

# 확률특성을 고려한 탄성-완전소성 뼈대 구조물의 붕괴하중 산정

## Determination of the Collapse Load of Elastic-Perfectly Plastic Frame Under the Probabilistic Load Incremental Method

윤 성 수\* · 장 주 흠\* · 김 한 중\*\* · 이 정 재\*\*\*  
Yoon, Seong Soo · Jang, Ju Hum · Kim, Han Joong · Lee, Jeong Jae

### Summary

Since a structure carries out its given functions and purposes while it is always resisting against the external load, the capacity of the resistance in the structure within the range that will not collapse the structure itself becomes the important factor in the design of the structures. Therefore, many suggestions were proposed and noted for determining method of the collapse load. Some of the methods from the suggestions have been commonly used due to the considerations on their distinctive advantages such as the compactness of the conceptions and the convenience in the computation. However, in case when the variation becomes huge in the materials and load, the results would carry(have or contain) many uncertain elements. On the other hand, load incremental method which regards the characteristics of the probability must be more attainable method even though it might complicate the calculation.

This study intends to develop a finite element model that uses the probabilistic load incremental method to estimate the collapse load, and also to compare the result of the analysis with the linear load incremental method and Turkstra's Rule.

### I. 서 론

농업 구조물은 과거 농업 생산을 위한 보조적 기능을 주로 담당하였으나, 농촌의 생활양식이 변화되고, 농업생산이 대규모화되고, 다양하게 변화됨에 따라 생산, 저장, 가공, 유통, 판매시설 등의 시설들로 그 기능이 확대되고 있으며, 그 규모도 대형화되고 있어 구조물의 안전성이 점차

중요시되고 있다. 구조물의 안전성을 결정짓는 중요한 요인의 하나는 구조물이 붕괴되지 않고 저항할 수 있는 한계치인 붕괴하중이며, 이는 모든 구조물의 설계에 직접적인 영향을 주는 기준이 된다. 과소한 붕괴하중의 산정은 구조물이 부실하게 되어 목적인 기능을 수행할 수 없게 되며, 과대한 산정은 비경제적인 구조물이 되어 자원의 낭비를 가져온다.

\* 서울대학교 대학원

\*\* 서울대학교 농업개발연구소

\*\*\* 서울대학교 농공학과

키워드 : 붕괴하중, 확률하중증분법, 비례증분법,  
Turkstra's rule

그러나 붕괴하중을 정확하게 산정하는 것은 현실적으로 매우 어려운 일이므로 많은 연구자들이 이에 대한 여러 가지 방법들을 제안한 바 있다. 지금까지 제안된 방법들은 대부분 확률론적인 범주에 속해있는데 이는 외부하중이 일정한 값에 도달하여 구조물의 부재나 시스템이 저항할 수 있는 한계치와 같아지는 하중으로 판단하는 것이다. 이 방법으로 설계를 할 경우, 작용하중의 변동량과 재료 저항의 분산도가 커짐에 따라 많은 불확실량을 내포하게 되어 결과를 신뢰할 수 없게 된다. 이에 반해 확률적인 접근개념은 실제계에서는 하중이나 구조물의 저항은 확정적인 값이 아닌 어떤 분포 특성을 갖고 발생하는 점이 인정되고, 이 확률적인 값을 고려하므로 전자에 비하여 더 현실적인 붕괴하중의 값을 얻을 수 있는 방법으로 알려져 있다. 그러나 여유부재가 많은 실질 구조물의 경우 확률적인 접근법은 계산량이 커져 이를 직접 계산하는 것은 거의 불가능하다. 붕괴하중을 산정하기 위해서는 초기하중을 증분해야 하는데 구조물에 주어지는 하중들을 각기 초기값에서 일정한 비율에 따라 증분하는 비례증분법과 구조물에 작용하는 주 하중을 정의하여 그 하중만 증가시키고 나머지 하중은 평균값을 취하는 Turkstra rule이 이용되고 있다. 그러나 더 현실적인 붕괴하중을 모사하기 위해선 하중이 확률적이므로 하중증분 역시 확률적으로 증가시켜야 함이 타당하다. 따라서 본 연구에서는 탄성-완전소성 뼈대 구조물의 붕괴하중을 결정하기 위하여 확률적인 하중증분 개념이 도입된 유한요소해석 모델을 개발하고, 그 결과를 비례하중 증분법, Turkstra's Rule에 의하여 산정된 붕괴하중과 비교함으로써 개발된 모델을 검증하였다.

## II. 연구사

구조물의 붕괴시 구조물의 거동을 탄성한도 내

의 해석보다 좀더 실제적으로 고찰하고자 하는 연구는 1914년 Krazincy가 소성해석과 소성설계 개념을 제시하면서 마련되었고, 1939년 Vanden Broek는 소성이론을 배경으로 한 극한설계이론을 발표하였다.<sup>12)</sup> 그 후 극한 강도를 고려하여 평면 뼈대구조의 항복 강도이후의 재료특성과 탄소성해석에 대한 연구가 이루어졌으며, 1950년 초 Neal과 Symonds는 단순 소성이론으로 뼈대 구조물의 붕괴하중 계산을 하였다. 이와 비슷한 시기에 Heyman은 처음으로 구조물 소성해석에 선형계획기법을 응용하였다. 1971년 Grierson과 Gladwell은 붕괴하중 해석 문제를 선형계획 문제로 취급 계산하였고,<sup>7)</sup> 그 이후 Cohn, Ghosh, Parimi는 소성구조물에 대한 해석과 설계문제를 선형문제로 형성하는 일반적인 방법을 개발하였다.<sup>4)</sup>

구조해석에 확률유한요소법을 처음으로 도입한 사람은 1975년 Handa<sup>8)</sup>이다. Handa는 하중, 변위 및 강성을 평균치 항과 분산 항으로 구분하고 분산의 1차항까지 고려하여 기존의 유한요소법 알고리즘에 대입하여 문제를 해석하였다. Hart, Collins등은 유한요소법 내에 확률변수의 개념을 두어 동해석에 이용하는 방법을 검토하였고,<sup>11)</sup> Cambou등은 선형탄성해석에 유한요소법을 이용한 방법을 제시하였다.<sup>8,9)</sup>

Kiureghian은 확률유한요소법을 불변2차 모멘트방법에 응용하여 뼈대구조물의 신뢰성 해석을 수행한 바 있으며,<sup>5)</sup> 이<sup>2)</sup>는 뼈대구조의 요소별 신뢰도의 계산에 확률적 유한요소법을 이용하였고, 김<sup>1)</sup>은 여러 가지 구조요소에 대한 정식화를 통해 적용성을 확대하였다.

그러나 작용하중의 확률특성을 고려하여 증분하중을 결정하는 것이 실제 구조물에 작용하는 하중을 잘 묘사할 수 있어 현실적임에도 확률특성을 고려한 붕괴하중을 산정한 연구는 예를 구하기 어려웠다.

### III. 붕괴하중 산정 모델의 개발

#### 1. 하중증가소성해석법(Load Incremental Plastic Frame Analysis)

하중증가소성해석 방법은 hinge-by-hinge의 수학적 표현으로 하중을 각 단계마다 점차 증가시키면서 힌지의 발생여부 및 구조물의 붕괴여부를 판단하는 방법이다. 만약 소성 힌지가 어떤 부재에서 발생했다면, 그 부재를 소성 힌지로 대체시킨 후 전체 구조물의 붕괴가 발생할 때까지 일련의 hinge-by-hinge 해석을 계속한다. 이 방법의 경우 구조물의 강도 행렬을 변화시켜가며 계속적인 반복계산을 하게 되는데, 소성힌지의 발생에 대한 판별방법에 따라 PM상관도에 의한 방법<sup>16)</sup>과, Timoshenko보 이론에 의한 방법<sup>15)</sup>으로 나눌 수 있다.

하중증가소성해석법은 많은 연산을 필요로 하나 컴퓨터 성능의 향상으로 크게 문제가 되지 않고, 직접소성해석법에 비해 정도가 높은 해를 제공하므로 본 연구에서도 이 방법에 의해 소성해석을 하였으며, Timoshenko보 이론에 의한 소성힌지 삽입방법을 이용하였다.

#### 2. 기본 가정

하중증가소성해석법에 의한 해석을 할 경우, 다음과 같은 기본가정을 한다.

- 1) 잔류 응력은 무시한다.
- 2) 뼈대 구조물의 모든 부재들은 평면 내에 있으며 하중은 평면 내에서 작용한다.

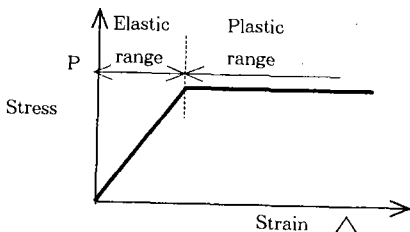


Fig. 1. Elastic-perfectly plastic strain-stress curve

- 3) 붕괴는 소성힌지의 조합에 의해서만 발생하며, 부재의 좌굴은 고려하지 않는다.
- 4) 축응력은 무시할 정도로 작다.
- 5) 마지막 붕괴 전까지의 구조물 처짐은 작고, 구조물의 평형조건에 미치는 영향은 무시한다.
- 6) 부재는 탄성-완전소성체로 한다.

#### 3. 구조시스템의 붕괴 모사

구조물의 붕괴란 작용하중이 증가함에 따라 시스템 내에 소성힌지가 삽입되어 구조물 자체가 불안정한 구조물로 변환됨을 의미한다. 본 모델에서 구조 시스템의 붕괴는 소성힌지 삽입에 의해 수정된 강도행렬의 행렬식이 양의 값을 갖지 않게 될 때로 판단하였다.

강도행렬은 그 속성상 정치정부호행렬(positive definiteness matrix)이므로 안정된 상태의 구조물에서는 행렬식이 양의 값만을 가지게 된다.<sup>10)</sup> 이런 정치정부호행렬의 속성은 강도행렬의 모든 고유치가 양의 수를 가지고 있으며, 구조물이 적절히 구속되어 있고 강체운동 성분이 소거되었을 경우 항상 만족하게 된다. 그러나 하중의 증가로 인해 소성힌지가 삽입되면 더 이상 초과된 하중을 부담할 수 없는 부재가 발생하고, 이때 절점의 모멘트( $M_o$ )가 붕괴모멘트( $M_c$ ) 이상이 되므로 그 절점 모멘트를 붕괴모멘트 값으로 대체하여 다시 해석을 수행한다. 이렇게 단계적으로 반복하면 구조시스템내에서 소성힌지가 여러 곳에 발생하여 더 이상 부과된 하중에 저항할 수 없을 때 붕괴된다.

#### 4. 확률하중 증분

구조물에 대하여 붕괴하중 해석은 하중과 재료 저항에 대해 확정적인 값과 확률적인 값을 적용하여 해석할 수 있다.

확정적인 값을 사용할 경우, 계산이 간단해지며, 해석이 쉽고, 결과가 명확하나 현실적이지 못함이 지적되고 있다. 반면 확률적인 값을 사용할

경우, 계산과정은 복잡하나 실제로 발생하는 현상을 좀 더 정확히 묘사 할 수 있다.

하중과 재료 저항은 구조물의 수명기간동안 확률적으로 변하므로 해석시 그 증분량도 확률적으로 변화된다고 함이 타당하다.

구조물에 작용하는 하중들이  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 이라 하면 확률분포를 가진 각 하중들은 Fig. 2와 같이 각기 다른 하중분산도 특성 가지게 된다. Case 1의 경우 하중분산도가 크므로 큰 폭의 하중변화를 보이며, Case 3의 경우 하중분산도가 작아 하중증가시 하중변화가 작다.

임의의 하중분포함수를 가지고 있는 하중  $P_X$ 에 대하여 하중변동량  $V_X$ 는 표준편차와 중의 비이므로,  $V_X = \frac{\sigma_{P_X}}{P_X}$ 가 되며, 하중증분량은 변동량의 일정한 비율로 정의되므로, 증분하중  $\Delta P_X$ 는  $\alpha V_X = \alpha \frac{\sigma_{P_X}}{P_X}$ 가 된다. 따라서  $i$ 단계에서의 하중  $P_X^i$ 는

$$P_X^i = P_X^{i-1} + \Delta P_X = P_X^0 + \alpha i \frac{\sigma_{P_X}}{P_X} \dots\dots\dots (1)$$

이때 상수  $\alpha$ 는 증분하중 계수로, 각 하중마다 하중분산도가 다르므로 유한요소모델에서 붕괴하중에 적절히 수렴하도록 조절한다.

비례하중 증분법은 주어진 초기작용하중은 그 크기의 일정한 비율로 증가시키며, 구조물이 붕괴될 때까지 하중을 증가시키는 방법이며, 구조시스템에  $i$ 번째 작용하는 하중  $P_X^i$ 는

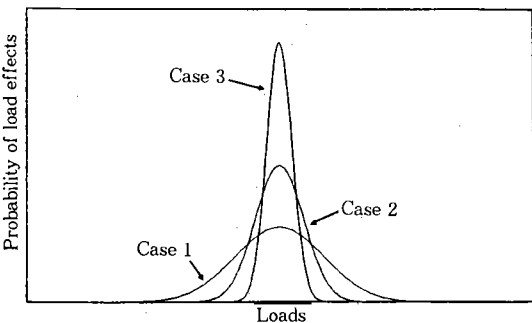


Fig. 2. Probability density functions of loads

$$P_X^i = P_X^{i-1} + \Delta P_X = P_X^0(1 + \alpha i) \dots\dots\dots (2)$$

여기서,  $P_X^0$ : 초기하중  
와 같으며, 이때  $\alpha$ 는 일정한 상수가 된다.  $\alpha$ 의 결정은 구조물의 붕괴를 고려하여 정의한다.

Turkstra's Rule은 구조시스템에 작용하는 하중을 성질별로 분류하여 통계적으로 처리한 방법으로 구조물의 수명기간동안에 걸쳐 발생 가능한 하중의 조합을 정의한 것이다.<sup>13)</sup>

이 하중 증분방법은 하중 조합방법을 결정기 위한 것으로 작용하중을  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 라고 하고, 그 조합하중을  $P$ 라 하면,

$$\max P = \max(\max P_i + \sum_{j=1}^n \overline{P_j}), \quad j \neq i, i = 1, \dots, n \dots\dots\dots (3)$$

로 정의한다. 이것은 구조물에 서로 독립된 여러 하중이 작용할 때, 주하중 한 개의 최대값과 나머지 하중의 평균값을 작용시키는 하중 조합으로 설계 이용하기에 편리하도록 정의되어 있다.

5. 붕괴하중 산정 모델

뼈대 구조물의 붕괴하중을 산정하기 위한 유한요소 해석모델을 개발하였다. 뼈대 구조물은 보와 기둥으로 이루어져 있으므로 hinge-hinge, fixed-hinge, hinge-fixed, fixed-fixed의 4개 요소를 이용하였다. 하중증분방법은 확률하중증분법, 비례증분법, Turkstra's Rule에 의한 하중증분법으로 구성하였다. 유한요소해석을 거치면서 발생한 부재의 모멘트를 재료의 항복 모멘트와 비교해 항복절점을 결정하고, 소성힌지를 삽입하며 강도행렬의 행렬식을 판단하여 구조시스템의 붕괴여부를 결정하도록 하였다. 또한 각 하중증분방법별로 소성힌지가 발생하는 경로를 추적하여 구조시스템의 붕괴경로를 비교 검토할 수 있도록 하였다. 이에 대한 프로그램의 순서도는 Fig. 3와 같다.

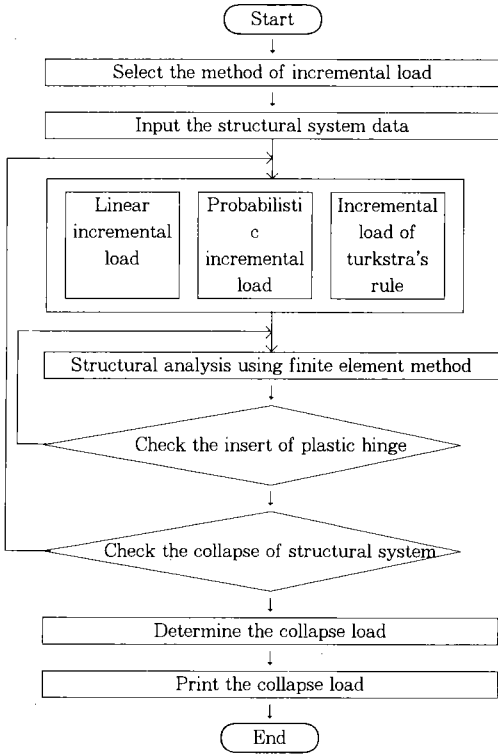
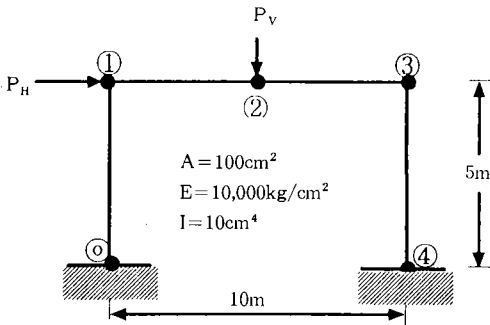


Fig. 3. The flow chart of CEFEA

IV. 모델의 적용 및 고찰

본 연구를 통해 개발된 CEFEA(Collapse Load Estimate Finite Element Analysis)를 평면 por-



- 부재수 : 4
- 극한모멘트 : 10,000kg·cm
- 초기하중
- P<sub>H</sub> : 40kg
- P<sub>V</sub> : 30kg

Fig. 4. Frame example(4 elements)

tal frame에 적용하였으며 부재를 세분화시키면서 각 하중증분 방법에 따른 붕괴하중을 산정하고, 비교 검토하였다.

확률하중증분법에서 하중의 평균은 초기하중을 기준하고, 변동량은 입력자료에서 제시하여 해석하였으며, 모든 하중 독립적으로 발생하며, 정규 분포한다고 가정하였다.

1. 적용예 1

각 하중 증분방법에 따른 붕괴하중 및 붕괴경로는 다음과 같다.

Table 1. Collapse loads & collapse path in Ex. 1

Collapse loads and path		P <sub>H</sub> (kg)	P <sub>V</sub> (kg)	Collapse path	Collapse mechanics
Load increment method					
Linear incremental load		60	45	4-0-1-3	Sway
Turkstra's rule	Primary load : P <sub>H</sub>	64	30	4-0-1-3	Sway
	Primary load : P <sub>V</sub>	40	69	3-0-2-4	Combination
Probabilistic variation incremental ( $\bar{P}, \sigma$ )	①	48.8 (40, 0.5)	57.1 (30, 1.5)	4-0-3-1	Sway
	②	56.5 (40, 1.5)	37.8 (30, 0.5)	4-0-1-3	Sway
	③	42.9 (40, 0.2)	67.2 (30, 3.0)	3-0-2-4	Combination

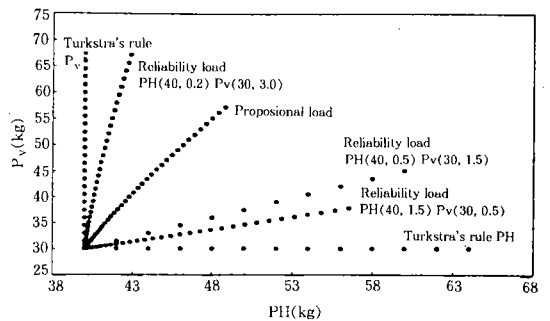


Fig. 5. The load incremental process of each methods in Ex. 1

하중 P<sub>H</sub>, P<sub>V</sub>가 붕괴하중이 될 때까지의 하중 증분 과정은 Fig. 5과 같고 확률하중증분 방법에 의한 해석시 절점3의 응력 변형률 거동은 Fig. 6

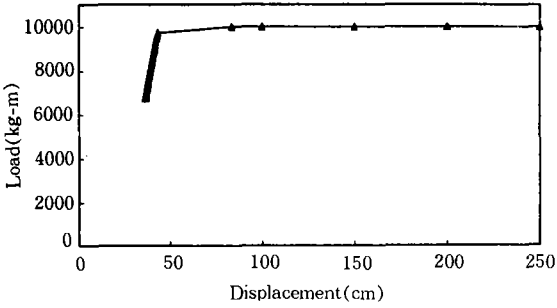


Fig. 6. Stress-strain curve in node 3

과 같이 탄성-완전소성 거동을 하였다.

$P(\bar{P}, \sigma^2)$ 가  $P_H(40, 0.5)$ ,  $P_V(30, 1.5)$ 일 경우의 붕괴하중은 57.12kg 이었으며,  $P_H(40, 0.2)$ ,  $P_V(30, 3.0)$ 일 경우 붕괴하중은 67.20kg 이었다.

### 2. 적용예 2

적용예 1의 부재를 더 세분화하여 문제를 해석하였다.

각 하중 증분방법에 따른 붕괴하중 및 붕괴경로는 다음과 같다.

하중  $P_H$ ,  $P_V$ 가 붕괴하중이 될 때까지의 하중 증분 양상은 Fig. 9와 같다.

확률하중 증분법의 각 분산도별 붕괴하중 및 하중분산도는 구한 값은  $P(\bar{P}, \sigma^2)$ 가  $P_H(40, 0.5)$ ,  $P_V(30, 1.5)$ 일 경우의 붕괴하중은 58.20kg 이었으며,  $P_H(40, 1.5)$ ,  $P_V(30, 0.5)$ 일 경우 붕괴

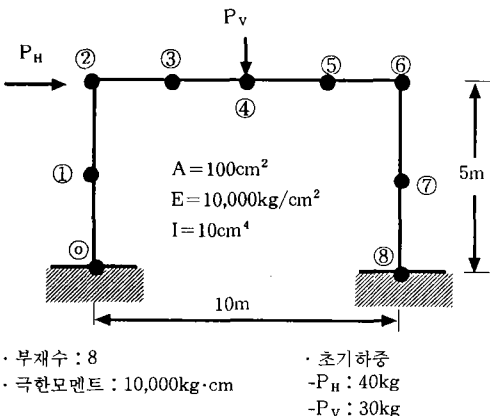


Fig. 7. Frame example(8 elements)

Table 2. Collapse loads & collapse path in Ex. 2

Collapse loads and path		$P_H$ (kg)	$P_V$ (kg)	Collapse path	Collapse mechanics
Load increment method					
Linear incremental load		60	45	8-0-2-5	Sway
Turkstra's rule	Primary load : $P_H$	64	30	8-0-2-5	Sway
	Primary load : $P_V$	40	69	6-0-4-1	Combination
Probabilistic variation incremental ( $\bar{P}, \sigma$ )	①	49.2 (40, 0.5)	58.2 (30, 1.5)	8-0-6-1-4	Sway
	②	56.5 (40, 1.5)	37.8 (30, 0.5)	8-0-2-5	Sway
	③	42.9 (40, 0.2)	67.2 (30, 3.0)	6-0-4-1	Combination

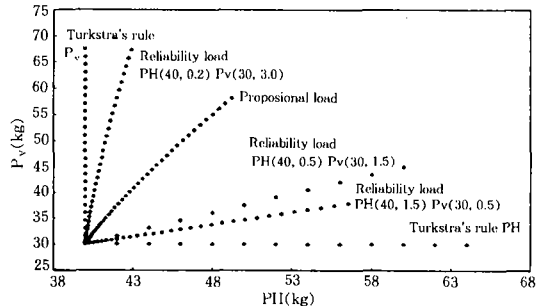


Fig. 8. The load incremental process of each methods in Ex. 2

하중은 56.50kg 이었고, 또한  $P_H(40, 0.2)$ ,  $P_V(30, 3.0)$ 일 경우 붕괴하중은 67.21kg 이었다.

### 3. 결과 고찰

적용예 1에서 붕괴하중은 Table 1과 같이 각 하중증분 방법에 따라 비례증분법을 기준으로 최고 15% 차이가 나며, Turkstra's Rule에 의한 하중증분 방법은 다소 큰 붕괴하중을 나타냈다. 확률하중증분법에 의한 붕괴하중은  $P_H$ ,  $P_V$  두 하중의 확률변동량 차이가 작을 경우 비례증분법에 의한 붕괴특성을 나타내고, 확률변동량 차이가 클 경우, Turkstra's Rule에 의한 붕괴특성을 나타냈다.

붕괴에 직접적 영향을 미치는 주 하중은 비례

중분법에서는 초기하중이 큰 것, Turkstra's Rule에서는 주하중으로 선정된 하중이나, 확률하중증분법에서는 하중의 확률변동량에 따라 주하중이  $P_H$ ,  $P_V$ 로 혼재되어 있다.

비례증분법, Turkstra's Rule에 의해 나타난 붕괴기구는 Sway 붕괴기구, Combination 붕괴기구이며 확률하중증분법에서는 하중의 확률변동량이 변함에 따라 Sway 붕괴기구, Combination 붕괴기구가 나타났다.

설계에 있어서 대상구조물의 붕괴 확률을 기준으로 설계한다면, 이와 같은 방법을 통해 구조시스템의 붕괴하중을 구하여 파괴확률을 계산할 수 있다. 따라서 목표한 수준에 도달하지 못했거나 최적화가 필요하다면 정의된 구조물의 재료적 성질이나 재료형을 변경함으로써 설계에 이용될 수 있다.

적용예 2에서 붕괴하중은 부재의 요소수가 증가함에 따라 적용예 1과 비교해 약간씩 증가하였으며, 붕괴기구 및 주하중인자는 적용예 1과 같은 특성을 나타냈다.

## V. 결 론

실세계에서 각기 독립적으로 작용하는 하중은 일반적으로 정규분포의 확률적 특징을 가지고 있다. 따라서 구조물의 붕괴하중을 산정할 때 증분되는 하중도 확률에 따른 변수로 가정하였다. 하중의 증분 방법은 구조물의 붕괴에 작용하는 하중을 일정한 비율에 따라 증분하는 비례증분법과 주하중만 증가시키는 Turkstra's rule에 따라 하중을 조합하는 방법이 있다. 본 연구에서는 뼈대 구조물에 대하여 붕괴하중을 구성하는 하중의 조합을 개개 하중의 확률적인 특성에 따라 하중 증분량을 결정할 수 있도록 모델(CEFEA)을 개발하여 붕괴하중을 결정하고, 그 붕괴경로를 소성힌지 삽입을 통해 결정하였다.

CEFEA를 문형구조물에 적용해본 결과 구조물의 붕괴하중은 하중의 증분방법에 따라 달라지

며, 비례하중에 의한 하중증분은 작용하중들 중 최대값이 가장 작았고, Turkstra's rule에 의한 붕괴하중의 산정은 그 값이 가장 크므로 상대적으로 과소 평가되고 있어 타 방법에 비해 안전하지 못함을 알게 되었다.

앞으로 확률을 고려한 붕괴하중을 설계 등에서 적극적으로 이용할 수 있기 위해선 작용하중의 변동량 특성에 대한 심화 연구가 필요하며, 다양한 부재 형태에 대하여 유연성 있게 적용할 수 있는 붕괴하중모델의 연구도 필요하다.

## 참 고 문 헌

1. 김지호, 1991, 확률유한요소법에 의한 구조 신뢰성 해석, 서울대학교 박사학위논문.
2. 이정재, 1991, 단계별 소성해석 기법을 이용한 뼈대구조의 신뢰성 해석 모델의 개발, 서울대학교 박사학위논문.
3. 임상진, 광병만, 이주성, 1990, 유한요소법입문, 동명사.
4. Cohn, M. Z., Ghosh, S. K., Parimi, S. R., Unified Approach to theory of plastic Structures, EM, Vol 98, No.EM5, ASCE, Proc, Paper p.246.
5. Der Kiureghian, A and Taylor, R. L., Numerical methods in Structural Reliability, proceedings, 1983, 4th International Conference on Application of Statistics and Probability in soil and Structural Engineering, Florence, Italy, pp.769-784.
6. Ditlevsen, O., 1988, Probabilistic Statistics of Discretized Ideal Plastic Frames, EM, Vol 114 No 12, pp.2093-2114.
7. Grierson, D. E., and Gladwell, G. M. L., Collapse Load Analysis Using Linear Programming, SD Vol.97, No.ST5, ASCE, pp.1561-1573.
8. Handa, K. and Karrholm, G., Application of

- Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures., Chalmers University of Technology.
9. Hisada, T. & S. Nakagiri, Stochastic Finite Element Method developed for Structural Safety and Reliability. pp.395-407.
  10. Klaus-Juren Bathe, 1996, Finite Element Procedures, Prentice Hall.
  11. Liu, W. K & G. H Bestesfield & T. Belytschko, 1988, Variational Approach to Probabilistic Finite Elements, EM, Vol.114, No.12. pp.2115-2133.
  12. McCormac. J. C, Strucural Steel Design, Haper and Row Publisher, New York, 1981, pp.591-644.
  13. Melchers, R. E., 1987, Structural Reliability Analysis and Prediction, Ellis Horwood sLimited.
  14. Owen, D. R. J. E., Hinton, 1980, Finite Element Programming, Pineridge Press Limited.
  15. Owen, D. R. J. E., Hinton 1980, Finite Element in Plasticity-theory and practice, Redwood Burn Limited, pp.121-143.