또 u_1 과 u_3 는 각각 \hat{a}_1 과 \hat{a}_3 방향 직교변위를 s 는 인장변위를 나타낸다. 가상모드방법을 이용하여 연속체의 상미분 운동방정식을 구하기 위해 s, u_3, θ_2 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i} q_{1i} \quad (1)$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i} q_{2i} \quad (2)$$

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i} q_{3i} \quad (3)$$

여기서 $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \phi_{3i}$ 와 q_{1i}, q_{2i}, q_{3i} 는 각각 s, u_3, θ_2 를 나타내기 위한 가상 모드함수와 일반좌표들이며, μ_1, μ_2, μ_3 는 각각의 변위들을 위한 일반좌표 개수들이다. Fig. 1에서 강체 A 가 회전축 \hat{a}_3 방향으로 일정크기 ω_3 로 회전할 경우 강체 A 의 각속도, $\vec{\omega}^A$ 와 점 P 의 속도, \vec{v}^P 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (4)$$

$$\vec{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \omega_3 (r+x+u_1) \hat{a}_2 + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (5)$$

보의 미소요소 B 의 각속도, $\vec{\omega}^B$ 는 각속도 덧셈정리를 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{\omega}^B = \dot{\theta}_2 \hat{a}_2 + \omega_3 \hat{a}_3 \quad (6)$$

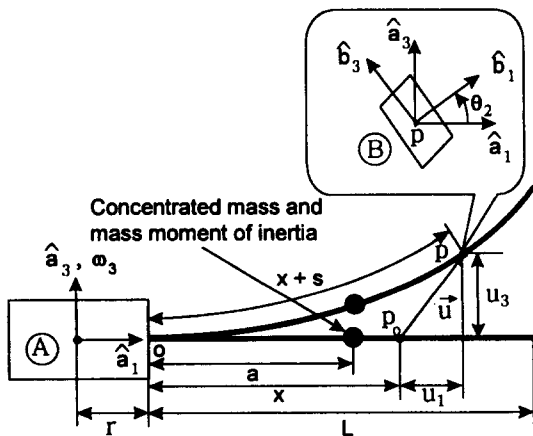


Fig. 1 Configuration of a Timoshenko beam with concentrated mass and mass moment of Inertia attached to a rotating rigid hub

미소 탄성체 B 의 각 가속도와 점 P 의 가속도는 식 (6)과 식 (5)를 시간에 대해 미분하여 다음과 같이 구한다.

$$\vec{a}^B = -\omega_3 \dot{\theta}_2 \hat{a}_1 + \ddot{\theta}_2 \hat{a}_2 \quad (7)$$

$$\vec{a}^P = [\ddot{u}_1 - \omega_3^2(r+x+u_1)]\hat{a}_1 + 2\omega_3 \dot{u}_1 \hat{a}_2 + \ddot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

점 P 의 속도 \vec{v}^P 와 미소 탄성체 B 의 각속도 $\vec{\omega}^B$ 는 \dot{q}_{1i} , \dot{q}_{2i} , 그리고 \dot{q}_{3i} 의 함수로 표현된다. \dot{q}_{ai} 를 일반속력으로 정의하면 \vec{v}^P 와 $\vec{\omega}^B$ 의 일반속력에 대한 편속도와 편각속도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = -\sum_{j=1}^3 K_{ij}^{GC} q_{2j} \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_3 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^B}{\partial \dot{q}_{3i}} = \phi_{3i} \hat{a}_2 \quad (11)$$

여기서,

$$K_{ij}^{GC} \equiv \int_0^x \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (12)$$

참고문헌 (8)과 (12)에 제시된 운동방정식의 유도 과정을 이용하여 집중질량과 질량 관성모멘트를 갖는 회전 티모센코 외팔보의 선형 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - (\omega_3^2 M_{ij}^{11} + K_{ij}^s) q_{1j} - r\omega_3^2 P_{1i} - \omega_3^2 Q_{1i} = 0 \quad (13)$$

$$M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^{G22} + \omega_3^2 r K_{ij}^{G1} + \omega_3^2 K_{ij}^{G2}) q_{2j} - K_{ij}^{G23} q_{3j} = 0 \quad (14)$$

$$M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} - K_{ij}^{G32} q_{2j} + (K_{ij}^{E33} + K_{ij}^{G33}) q_{3j} = 0 \quad (15)$$

식 (13), (14), 그리고 (15)는 각각 보의 인장, 면외굽힘, 그리고 단면관성 방향에 대한 운동방정식을 나타내고 여기서 사용된 행렬들의 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{bb} \equiv \int_0^L \rho \phi_{bi} \phi_{bj} dx \quad (b=1,2) \quad (16)$$

$$M_{ij}^{33} \equiv \int_0^L I_{22} \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^s \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^{E33} \equiv \int_0^L EI_2 \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^{G22} \equiv \int_0^L xGA \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^{G23} \equiv \int_0^L xGA \phi_{2i,x} \phi_{3j} dx \quad (21)$$

$$K_{ij}^{G32} \equiv \int_0^L xGA \phi_{3i} \phi_{2j,x} dx \quad (22)$$

$$K_{ij}^{G33} \equiv \int_0^L xGA \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (23)$$

$$K_{ij}^{G1} \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (24)$$

$$K_{ij}^{G2} \equiv \frac{1}{2} \int_0^L \rho(L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (25)$$

$$P_{1i} \equiv \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (26)$$

$$Q_{1i} \equiv \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx \quad (27)$$

그리고

$$I_{22} \equiv \frac{\rho}{A} I_2 \quad (28)$$

위 식들에서 E , G , A , I_2 , 그리고 x 는 각각 보의 영계수, 전단계수, 보의 단면적, 보 단면의 면외방향 면적 모멘트, 그리고 단면 형상계수를 나타내며 ρ 와 I_{22} 는 보의 단위길이당 질량과 미소요소 B 의 단위길이당 질량관성모멘트를 나타낸다. 보 임의 지점 $x=a$ 에 부가된 집중질량과 질량 관성모멘트를 고려하기 위해서 ρ 와 I_{22} 는 충격함수 $\delta(x-a)$ 를 이용해 다음과 같이 모델링하였다.

$$\rho(x) = \rho^* + m \delta(x-a) \quad (29)$$

$$I_{22}(x) = I_{22}^* + m_r R_g^2 \delta(x-a) \quad (30)$$

위의 두 식에서 ρ^* 와 I_{22}^* 는 각각 집중질량이 없는 보의 단위길이당 질량과 미소요소 B 의 관성질량 모멘트를 의미하며 m_r 과 R_g 는 각각 집중질량의 크기와 집중질량의 관성반경을 나타낸다. 따라서 진동 해석을 위한 질량 및 강성행렬 요소중 ρ 와 I_{22} 에 관련된 항들은 다음과 같이 다시 계산된다.

$$M_{ij}^{bb} = \int_0^L \rho \phi_{bi} \phi_{bj} dx = M_{ij}^{bb^*} + m_r \phi_{bi}(a) \phi_{bj}(a) \quad (31)$$

$$M_{ij}^{33} = \int_0^L I_{22} \phi_{3i} \phi_{3j} dx = M_{ij}^{33^*} + m_r R_g^2 \phi_{3i}(a) \phi_{3j}(a) \quad (32)$$

$$K_{ij}^{G1} = K_{ij}^{G1*} + m_r \int_0^a \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (33)$$

$$K_{ij}^{G2} = K_{ij}^{G2*} + a m_r \int_0^a \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (34)$$

여기서 M_{ij}^{bb*} , K_{ij}^{G1*} , K_{ij}^{G2*} 는 각각 식 (16), (24), (25)에 ρ 대신 ρ^* 를 대입한 값을 의미하며 M_{ij}^{33*} 는 식 (17)에서 I_{22} 대신 I_{22}^* 를 대입한 값을 의미한다. 외팔보의 경우 인장방향 고유 진동수는 굽힘방향 고유 진동수에 비해서 통상적으로 훨씬 높다. 인장방향과 굽힘방향 고유 진동수간의 간섭효과는 회전속도가 매우 큰 경우에만 현저히 나타나므로 [참고 문헌 (13)참조] 본 논문에서는 이를 무시할 수 있다 가정하고 진동해석을 수행한다. 식 (13), (14), (15)로부터 인장방향과의 연성효과를 무시한 면의 방향 굽힘진동 방정식은 다음과 같다.

$$M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2i} + (K_{ij}^{G22} + \omega_3^2 r K_{ij}^{G1} + \omega_3^2 K_{ij}^{G2}) q_{2i} - K_{ij}^{G23} q_{3j} = 0 \quad (35)$$

$$M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} - K_{ij}^{G32} q_{2i} + (K_{ij}^{E33} + K_{ij}^{G33}) q_{3j} = 0 \quad (36)$$

식 (35)와 식 (36)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해서 다음 같이 무차원수들을 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (37)$$

$$\delta^* = \frac{r}{L} \quad (38)$$

$$\pi = \frac{a}{L} \quad (39)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_2}} \quad (40)$$

$$\beta = \frac{m_r}{\rho^* L} \quad (41)$$

$$\gamma = T\omega_3 \quad (42)$$

$$\eta = \frac{R_g}{L} \quad (43)$$

$$\epsilon = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (44)$$

$$\theta_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \quad (45)$$

그리고

$$T = \left(\frac{\rho^* L^4}{EI_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

위의 식들에 정의된 무차원 변수들 중 β 는 보의 질량에 대한 집중질량의 비를, η 는 보의 길이에 대한 집중질량의 관성반경비를 각각 의미한다. 식 (37)~(45)에서 정의한 무차원변수들을 이용하여 식 (35)와 식 (36)의 무차원화된 면외방향 진동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \overline{M}^{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{M}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{K}^{22} & \overline{K}^{23} \\ \overline{K}^{32} & \overline{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

여기서,

$$\overline{M}_{ij}^{22} \equiv \overline{M}_{ij}^{22*} + \beta \phi_{2i}(\pi) \phi_{2j}(\pi) \quad (48)$$

$$\overline{M}_{ij}^{33} \equiv \frac{1}{\alpha^2} \overline{M}_{ij}^{33*} + \beta \eta^2 \phi_{3i}(\pi) \phi_{3j}(\pi) \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_{ij}^{22} &\equiv \delta^* \gamma^2 \left(\overline{K}_{ij}^{G1*} + \beta \int_0^\pi \phi_{2i,\xi} \phi_{2j,\xi} d\xi \right) \\ &\quad + \gamma^2 \left(\overline{K}_{ij}^{G2*} + \beta \pi \int_0^\pi \phi_{2i,\xi} \phi_{2j,\xi} d\xi \right) \\ &\quad + \epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G22} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\overline{K}_{ij}^{23} \equiv -\epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G23} \quad (51)$$

$$\overline{K}_{ij}^{32} \equiv -\epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G32} \quad (52)$$

$$\overline{K}_{ij}^{33} \equiv \epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G33} + \overline{K}_{ij}^{E33} \quad (53)$$

식 (48)~(53)에서 ϕ 는 무차원화된 보의 모드함수를 나타내고 사용된 행렬들의 요소는 다음과 같다.

$$\overline{M}_{ij}^{22*} \equiv \int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} d\xi \quad (54)$$

$$\overline{M}_{ij}^{33*} \equiv \int_0^1 \phi_{3i} \phi_{3j} d\xi \quad (55)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G1*} \equiv \int_0^1 (1-\xi) \phi_{2i,\xi} \phi_{2j,\xi} d\xi \quad (56)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G2*} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \phi_{2i,\xi} \phi_{2j,\xi} d\xi \quad (57)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G22} \equiv \int_0^1 x \phi_{2i,\xi} \phi_{2j,\xi} d\xi \quad (58)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G23} \equiv \int_0^1 x \phi_{2i,\xi} \phi_{3j} d\xi \quad (59)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G32} \equiv \int_0^1 x \phi_{3i} \phi_{2j,\xi} d\xi \quad (60)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G33} \equiv \int_0^1 x \phi_{3i} \phi_{3j} d\xi \quad (61)$$

$$\overline{K}_{ij}^{E33} \equiv \int_0^1 \phi_{3i,\xi} \phi_{3j,\xi} d\xi \quad (62)$$

식 (47)로부터 운동방정식의 관성항과 강성항의 변화에 관련된 집중질량과 집중질량 관성모멘트에 의한 영향을 무차원화된 형태로 살펴볼 수 있다. 식 (47)에서 ϑ_{2j} 와 ϑ_{3j} 로 구성된 벡터를 $\underline{\vartheta}$ 라하고 이 벡터가 시간에 대해 조화함수라면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega t} \underline{\Theta} \quad (63)$$

여기서 ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원 변수이며 $\underline{\Theta}$ 는 각 모드형상을 대표하는 벡터이다. 식 (63)을 이용하면 식 (47)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\omega^2 \mathbf{M} \underline{\Theta} = \mathbf{K} \underline{\Theta} \quad (64)$$

여기서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 $(\mu_2 + \mu_3) \times (\mu_2 + \mu_3)$ 의 크기를 갖는 대칭 정방행렬들로 그 요소들은 다음과 같다.

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}^{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}^{33} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{K} \equiv \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}^{22} & \overline{\mathbf{K}}^{23} \\ \overline{\mathbf{K}}^{32} & \overline{\mathbf{K}}^{33} \end{bmatrix} \quad (66)$$

3. 수치해석 결과

Table 1은 해석에 사용된 모드수의 증가에 따른 고유진동수의 수렴을 대표적으로 보여준다. 이 결

Table 1 Convergence of natural frequencies:
($\gamma=10.0$, $\alpha=10.0$, $\delta=1.0$, $\beta=1.0$,
 $\eta=0.1$, $\epsilon=0.385$, $\chi=0.85$, $\pi=1.0$)

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
1	14.657	30.241	*****	*****	*****
2	14.566	23.693	60.546	65.902	*****
3	14.527	22.606	58.558	65.248	88.382
4	14.527	22.457	57.918	65.007	87.989
5	14.526	22.446	57.888	64.993	86.129
6	14.526	22.445	57.888	64.992	86.086
7	14.526	22.445	57.888	64.992	86.060
8	14.526	22.445	57.888	64.992	86.060

Table 2 Comparison of natural frequencies:
($\gamma=0.0$, $\alpha=50.0$, $\beta=1.0$, $\eta=0.5$,
 $\epsilon=0.375$, $\chi=0.85$, $\pi=1.0$)

	Present	Ref. (9)
1 st	1.27	1.27
2 nd	4.53	4.53
3 rd	23.32	23.32
4 th	58.29	58.24

과는 굽힘방향과 탄성축의 기울기의 모드수가 각각 8개일 때 가장 낮은 5개의 고유진동수는 일정한 값에 수렴함을 보여준다. 모드수가 각각 7개일 때와 8개일 때 무차원 고유진동수를 수치적으로 비교하면 소수점 3째 자리까지 정확하게 잘 일치함을 알 수 있는데 본 연구에서는 이를 충분한 수렴으로 간주하고 이후 결과를 얻기 위해서 항상 각각 8개의 모드를 사용하여 수치해석을 수행하였다.

Table 2는 본 연구에서 구해진 수치해석결과들의 정확성을 검증하기 위해서 우선 회전이 없는 경우 참고문헌 (9)의 결과와 비교하고 있다. 이 결과는 서로 오차가 최대 약 0.09% 정도 이내에서 잘 일치하고 있다.

Table 3은 보가 회전하는 경우 보의 세장비 α 에 따른 참고문헌 (10)의 오일러보 이론에 의한 결과와의 비교를 보여준다. 해석결과로부터 α 가 커짐에 따라 본 연구의 결과는 참고문헌의 해석결과에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 세장비 α 가 충분히 클 경우 티모센코 보이론과 오일러 보이론에 의한 해석결과는 서로 잘 일치하는 것으로 알려져 있으며 α 가 100일 경우 두 결과는 최대 오차 약 1.5% 내에서 잘 일치함을 보여준다. 이후 해석결과를 얻기 위해서 ϵ 의 값은 포아송비가 0.3일 때의 값 0.385를 단면형상계수 χ 는 직사각형 단면에 대한 값인 0.85를 사용하였다.

Fig. 2는 $\beta=1.0$, $\eta=0.1$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$ 에 대해 세장비 α 가 각각 20, 100 그리고 오일러보에 대한 가장 낮은 세 고유진동수의 변화를 나타낸다. 세 경우 모두 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 증가를 보여주는데, 오일러 보이론이 티모

Table 3 Comparison of natural frequencies:
($\gamma=10.0$, $\delta=1.0$, $\beta=1.0$, $\eta=1.0$,
 $\epsilon=0.385$, $\chi=0.85$, $\pi=1.0$)

	α	1 st	2 nd	3 rd
Ref.(10)	**	3.783	15.489	65.165
	10	2.307	14.819	57.524
	20	2.994	15.062	60.493
	30	3.319	15.210	62.158
Present	40	3.486	15.298	63.134
	50	3.580	15.353	63.726
	60	3.636	15.388	64.102
	70	3.672	15.411	64.351
	80	3.696	15.428	64.524
	90	3.714	15.439	64.648
	100	3.726	15.448	64.740

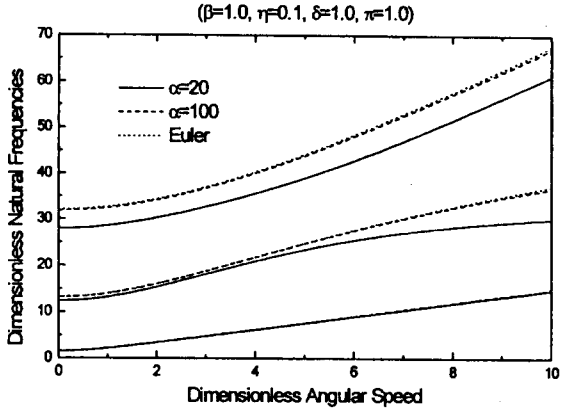


Fig. 2 Natural frequency variation vs. angular speed

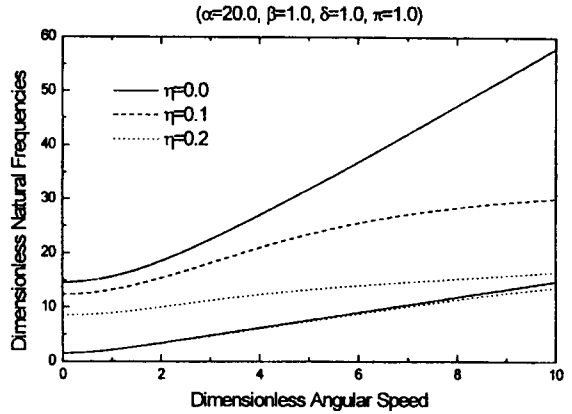


Fig. 4 Natural frequency variation vs. angular speed

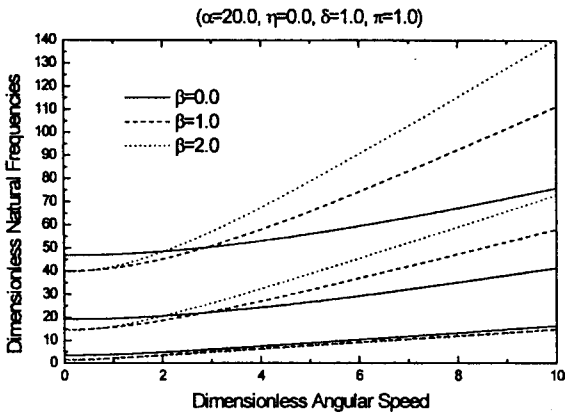


Fig. 3 Natural frequency variation vs. angular speed

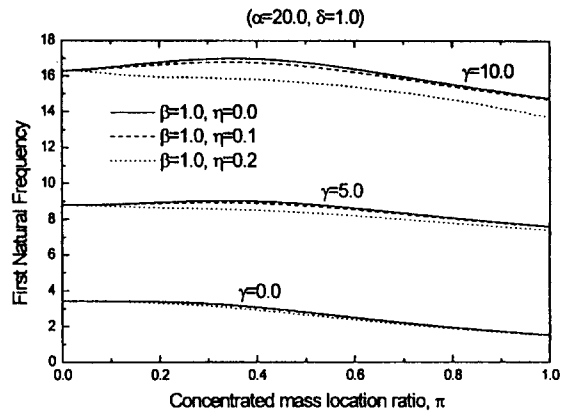


Fig. 5 Concentrated mass location effect on the first natural frequencies

센코 보이론 보다 큰 결과를 제공하고 두 이론은 1 차보다 2차이상의 고유진동수에서 상당한 차이를 보이고 회전각속도의 증가에 따라 그 차이가 증가함을 알 수 있다. 또한 세장비 α 가 작을수록 오일러 보 이론에 의한 결과와의 차이가 커짐을 알 수 있다.

Fig. 3은 $\alpha=20$, $\eta=0.0$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$ 일 때 면외굽힘 진동의 가장 낮은 세 개의 무차원고유진동수를 보여준다. 직관적으로 알 수 있듯이 β 의 증가는 저속의 회전에서는 고유진동수의 감소를 초래하나 일정 회전각속도 이상에서는 원심력에 의한 강성항의 증가로 인해 집중질량을 가지는 보의 고유진동수 증가율이 집중질량을 가지지 않는 보의 고유진동수 증가율보다 커지게 됨을 알 수 있다.

Fig. 4는 집중질량의 관성반경비에 따른 무차원고유진동수의 변화를 나타낸다. 집중질량의 관성모멘트는 ($= m_r R_g^2$) 회전각속도에 상관없이 관성항만을 증가시키므로 관성모멘트를 고려할 경우 고려치

Table 4 Critical angular speed vs. η and α : ($\delta=1.0$, $\beta=1.0$, $\pi=1.0$)

η	Euler	$\alpha=20$	$\alpha=100$	$\alpha=200$
0.00	*****	230.668	*****	*****
0.05	*****	65.887	150.771	233.162
0.10	*****	33.095	71.172	103.149
0.15	82.223	21.698	43.178	55.775
0.20	35.715	15.845	28.636	33.032
0.25	22.265	12.236	19.951	21.544
0.30	15.324	9.765	14.433	15.068

않은 경우에 비해 고유진동수가 낮음을 알 수 있다. (특히 고유진동수의 감소는 고차모드에서 두드러지게 나타남을 알 수 있다.)

Table 4는 끝단강체의 반경비와 세장비에 따른 임계각속도 변화를 보여준다. 집중질량과 관성모멘트를 갖지 않는 회전외팔보의 면외방향 임계각속도

는 존재하지 않는 것으로 알려져 있다 [참고문헌 (14)참조]. 하지만 집중질량 관성모멘트는 관성항을 증가시키는 역할을 하고 티모센코 보는 오일러 보에 비해 낮은 고유진동수를 가지기 때문에 회전각 속도와 일치하는 고유진동수가 존재할 수 있다. 해석결과로부터 세장비가 작고 관성반경비가 클수록 임계각속도는 낮아짐을 알 수 있다.

Fig. 5는 집중질량의 위치변화와 β , η , γ 에 따른 첫 번째 무차원 고유진동수 값을 나타내고 있다. 보가 회전하지 않는 경우 집중질량이 자유단으로 이동할수록 고유진동수가 계속 감소하나 회전할 경우 집중질량이 고정단에서 자유단으로 이동함에 따라 적절한 위치까지 고유진동수가 증가하는 현상을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 회전시 집중질량에 의한 강성증가효과가 관성증가효과보다 크기 때문에 나타나는 현상이라 할 수 있다. 그러나 집중질량이 자유단에 가까이 가면 다시 관성효과가 강성효과보다 커져서 고유진동수가 감소함을 알 수 있다. 집중질량의 관성모멘트는 관성항만을 증가시키므로 고유진동수를 감소시키고 집중질량을 적절한 위치에 놓을 경우 그 감소폭은 최대가 됨을 알 수 있다. 모드형상 특히 절점이나 반절점의 위치는 진동제어를 목적으로 하는 경우 상당한 중요성을 가질 수 있다.

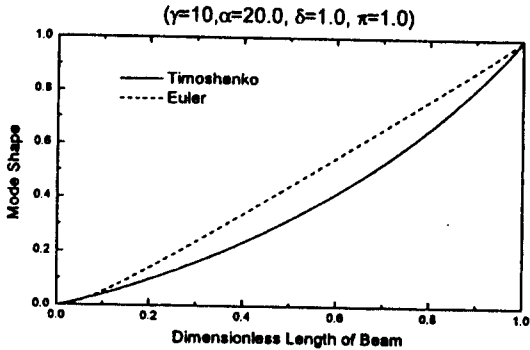
Fig. 6은 $\alpha=20$, $\beta=1.0$, $\eta=0.1$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$, $\gamma=10.0$ 일 때 오일러 보이론과 티모센코 보이론에 의해 구해진 가장 낮은 세 개의 모드형상 차이를 보여주고 있다. 티모센코 보이론에 의한 해석결과는 오일러 보이론에 의한 해석결과에 대해 두 번째 모드의 경우 절점이 없어지고 세 번째 모드의 경우에는 절점이 6% 바깥으로 이동한다.

4. 결 론

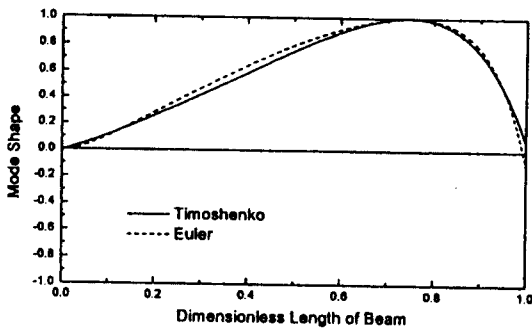
본 논문에서는 보상의 임의 지점에 집중질량과 질량 관성모멘트를 갖는 회전티모센코 외팔보의 면외방향 굽힘진동 해석을 위한 모델링이 제시되었다. 이 모델링은 집중질량과 질량 관성모멘트를 고려하기 위해 보의 단위길이당 질량과 질량 관성모멘트를 충격함수로 이상화하여 간명하게 수식을 유도하였다. 유도된 모델링의 정확성은 수치해석결과를 다른 연구결과와 비교하여 규명하였다. 본 연구에서 제시된 진동해석모델링은 집중질량의 위치에 상관없이 회전하는 외팔보의 진동해석을 끝단질량, 회전각 속도, 축반경 크기의 변화에 따라 효과적으로 수행할 수 있는 특성을 갖는다.

참 고 문 헌

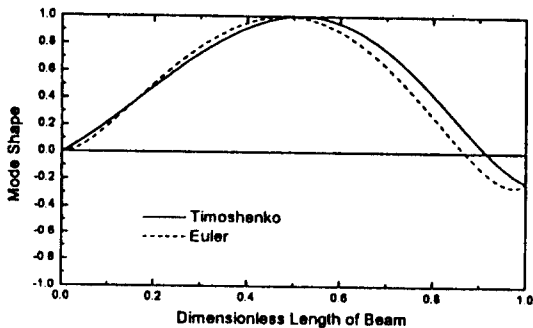
- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.



(a) First mode shape variation



(b) Second mode shape variation



(c) Third mode shape variation

Fig. 6 Variations of first three mode shapes

- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a rotating beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369~381.
- (5) 유흥회, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 20 권, 제 8 호, pp. 2516~2523.
- (6) Kuo, Y. H., Wu, T. H., Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
- (7) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (8) 신상하, 유흥회, 1996, "전단 및 단면 관성효과를 고려한 회전외팔보의 모델링 및 진동해석," 한국소음진동공학회지, 제 6 권, 제 2 호, pp. 179~186.
- (9) M. Abramovich and O. Hamburger, 1991, "Vibration of a Cantilever Timoshenko Beam with a Tip Mass", *J. of Sound and Vibration* Vol. 148, No. 1, pp.162~170.
- (10) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *J. Sound and Vibration*, 105(2), pp. 199~210
- (11) Yoo, H., Ryan, R., and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (12) 유흥회, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지, 제 19 권, 제 3 호, pp. 32~39
- (13) 신상하, 유흥회, 1996, "인장-굽힘 운동간 연성 효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주학회지, 제 24 권, 제 2 호, pp. 77~84.
- (14) 유흥회, 1994, "회전 외팔보의 면외방향 굽힘 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 19 권, 제 2 호, pp. 348~353.