

2단계 분배체계를 위한 확률적(Q,r)재고모형*

심재홍** · 최규탁*** · 김정자****

Stochastic (Q,r) Inventory Model for Two-echelon Distribution System*

J.H. Sim** · G.T. Choi*** · J.J. Kim****

Abstract

This paper develops a two-echelon inventory model with time-weighted partial backorders. The presented model assumed to follow continuous review (Q,r) policy for both the retailers and the central warehouse under stochastic demand.

A heuristic method to find an optimum-tending solution for total variable system cost per year incurred at the central warehouse and retailers in a system is suggested.

To show the usefulness of the above model, numerical examples are illustrated for verification and validation purpose.

1. 서 론

일반적으로 다단계 재고시스템(multiechelon inventory system)은 둘 또는 그 이상의 서로 밀접한 관계가 있는 공급 또는 생산시설을 포함

하는 여러 형태의 재고문제에 관계가 있다. 대부분의 실질적 재고문제들은 다단계적인 형태를 가지게 되므로, 단일설비(single-facility)문제를 공급과 수요관계(supply-demand relationship)의 계층적 구조(hierarchical dimension)로 확장하여 연구되고 있다[3,5,26,27]. 다단계 분배시스템의

* 이 논문은 1996년도 동아대학교 교비지원 연구기초자료비에 의해 연구된 논문임.

** 창원전문대학교 산업공학과

*** 경남전문대학교 공업경영과

**** 동아대학교 공과대학 산업공학과

문헌들에서의 대부분의 확률적재고 모형 (stochastic inventory models)들에서는 거의 (1) (S-1, S)정책을 사용한 낮은 수요품목을 위한 모형[21,31] (2) 독립적인 소매분배시스템을 위한 고객서비스 수준의 분석을 위한 모형 [10,30] (3) 총시스템비용을 보다 최소화하는 시스템모수의 함수로서 기대 서비스수준의 추정 을 위한 모형[27]들로 제한되어 있다.

다단계 재고시스템의 초기의 많은 연구들은 군에서 발생한 로지스틱스(logistics) 문제가 동기가 되었다[6]. Allen[2]은 본 연구에서 고려한 2단계 중앙창고/소매점 시스템을 처음으로 분석하였고, K개 위치에서의 재고의 최적재분배를 결정하는 문제를 고려하였다. Allen의 단기간(one period) 모형의 확장이 Simpson[29], Gross[12], Krishnan and Rao[16], Das[9], Hoadley and Heyman[14]에 의해 고려되었다.

전통적인(Q,r) 또는 로트사이즈 재주문점 모형은 Deurmeyer and Schwarz[10]에 의해 개발되었다. 그들은 각 소매점이 독립적인 (Q,r) 정책을 따르고 중앙창고 또한 공급자로부터 주문에서 (Q,r)정책을 따르도록 가정되었다. 이러한 (Q,r) 정책들은 불확실한 수요와 조달기간을 가진 재고시스템에서 널리 사용된다. (Q,r)정책의 사용은 30년전 Galliher, Murse and Simmond[11]의 세미나 논문과 Hardley and Within[13]의 고전적인 저서이래로 널리 보급되었다. 그럼에도 불구하고, Browne and Zipkin[4]이 언급한 것처럼 최근까지 포아송수요과정과 같이 비록 간단한 경우에서도 최적 (Q,r)정책을 계산하는 신뢰할 수 있고, 올바른 방법은 없었다. 대신 많은 탐색절차들이 제안되었다[19]. 본연구에서도 소매점과 중앙창고가 각각 독립적인 (Q,r)정책을 사용한다.

또한 품질기간동안의 수요에대한 문제는 최적재고정책을 결정함에있어 대부분 크게 두가지 형태로 연구되어져왔다. 하나는 품질이 발생했을 때 유실판매(lost sale)로 처리하는 경우[7,18]이고 다른 하나는 부재고(backorder)되는 경우이다[8,12].

그러나 현실세계에서 수요가 포획성(captive)일 경우가 많으므로 품질기간중 수요의 일부만 부재고되고 나머지 미충족수요는 유실판매되는 경우가 발생할 수 있으며 이런모형을 부분 부재고모형이라한다[20,24,28]. 나아가서 부분 부재고모형에 관련된 비용중 부재고비용의 형태가 품질기간에 비례하여 발생하는 것은 일반적이다 [1,17,23,25].

본 논문은 확률적인 수요하에서 시간에 비례하는 부분 부재고비용을 고려한 2단계 재고시스템모형을 구하고, 이모형의 연간총변동비용을 정식화하여 이를 최소화하는 (Q,r)재고시스템모형을 각각 구축하고 이의 반복적 해법절차를 제시하고, 부재고 비율 β 에 따른 민감도 분석과 많은 수치실험을 통하여 연속조사정책 (Q,R)모형의 유용성을 나타내고자 한다.

2. 모형

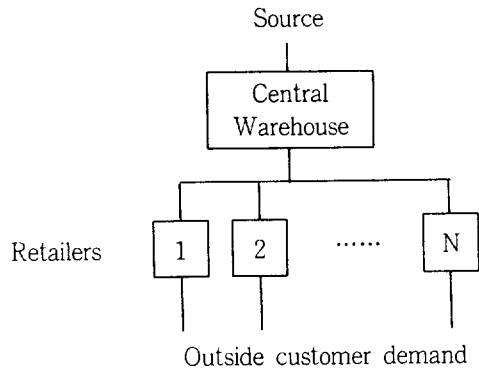
제안된 모형은 하나의 중앙창고(CW, central warehouse)에서 여러개의 소매점(retailer)으로 단일품목(single item)을 공급하는 2단계 재고시스템이다 (Fig.1 참조).

비록 중앙창고와 각소매점의 재고를 연속적으로 조사하는 것은 많은 비용이 요구되지만 다음의 상황들 때문에 타당하다. (1) 재고수준

을 연속적으로 조사 또는 거의 연속적으로 조사할 수 있게 하는 컴퓨터시스템이 이미 존재하고 (2)수량할인(quantity discounts), 포장단위(package size), 최소주문량(minimum order quantities) 또는 관리상의 문제 등으로 인한 주문량 자체가 중요하고 (3) 정기조사정책(periodic review policies)을 위한 근사하는 동적 프로그래밍 기법을 사용하여 계산하기 어려울 정도로 선행기간(lead times)이 길거나 매우 불확실하다. 또한 연속조사정책은 조달기간과 조사비용의 추정에 따른 오차에 민감하지않고, 매개 변수들의 계산이 정기조사정책에 비해서 보다 쉽게 계산될 수 있는 장점을 가진다[13]. 그리고 비용면에서 진보된 기술로 조사비용이 적어질수록, 중앙창고에서 예상되는 피상수요(lumpy demand)가 발생할 때에도 소매점의 수가 많거나 발주비용이 적어서 소매점의 발주회수가 많으면 연속조사정책이 타당한 것으로 생각된다.

따라서 본 연구에서는 중앙창고와 각 소매점의 재고정책은 연속조사정책(continuous review policy) (Q,r)를 따른다.

제시된 모델은 두개의 부분모델(submodel)로 구분되어있다. 중앙창고 부분모델과 소매점부분 모델을 하나의 시스템으로 연결시키는 변수는 중앙창고로터 주문이 도착할때까지의 지연시간 $d(Q_0, r_0)$ 로서 둔다. 소매점들의 최적정책변수 Q_i 와 r_i 를 결정하는 반복적 알고리즘은 이 $d(Q_0, r_0)$ 의 수치를 변화시켜 실행된다.



[Fig. 1] Two-echelon inventory system.

1) 가정

- ① 소매점 i 의 수요는 정규분포를 하고 모든 다른 소매점에서 발생하는 수요는 독립이다.
- ② 중앙창고의 선행기간과 각 소매점의 정규선행기간은 일정하지만 반드시 같지는 않다.
- ③ 중앙창고의 선행기간 동안의 수요는 정규분포를 한다.
- ④ 중앙창고의 부재고는 현 보유재고(on hand inventory)에 비해 비교적 적다.
- ⑤ 중앙창고에서 어떤 소매점의 주문을 완전히 충족시킬수 없다면 소매점 주문의 부분 선적도 허용한다.
- ⑥ 각 소매점에서 하나이상의 주문잔고(미결주문)는 없다.
- ⑦ 정미재고(net inventory)를 근거로한 각 소매점의 재주문점은 양수이다.
- ⑧ 각 소매점의 부재고 비용은 부재고의 시간에 비례한다.
- ⑨ 중앙창고와 소매점이 하나의 시스템을 구성하고 있으므로 중앙창고의 부재고

에 대한 별과비용은 직접적으로 부과되지 않는다.

- ⑩ 각 소매점들은 오직 중앙창고로부터 제품을 공급받는다.

2) 기호 (Notation)

N : 소매점수

D_i, S_i : 소매점 i 의 연간 수요의 평균과 표준편차

D_0 : 중앙창고의 연간 기대 수요

$$(D_0 = \sum_{i=1}^N D_i)$$

Q_0, r_0 : 중앙창고의 주문량과 재주문점

Q_i, r_i : 소매점 i 의 주문량과 재주문점

l_0, l_i : 중앙창고의 고정된 선행 기간과 소매점 i 의 정규선행 기간

$d(Q_0, r_0)$: 중앙창고의 품질로 인한 각 소매점의 주문 주기당 기대 지연시간

L_i : 소매점 i 의 기대실질선행기간 (expected effective lead time)

$$(L_i = l_i + d(Q_0, r_0))$$

μ_0, r_0 : 중앙창고의 선행기간 동안의 수요의 평균과 표준편차

μ_i, σ_i : 소매점의 실질선행기간 수요의 평균과 표준편차

A_0, A_i : 중앙창고와 소매점 i 의 주문 비용

h_0, h_i : 중앙창고와 소매점 i 의 단위당 연간 재고 유지비

π_i : 소매점 i 의 단위당 연간 부재

고 비용

P_i : 소매점 i 의 유실이익을 포함한 유실 판매 별과비용

β_i : 소매점 i 의 부재고비용

$$(0 \leq \beta_i \leq 1)$$

\bar{z}_i : 소매점 i 의 제품 도착직전의 기대정미재고

\bar{Z}_i : 소매점 i 의 제품 도착직후의 기대정미재고

\bar{z}_0 : 중앙창고의 제품 도착직전의 기대정미재고

\bar{Z}_0 : 중앙창고의 제품 도착직후의 기대정미재고

* : 최적을 나타내는 첨자

3. 소매점 모형에 대한 분석 (Retailer Analysis)

각 소매점 i 에서 발생하는 연간 평균변동비용을 구하고 최적정책변수 Q_i, r_i 를 결정한다.

[Fig.2]는 연속재고조사정책을 따르는 소매점 i 의 재고수준 변동을 표시하고 있다.

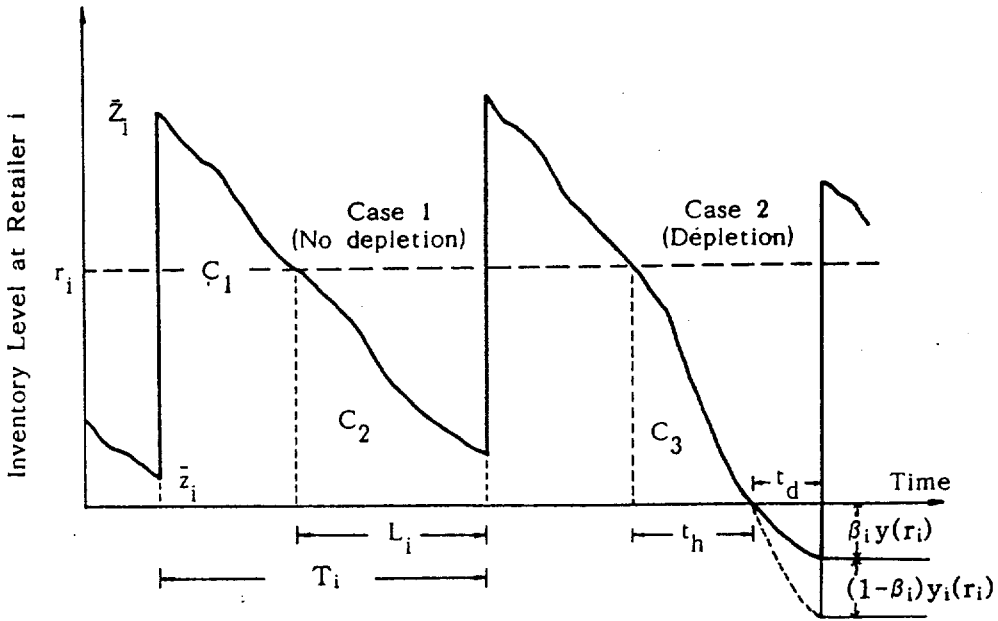
각 소매점 i 의 실질선행기간은 다음과 같다.

$$L_i = l_i + d(Q_0, r_0) \quad (1)$$

소매점 i 의 실질선행기간 동안의 수요의 확률밀도함수가 $f_i(x_i)$ 인 정규 분포를 따른다고 가정하면 소매점 i 의 실질선행기간중의 수요의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

$$\mu_i = L_i D_i \quad (2)$$

$$\sigma_i = \sqrt{(L_i) S_i} \quad (3)$$



[Fig. 2] Inventory level variation at retailer i (see [25])

x_i 를 소매점 i에서의 실질선행기간 동안의 수요라고 하고 주기말(end of cycle)의 기대 부족수요(expected demand short)를 $y_i(r_i)$ 라고 두면 다음과 같다.

$$\int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i) f_i(x_i) dx_i = y_i(r_i) \quad (4)$$

따라서 소매점 i의 주기당 기대 부재고량은 $\beta_i y_i(r_i)$ 이 되고 주기당 기대 유실판매량은 $(1-\beta_i)y_i(r_i)$ 가 된다. 또한 소매점 i에서의 주기당 기대 총수요(expected total demand)는 $Q_i + (1-\beta_i)y_i(r_i)$ 이므로 기대주기길이(expected cycle length)는 다음과 같다.

$$T_i = \frac{Q_i + (1-\beta_i)y_i(r_i)}{D_i} \quad (5)$$

그러므로, 소매점 i의 연간평균주문비(average annual ordering cost)는 다음과 같다.

ge annual ordering cost)는 다음과 같다.

$$\frac{A_i}{T_i} = \frac{A_i D_i}{Q_i + (1-\beta_i)y_i(r_i)} \quad (6)$$

소매점 i의 현 보유기대재고(expected on-hand inventory)는 재발주점에 도달하는 시간에 이르는 기간(period)과 실질선행기간 $L_i = l_i + d(Q_0, r_0)$ 에 대해서 계산된다. \bar{z}_i 를 소매점 i의 제품이 도착한 시점의 기대 정미재고(expected net inventory)라고 하면, 실질선행기간 동안의 기대수요가 μ_i 이고, 실질선행기간 동안의 기대포획수요(expected net inventory)는 $\mu_i - (1-\beta_i)y_i(r_i)$ 이므로 \bar{z}_i 는 $r_i - [\mu_i - (1-\beta_i)y_i(r_i)]$ 이고 제품도착직후의 기대 정미재고 \bar{Z}_i 는 $\bar{z}_i + Q_i$ 이므로 $Q_i + r_i - [\mu_i - (1-\beta_i)y_i(r_i)]$ 이다.

그러므로 제품도착직후 즉 \bar{Z}_i 에서, 재발주점 r_i 에 이르는 재고 수준에 의한 기대시간은 $[Q_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i)] / (D_i - L_i)$ 이므로 [Fig.2]의 면적 C1의 기대값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left([Q_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i)] / (D_i - L_i) \right) (\bar{Z}_i + r_i) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{[Q_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i)]}{D_i} - \frac{\mu_i}{D_i} \right\} \{ Q_i + r_i - [\mu_i - (1 - \beta_i)y_i(r_i)] + r_i \} \\ &= [Q_i - \mu_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i)][Q_i + 2r_i - \mu_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i)] / 2D_i \end{aligned} \quad (7)$$

나머지 부분에 대해서는 실질선행기간 동안에 품질이 발생하지 않는 경우 ($x_i \leq r_i$)와 품질이 발생하는 경우 ($x_i > r_i$)로 구분된다. 즉, 품질이 발생되지 않는다면 [Fig.2]의 면적 C2의 기대값은 다음과 같다.

$$\frac{L_i}{2} E[r_i + (r_i - x_i)] = \frac{L_i}{2} \int_0^{r_i} (2r_i - x_i) f(x_i) dx_i \quad (8)$$

품질이 발생된다면 [Fig.2]의 영역 C3에 관계가 있다. 양의 현보유재고를 가지는 선행 기간 동안의 시간 t_h 는 $r_i L_i / x_i$ 이므로 면적 C3의 기대값은 다음과 같다.

$$\frac{L_i}{2} E[t_h] = r_i^2 \cdot \frac{L_i}{2} \int_{r_i}^{\infty} \left(\frac{1}{x_i} \right) f(x_i) dx_i \quad (9)$$

그러므로 주기당 기대보유재고는 식 (7), (8), (9)을 합함으로써 구해진다. 따라서 소매점 i 에서 발생된 연간 평균재고유지비는 다음과 같다.

$$h_i \left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2} (1 - \beta_i) y_i(r_i) r_i - \mu_i \right] + \frac{h_i \mu_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f(x_i) dx_i \quad (10)$$

주기당 기대부족수요는 $(1 - \beta_i) y_i(r_i)$ 이므로 연간평균 유실판매비용은 다음과 같다.

$$\frac{(1 - \beta_i) y_i(r_i) P_i}{T_i} = \frac{D_i (1 - \beta_i) y_i(r_i) P_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)} \quad (11)$$

또한 주기당 발생하는 품질시간 t_a 는 $L_i - t_h$ ($t_h = r_i L_i / x_i$)이고 부재고 되는 수요는 $\beta_i (x_i - r_i)$ 이므로 소매점 i 에서 발생하는 시간 가중치가 주어진 연간 평균 부재고 비용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_i \pi_i D_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i) \left(L_i - \frac{r_i L_i}{x_i} \right) f_i(x_i) dx_i \\ &= \frac{\beta_i \pi_i \mu_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \end{aligned} \quad (12)$$

그러므로 소매점 i 에서 발생하는 연간 평균변동비용은 식(6), (10), (11), (12)의 합이다.

즉,

$$\begin{aligned}
 K_i(Q_i, r_i) &= \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)} + h_i \left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2} (1 - \beta_i) y_i(r_i) + r_i - \mu_i \right] \\
 &+ \frac{h_i \mu_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i + \frac{D_i (1 - \beta_i) y_i(r_i) P_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)} \\
 &+ \frac{\beta_i \pi_i \mu_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
 &= \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)} + h_i \left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2} (1 - \beta_i) y_i(r_i) + r_i - \mu_i \right] \\
 &+ \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i)}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)} + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i
 \end{aligned} \tag{13}$$

확정적인 경우에 대한 연간 평균변동비(average annual variable cost)는 확률변수인 실질선행기간수 x_i 를 확정적인 값 $r_i + S_i$ 로 가정함으로써 구할 수 있다. 그러면 식 (13)에서 $y_i(r_i) = S_i$ 이고 x_i 를 $r_i + S_i$ 로 가정하면 식 (13)로 부터

$$\begin{aligned}
 K_d(Q_i, r_i) &= \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i) S_i} + \frac{h_i (Q_i - \beta_i S_i)^2}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) S_i]} + \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) S_i}{Q_i + (1 - \beta_i) S_i} \\
 &+ \frac{\pi_i \beta_i S_i^2}{2 [Q_i + (1 - \beta_i) S_i]}
 \end{aligned}$$

$K_i(Q_i, r_i)$ 에서 $Q_i + (1 - \beta_i) S_i$ 를 R_i 로 두면 Park[24]의 확정적 모델과 일치하고 $\beta_i = 1$ 에서는 Hold et. al.[15]의 통상적인 부재고 모델로 환원된다. $K_i(Q_i, r_i)$ 는 볼록함수가 아니다. 그러나, 다음의 1대 1 변환을 통하여 새로운 재고 의사결정변수(new inventory decision variables) R_i 을 도입하여 볼록함수(convex function)임을 증명한다.

$$\begin{bmatrix} R_i \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i) \\ r_i \end{bmatrix} \quad \text{그리고} \quad \begin{bmatrix} R_i^* \\ r_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i^* + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) \\ r_i^* \end{bmatrix} \tag{14}$$

위의 변환에 대한 최적해의 유일성에 관한 증명은 Kim 과 Park[17]에 의해 수행 되었다.

주어진 $d(Q_0, r_0)$ 값에 대해서, 각 소매점 i 의 실질선행기간 동안의 수요의 평균과 표준편차는 식 (1), (2), (3)으로부터 구할 수 있기 때문에 N 개의 독립 부분문제(subproblem)를 풀 수 있다. 소매점 i 에 대한 부분문제(subproblem)는 소매점 i 에서 발생하는 연간 평균 변동비 $\hat{K}_i(R_i, r_i)$ 를 최소화 한다. 따라서, i 번째 부분문제에 대해서 식(15)를 최소로 하는 (R_i^*, r_i^*) 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \hat{K}_i(R_i, r_i) = & \frac{A_i D_i}{R_i} + h_i \left(\frac{R_i}{2} + r_i - \mu_i \right) + \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i)}{R_i} \\ & + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2} R_i \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}_i}{\partial R_i} = & -\frac{A_i D_i}{R_i^2} + \frac{h_i}{2} - \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i)}{R_i^2} \\ & - \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2 R_i^2} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}_i}{\partial r_i} = & h_i - \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) H_i(r_i)}{R_i} - \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{R_i} \int_{r_i}^{\infty} \left(1 - \frac{r_i}{x_i} \right) f_i(x_i) dx_i \\ = & 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $H_i(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} f_i(x_i) dx_i$ 는 $f_i(x_i)$ 의 여누적함수(complementary cumulative)이고, 식(16)과 식(17)을 정리하면 각각 식(18)과 식(19)와 같다.

$$R_i = \sqrt{\frac{2A_i D_i + 2D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i) + (h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i}{h_i}} \quad (18)$$

$$h_i R_i = [D_i P_i (1 - \beta_i) + (h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i] H_i(r_i) - (h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i r_i \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{x_i} f_i(x_i) dx_i \quad (19)$$

식(18), (19)으로부터 구해진 i 번째 부분문제(subproblem)의 해 (R_i^*, r_i^*) 는 유일한 최소치이고, Q_i^* 는 식(14)으로 부터 구해진다.

$\hat{K}_i(R_i, r_i)$ 을 최소화시키는 (R_i^*, r_i^*) 를 구하기 위해서 Hadley와 Whitin[13]의 부분복절차(subprocedure)를 사용한다.

Step 1. R_i 에 대한 초기추정치를 $\sqrt{2A_i D_i / h_i}$ 로 두고 이것을 $R_i^{(1)}$ 이라 한다.

Step 2. r_i 를 구하기 위해서 $R_i = R_i^{(1)}$ 을 식(19)에 대입한다.

이 값을 $r_i^{(1)}$ 이라 한다.

Step 3. $R_i^{(2)}$ 를 구하기 위해서 $r_i = r_i^{(1)}$ 을 식(18)에 대입한다.

Step 4. 만일 반복과정 i 번째에서 수렴이 발생하면 즉, $|R_i^{(j)} - R_i^{(j-1)}| < \varepsilon$ 혹은

$|r_i^{(j)} - r_i^{(j-1)}| < \varepsilon$ (ε : 작은상수)이면 종료하고 그렇지 않으면 Step 2로 간다.

$\beta_i = 1$ 일때의 반복기법의 수렴에 대한 증명은 Park과 Kim[17]에 나와 있다. 마지막으로 모든 소매점 i 에서 발생하는 연간 최소평균변동비는 $d(Q_0, r_0)$ 의 함수로서 둔다.

$$K^*[d(Q_0, r_0)] = \sum_{i=1}^N \hat{K}_i(R_i^*, r_i^*) \tag{20}$$

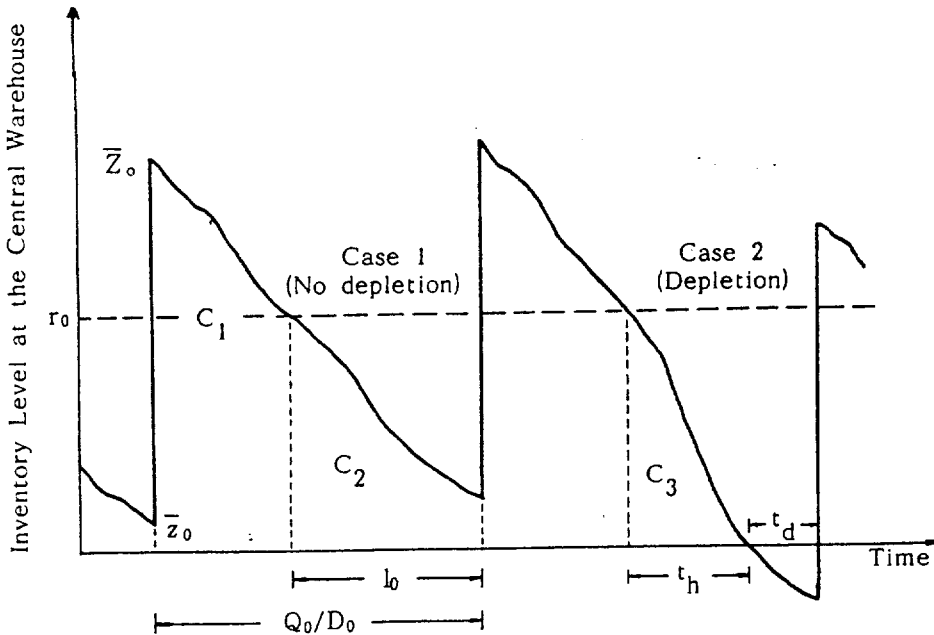
4. 중앙창고 모형에 대한 분석(Central warehouse analysis)

이 절에서는 중앙창고에서 발생하는 연간평균변동비를 구하고 최적정책변수 (Q_0, r_0) 를 결정한다.

[Fig. 3]은 중앙창고에서 품절이 발생하였을때 완전 부재고모형을 하는 연속조사정책 (Q_0, r_0) 을 따르는 중앙창고에서의 재고수준변동을 나타내고 있다.

중앙창고의 선행기간 l_0 동안의 수요 x_0 는 평균과 표준편차를 각각 다음과 같이 가지는 정규분포 $f_0(x_0)$ 를 따른다고 가정한다[25].

$$\mu_0 = l_0 \sum_{i=1}^N D_i \tag{21}$$



[Fig. 3] Inventory level variation at the central warehouse (see [25])

$$\sigma_0 = \sqrt{l_0 \sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (22)$$

그리고 중앙창고에서 발생하는 연간평균변동비들(주문비용, 재고유지비용)은 앞절에서의 $\beta_i = 1$ 즉, 완전부재고 모형일때의 비용들과 동일하다. 그러므로 중앙창고에서 발생하는 연간평균주문비와 연간평균재고유지비는 각각 식(23), 식(24)와 같다.

$$\frac{A_0 D_0}{Q_0} \quad (23)$$

$$h_0 \left(\frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu_0 \right) + \frac{h_0 \mu_0}{2Q_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0 \quad (24)$$

그러면, 중앙창고에서 발생하는 연간평균변동비 $K_0(Q_0, r_0)$ 는 식(25)와 같이된다.

$$K_0(Q_0, r_0) = \frac{A_0 D_0}{Q_0} + h_0 \left(\frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu_0 \right) + \frac{h_0 \mu_0}{2Q_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0 \quad (25)$$

가정 9)로 부터 중앙창고에서의 부재고 비용은 식(25)에 나타나지 않지만 중앙창고의 부재고는 소매점들의 실질선행기간을 증가시킨다. 중앙창고와 소매점에서 발생하는 총변동비용(total variable cost)은 식(20)과 (25)로 부터 다음과 같이 구해진다.

$$TVC(Q_0, r_0, R_i, r_i) = \sum_{i=1}^N \hat{K}_i(R_i, r_i) + K_0(Q_0, r_0) \quad (26)$$

식(26)의 시스템의 총비용 모델에서 소매점의 문제를 분리하기 위해서 소매점의 부분모델(submodel)에서는 중앙창고의 부재고 수준변동의 영향은 고려되지 않는다. 그래서, 모든 소매점에서 발생하는 연간평균변동비용에 대한 부재고의 영향은 중앙창고의 부분모델(submodel)에 반영되어야 한다. 이것은 어떤 임의의 시점에서 중앙창고의 부재고 수준이 한 단위 증가할때 모든 소매점에서 발생하는 연간평균변동비용의 효과를 측정하는 歸屬(imputed)부재고 비용의 개념을 도입함으로써 해결된다[22].

$\hat{\pi}_0$ 를 품질기간당 歸屬 부재고 비용이라고 두고 $B(Q_0, r_0)$ 을 중앙창고에서 한 주기 동안 부재고 되는 기대단위수라고 하면 $dK^*[d(Q_0, r_0)]/dB(Q_0, r_0)$ 는 모든 소매점에서 발생하는 연간 평균변동비에 대해서 중앙창고의 부재고의 한계효과(marginal effect)를 측정하므로 $\hat{\pi}_0$ 의 추정치가 된다. 여기서, l_0 동안의 수요량 x_0 가 r_0 를 초과하면 부재고가 발생하므로, 중앙창고에서 한 주기당의 품질발생 시간 t_a 는 $l_0 - t_h$ 이고 부재고되는 수요는 $(x_0 - r_0)$ 이므로 중앙창고에서 발생하는 연간기대부재고량 $B(Q_0, r_0)$ 은 식(27)과 같다.

$$B(Q_0, r_0) = \frac{\mu_0}{2Q_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0 \quad (27)$$

그리고, 한주기에서 지연없이 충족되는 기대단위수는 $D_0T - B(Q_0, r_0)$ 이며, 한단위 수요가 지연되는 가중수요 평균시간(demand-weighted averag time) $d(Q_0, r_0)$ 는 식(28)과 같다.

$$d(Q_0, r_0) = \{T \cdot B(Q_0, r_0) + 0 \cdot [D_0 - B(Q_0, r_0)]\} / D_0T = B(Q_0, r_0) / D_0 \quad (28)$$

이것은 과상(lumpy) 수요형태에 대해서도 성립한다. 단위당 평균지연시간은 중앙참고로부터 어떤 시점에서 소매점의 주문이 충족될때까지 기다려야하는 기대시간이다. 그래서 소매점의 주문주기당 기대시간은 식(28)로부터 주어진다. 그러면, 식(15), (20)으로부터

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_0 &= \frac{dK^*[d(Q_0, r_0)]}{dB(Q_0, r_0)} = \frac{dK^*[d(Q_0, r_0)]}{dd(Q_0, r_0)} \cdot \frac{dd(Q_0, r_0)}{dB(Q_0, r_0)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ - \frac{(A_i D_i)^2 (1 - \beta_i)}{2D_0 \sigma_i^2 \mu_i [Q_i + (1 - \beta_i)K_1]^2} [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2)K_1] \right. \\ &\quad + \frac{h_i D_i (1 - \beta_i) [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2)K_1]}{4D_0 \sigma_i^2 \mu_i} - \frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{Q_i D_i^2 P_i (1 - \beta_i) [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2)K_1]}{2D_0 \sigma_i^2 \mu_i [Q_i + (1 - \beta_i)K_1]^2} \\ &\quad + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2D_0 [Q_i + (1 - \beta_i)K_1]^2} \left\{ Q_i + (1 - \beta_i)K_1 - \frac{(1 - \beta_i)}{2} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} K_2 - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) K_1 \right] \right\} K_3 \\ &\quad \left. + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4D_0 [Q_i + (1 - \beta_i)K_1]} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} K_4 - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) K_3 \right] \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

여기서, $K_1 = y_i(r_i^*) = \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i,$

$$K_2 = \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2 (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i$$

$$K_3 = \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i$$

$$K_4 = \int_{r_i^*}^{\infty} x_i (x_i - r_i^*)^2 f_i(x_i) dx_i$$

여기서 자세한 증명은 APPENDIX 1.에 설명되어 있으며, $\beta_i = 1$ 즉, 완전 부재고인 경우는 Park 과 Kim[25]의 식(24)로 환원된다(APPENDIX 2. 참조). 또한 $K_0(Q_0, r_0)$ 를 중앙참고에서 발생하는

연간 평균변동비와 歸屬(imputed) 부재고 비용의 합으로 두면 식(30)과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{K}_0(Q_0, r_0) = & \frac{A_0 D_0}{Q_0} + h_0 \left(\frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu_0 \right) \\ & + \frac{(h_0 + \hat{\pi}_0) \mu_0}{2D_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0 \end{aligned} \quad (30)$$

식(30)은 식(15)와 동일한 형이므로 완전볼록함수가 되며, 따라서 (Q_0, r_0) 에서 유일한 해를 가진다. 식(30)을 Q_0, r_0 에 대해서 각각 편미분하여 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}_0}{\partial R_0} = & -\frac{A_0 D_0}{Q_0^2} + \frac{h_0}{2} - \frac{(h_0 + \hat{\pi}_0) \mu_0}{2Q_0^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0 = 0 \\ \therefore Q_0 = & \sqrt{\frac{2A_0 D_0 + (h_0 + \hat{\pi}_0) \mu_0 \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)^2}{x_0} f_0(x_0) dx_0}{h_0}} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}_0}{\partial r_0} = & h_0 - \frac{(h_0 + \hat{\pi}_0) \mu_0}{Q_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)}{x_0} f_0(x_0) dx_0 = 0 \\ \therefore \int_{r_0}^{\infty} \frac{(x_0 - r_0)}{x_0} f_0(x_0) dx_0 = & \frac{h_0 Q_0}{(h_0 + \hat{\pi}_0) \mu_0} \end{aligned} \quad (32)$$

5. 반복적 절차와 수치 예(An iterative procedure and numerical example)

다음에 제시된 반복적 절차는 연간 시스템의 총변동비를 최소화시키는 재고정책을 구하기 위해서 발견적 기법을 사용한다.

step 1) $d(Q_0, r_0) = 0$

step 2) (a) 주어진 $d(Q_0, r_0)$ 값에서 식(1), (2), (3)을 사용하여 각 소매점 i 의 μ_i 와 σ_i 를 구한다.

(b) 3절에 주어진 부반복절차(subprocedure)에 의해 각 소매점 i 에 대한 (R_i^*, r_i^*) 를 구한다.

step 3) (a) (R_i^*, r_i^*) 가 주어지면 식(21), (22), (29)로부터 $\mu_0, \sigma_0, \hat{\pi}_0$ 를 구한다.

(b) Hadley 와 Whitin[13]의 부반복절차를 이용하여 식(31), (32)로부터 Q_0^*, r_0^* 를 구한다.

(c) 식(28)을 이용하여 $d(Q_0, r_0)$ 값을 개선한다.

step 4) 앞단계에서 얻어진 (R_i^*, r_i^*) 와 (Q_0^*, r_0^*) 로 식(26)을 이용하여 연간 시스템 총변동비용을 계산하고, 연간 시스템총 변동비용이 충분히 수렴할때 까지 개선된 $d(Q_0, r_0)$ 값으로 step 2로 간다. 수렴되면 step 5로 간다.

step 5) 식(14)를 이용하여 Q_i^* 를 계산하고 (Q_i^*, r_i^*) 를 구한다.

$$R_i^* = Q_i^* + (1 - \beta_i)y_i(r_i^*)$$

본 연구에서 제시된 반복적 절차와 모형의 적용사례를 설명하기 위해서 10개의 소매점 가진 예제가 고려되었다. Table 1은 각 소매점들의 입력자료이고, 중앙창고에 관련된 자료는 다음과 같다.

$$A_0 = \$50, h_0 = \$0.8/\text{yr}/\text{unit}, l_0 = 0.7\text{year}$$

$$\text{여기서, } D_0 = \sum_{i=1}^N D_i = 930$$

<Table 2>에서는 반복절차의 중간계산 결과

들을 나타내고 있다. $\beta_i = 0.5$ 로 주어질 때 이예제에 대한 해는 반복절차 3에서 구해졌고 시스템의 최소 총변동비용은 \$1,747.50이다.

각 소매점의 주문량 Q_i^* 는 $EOQ_i = \sqrt{2A_i D_i / h_i}$ 를 사용하고 이 EOQ_i 를 근거로 해서 재주문점 r_i 를 결정한다. 또는 각 소매점에서 $d(Q_0, r_0) = 0$ 로서 3절에서 설명한 부반복절차를 사용해서 Q_i, r_i 를 결정한다. 참고로 Table 2의 2열에 EOQ 값이 주어진다.

그리고 실제로 사용된 Q_i^*, r_i^* 로서 중앙창고는 연간 총변동비용을 최소화 하는 최적 운영정책 (Q_0^*, r_0^*) 를 결정해야 한다 여기서 Q_i^* 는 각 소매점의 초기의 최적발주량을 의미한다.

Table 3은 부재고 비율 β_i 의 변화에 따른 최적인 운영정책 변수값을 나타내고 있다. 부재고 비율 β_i 가 증가할 수록 각 소매점 i의 Q_i^* 값은 모두 증가하고 있는 반면 r_i^* 값은 감소하고 있다. 또한 중앙창고의 Q_0^* 와 r_0^* 는 증가하나, $d(Q_0, r_0)$ 는 감소하고 있다. 또한 β_i 의 증가

<Table 1> Data for the example problem

Retailer (\$/unit)	Demand parameter			Cost parameter			
	D_i (unit/yr)	l_i (yr)	S_i (unit/yr)	A_i	h_i (\$)	π_i (\$/yr/unit)	P_i
1	77	0.12	42	37	2.2	19	3
2	122	0.17	29	43	3.5	35	3
3	60	0.13	30	27	1.3	22	3
4	132	0.16	40	32	4.1	18	3
5	85	0.18	37	18	2.7	27	3
6	61	0.11	33	26	3.7	47	3
7	120	0.15	43	32	2.4	34	3
8	92	0.14	32	36	4.5	39	3
9	69	0.19	34	25	3.4	34	3
10	112	0.15	28	29	2.9	46	3

에 따라 시스템 총변동비용은 감소하고 있다.

이것은 단일단계만을 고려한 Kim & Park [13] 에서의 결과와 같은 경향을 나타내고 있다. 또한 제시된 반복절차의 수렴성과 계산속도를 조사하기 위하여 Table 4에 주어진 자료

에서 임의로 생성된 자료를 이용하여 소매점의 수를 5개, 10개, 20개로 준것을 각각 4회, 4회, 2회로 조사한 결과가 Table 5, Table 6, Table 7에 나타나 있고 최대 반복횟수(maximum iterative number)는 각각 3회, 4회 7회로 나타났다.

<Table 2> Intermediate computationl result ($\beta_i=0.5$)

Retailer	EOQ	1		2		3	
		Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i
1	51	60	87	60	8	60	9
2	55	61	20	61	21	62	22
3	50	56	13	57	14	57	14
4	15	57	23	57	23	57	24
5	34	43	18	44	18	44	19
6	29	35	5	36	5	36	6
7	57	64	27	65	28	67	30
8	38	45	10	45	10	46	11
9	32	40	12	40	13	41	13
10	47	54	26	54	27	54	27
$d(Q_0, r_0)$		0.596		0.0544		0.547	
Q_0^*		560		565		567	
r_0^*		288		291		294	
TVC		1761.89		1747.52		1747.50	

<Table 3> Sensitivity of β_i fraction backordered

β_i	0		0.2		0.5		0.8		1	
	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i
1	52	12	60	11	60	8	61	8	62	7
2	60	25	62	23	62	22	64	20	64	19
3	56	17	57	16	57	14	58	12	58	11
4	54	29	56	27	57	24	58	22	59	20
5	41	25	44	24	44	19	45	17	45	16
6	33	7	35	7	36	6	36	6	36	5
7	64	34	66	33	67	30	67	26	68	14
8	43	15	44	15	46	11	47	10	47	10
9	38	15	40	14	41	13	42	13	42	12
10	53	31	54	30	54	27	55	26	55	25
$d(Q_0, r_0)$	0.1964		0.1156		0.547		0.0306		0.0220	
Q_0^*	539		551		567		577		591	
r_0^*	286		291		294		301		306	
TVC	1892.46		1805.74		1747.50		1695.80		1662.20	

<Table 4> The range of values of the parameters used in the best

Retailer	Range	
	Munimum	Maximum
A_0 (\$)	20	100
A_i (\$)	10	50
D_i (units/yr)	50	100
S_i (\$/unit/yr)	20	50
h_0 (\$/unit/yr)	0.5	1
h_i (\$/unit/yr)	1	5
l_0 (yr)	0.5	1
l_i (yr)	0.1	0.2
π_i (\$/unit/yr)	10	50

<Table 5> Numerical experiment results ($\beta_i=0.5$)

Problem Retailer	1		2		3		4	
	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i
1	51	16	25	10	45	20	60	25
2	51	28	59	13	55	13	52	12
3	52	5	61	6	77	18	48	19
4	65	35	56	16	54	16	88	39
5	35	15	54	21	57	17	97	33
$d(Q_0, r_0)$	0.1353		0.0602		0.1256		0.1421	
Q_0^*	393		367		366		343	
r_0^*	60		143		39		45	
TVC	844.71		741.50		753.10		941.83	
Iter. No.	3		3		3		3	

〈Table 6〉 Numerical experiment results ($\beta_i=0.5$)

Problem Retailer	1		2		3		4	
	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i	Q_i	r_i
1	67	23	48	25	65	21	43	17
2	37	13	53	18	52	21	52	27
3	62	20	52	23	93	20	42	21
4	43	25	59	14	42	15	39	14
5	34	15	50	12	37	4	56	27
6	55	12	50	23	46	16	25	15
7	44	14	56	26	40	22	35	21
8	70	42	37	19	65	17	65	20
9	40	14	32	15	26	15	24	14
10	44	29	73	13	63	17	36	14
$d(Q_0, r_0)$	0.1516		0.1060		0.0344		0.1078	
Q_0^*	545		639		485		547	
r_0^*	121		213		292		257	
TVC	1624.77		1478.50		1291.52		1692.82	
Iter. No.	3		3		4		3	

〈Table 7〉 Numerical experiment results ($\beta_i=0.5$)

Problem Retailer	1		2	
	Q_i	r_i	Q_i	r_i
1	55	14	65	18
2	48	7	41	18
3	81	24	61	15
4	45	16	42	20
5	43	8	33	12
6	45	14	53	8
7	60	19	43	10
8	45	17	69	35
9	44	16	46	13
10	58	20	49	26
11	40	13	38	13
12	36	7	48	12
13	45	11	47	17
14	42	19	45	17
15	42	16	42	16
16	37	14	33	18
17	40	11	41	11
18	64	19	19	14
19	52	24	39	9
20	59	22	53	25
$d(Q_0, r_0)$	0.0872		0.0930	
Q_0^*	1000		782	
r_0^*	488		226	
TVC	3239.26		3050.03	
Iter. No.	6		7	

6. SUMMARY

다단계 재고시스템이 현실적으로 많이 사용되고 있으나 이들 시스템의 수리적 모형이 매우 복잡하여 최적 운영 재고정책들을 얻기가 어렵기 때문에 다단계 재고 시스템의 운영에 관한 지침은 그다지 많지 않다. 더우기 부분부재고를 고려한 재고모형이 좀더 현실적이지만 이것을 고려한 다단계 재고 시스템을 위한 운영정책은 거의 제시되지 않고 있다.

본 연구에서는 중앙창고와 각 소매점들이 연속조사정책(Q,r)모형을 하는 2단계 분배시스템에서 수요가 확률적이고 부분부재고를 고려한 상황에서 중앙창고와 각 소매점간의 상호작용을 기초로 하여 시스템의 연간 총변동비를 최소화 하는 최적 또는 근사적 재고정책을 발견하는 반복적인 절차를 제시하였다. 이 절차는 비록 수학적인 복잡성 때문에 수렴이 정확히 증명될 수 없었지만, 많은 수치실험을 한 결과 해의 수렴이 빠르게 진행되어 본 연구의 모형이 타당하다는 것을 확인할 수 있었다.

따라서 본 연구에서 제시된 모형이 다단계 분배 시스템의 실제적인 문제 해결에 유용할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] 李康雨, "部分 負在庫를 고려한 在庫시스템의 設計에 관한 研究," 博士學位論文, 東亞大學校 大學院, (1990), pp.43-73.
- [2] Allen, S. G., "Redistribution of Total Stock Over Several User Locations," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 5(1958), pp.51-59.
- [3] Beek, B. V., "Modelling and Analysis of a Multi-Echelon Inventory System," *Eur. J. of Opl. Res.* Vol. 6, No. 4(1981), pp. 380-385.
- [4] Browne, S., and P. Zipkin, "Inventory Models with Continuous, Stochastic Demand," *Anns. Appl. Prob.* Vol. 1, No. 3 (1991), pp.419-435.
- [5] Clark, A. J., "The Use of Simulation to Evaluate a Multiechelon Dynamic Inventory Model," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 7, No. 4(1960), pp.621-650.
- [6] Clark, A. J., and H. E. Scarf, "Optimal Policy for a Multiechelon Inventory Problem," *Mgmt. Sci.*, Vol. 6(1960), pp. 475-490.
- [7] Cohen, M. A., P. R. Kleindorfer and H. L. Lee, "Service Constrained (s,S) Inventory Systems with Priority Demand Classes and Lost Sales," *Mgmt. Sci.*, Vol. 34, No. 4(1988), pp.482-499.
- [8] Das, C., "Q,r Inventory Modes with Time-Weighted Backorder," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 34, No. 5(1983), pp.401-412.
- [9] Das, C., "Supply and Redistribution Rules for Two-Location Inventory Systems : One Period Analysis," *Mgmt. Sci.*, Vol. 21 (1975), pp.765-776.
- [10] Deuermeyer, B. L. and L. B. Schwarz, *A Model for the Analysis of System Service Level in Warehouse-Retailer Distribution System : the Identical Retailer Case,* In *Multi-Level Production/Inventory Control*

- Systems : Theory and Practice*, North Holland, Amsterdam, 1981, pp. 163-193.
- [11] Galliher, H., P. Morse and M. Simmond, "Dynamics of Two Classes of Continuous-Review Inventory Systems." *Opns. Res.*, Vol. 7(1959), pp.362-384.
- [12] Gross, D., "Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems," in Scarf, Gilford, and Shelly(Eds.), *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford University Press, Stanfor, CA, 1963, pp.47-84 .
- [13] Hadley, G. and T. M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Inc. London, 1963.
- [14] Hoadley, B. and D. P. Heyman, "A Tow-Echelon Inventory Model with Purchases, Dispositions, Shipments, Returns, and Transshipments," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 24(1977), pp.1-20.
- [15] Holt, C. C., F. Modigliani, J. F. Muth and H. A. Simon, *Planning Production, Inventories, and Work Force*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey 1960.
- [16] Krisnan, K. S. and V. R. K. Rao, "Inventory Control in N Warehouses," *J. Industrial Engineering*, Vol. 16(1965), pp. 212-215
- [17] Kim, D. H. and Park, K. S., "(Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 36, No. 3(1985), pp.231-238.
- [18] Kok, A. G., "Approximations for a Lost-Sales Production/Inventory Control Model with Service Level Constraints," *Mgmt. Sci.*, Vol. 31, No. 6(1985), pp. 729-737.
- [19] Lee, H., and S. Nahmias, "Single Product, Single-Location, Models," in S. Graves, A. Rinnooy Kan and P. Zipkin(Eds.), *Handbook in Operations Research and Management science*, Vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1989
- [20] Montgomery, D. C., M. S. Bazaraa, and A. K. Keswani, "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 20, No. 2 (1973), pp.255-263.
- [21] Muckstadt, J. A., "A Model for a Multi-Item, Multi-Echelon, Multi-Indenture Inventory System," *Mgmt. Sci.*, Vol. 20, No. 4(1973), pp.472-481.
- [22] Muckstadt, J. A. and M. H. Issac, "An Analysis of Single Item Inventory System with Returns," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 28, No. 2(1981), pp.237-254
- [23] Park, K. S., "Another Inventory Model with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 30, No. 3(1983), pp.397-400.
- [24] Park, K. S., "Inventory Model with Partial Backorders," *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 13, No. 12(1982), pp.1313-1317.
- [25] Park, K. S., and D. H. Kim, "Stochastic Inventory Model for Two-Echelon Distribution Systems," *Computers ind. Engng.*, Vol. 16, No. 2(1989), pp. 245-255.
- [26] Pinkus, C. E., "OPTimal Design of

- Multi-Production Multi-Echelon Inventory System," *Dec. Sci.*, Vol. 6, No. 3(1975), pp.492-507.
- [27] Rosenbaum, B. A., "Service Level Relationships in a Multi-Echelon Inventory System," *Mgmt. Sci.*, Vol. 27, No. 8(1981), pp.926-945.
- [28] Rosenberg, D., "New Analysis of a Lot-Size Model with Partial Backlogging," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 26, No. 2 (1979), pp.349-353.
- [29] Simpson, K. E. Jr., "A Theory of Allocation of Stocks to Warehouses," *Oper. Res.*, Vol. 7(1959), pp.797-805
- [30] Schwarz, L. B., B. L. Deuermeyer and R. D. Badimelli, "Fill-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution System," *Mgmt. Sci.*, Vol. 31, No. 4(1985), pp.488-498.
- [31] 6. Sherbrooke, C. C., "METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control," *Opns. Res.*, Vol. 16, No. 1 (1968), pp.122-141.

◀ APPENDIX 1. ▶

식(29)의 $\hat{\pi}_0$ 를 미분하는 과정

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_0 &= \frac{dK^*[d(Q_0, r_0)]}{dB(Q_0, r_0)} = \frac{dK^*[d(Q_0, r_0)]}{dd(Q_0, r_0)} \cdot \frac{dd(Q_0, r_0)}{dB(Q_0, r_0)} \\ &= \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \sum_{i=1}^N \left[\frac{A_i D_i}{R_i^*} + h_i \left(\frac{R_i^*}{2} + r_i - \mu_i \right) + \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)}{R_i^*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2R_i^*} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right] \cdot \frac{1}{D_0} \\ &= \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)} + h_i \left[\frac{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)}{2} + r_i - [l_i + d(Q_0, r_0)] D_i \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)} + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right\} \cdot \frac{1}{D_0} \end{aligned}$$

위식을 ①②③④항으로 분리하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \cdot \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)} \\ &= \frac{1}{[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ -A_i D_i (1 - \beta_i) \left[\frac{D_i}{2\sigma_i^2 \mu_i} \int_{r_i}^{\infty} x_i^2 (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{D_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2)}{2\sigma_i^2 \mu_i} \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right] \right\} \\ &= \frac{1}{[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ -A_i D_i \frac{(1 - \beta_i) D_i}{2\sigma_i^2 \mu_i} \left[\int_{r_i}^{\infty} x_i^2 (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right] \right\} \\ &= -\frac{A_i D_i^2 (1 - \beta_i)}{2\sigma_i^2 \mu_i [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ \int_{r_i}^{\infty} x_i^2 (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \int_{r_i}^{\infty} (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right\} \\ &= -\frac{A_i D_i^2 (1 - \beta_i)}{2\sigma_i^2 \mu_i [Q_i + (1 - \beta_i) K_1]^2} [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) K_1] \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} & \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} h_i \left\{ \frac{Q_i + (1 - \beta_i)y_i(r_i^*)}{2} + r_i - [1_i + d(Q_0, r_0)]D_i \right\} \\
 & = h_i \left\{ \frac{(1 - \beta_i)}{2} \left[\frac{D_i}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(\sigma_i^2 + \mu_i^2)D_i}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] - D_i \right\} \\
 & = \frac{(1 - \beta_i)D_i}{4\sigma_i^2\mu_i} \left[\int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] - h_i D_i \\
 & = \frac{(1 - \beta_i)D_i}{4\sigma_i^2\mu_i} [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2)K_1] - h_i D_i \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} & \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \cdot \frac{D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)}{Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)} \\
 & = \frac{1}{[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ D_i P_i (1 - \beta_i) \left[\frac{D_i}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{D_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2)}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] \cdot [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(x_i^*)] \right. \\
 & \quad \left. - D_i P_i (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) \cdot (1 - \beta_i) \left[\frac{D_i}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{D_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2)}{2\sigma_i^2\mu_i} \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] \right\} \\
 & = \frac{1}{[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ \frac{D_i^2 P_i (1 - \beta_i)}{2\sigma_i^2\mu_i} \left[\int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] \cdot [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(x_i^*)] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{D_i^2 P_i (1 - \beta_i)^2 y_i(r_i^*)}{2\sigma_i^2\mu_i} \left[\int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2(x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*)f_i(x_i)dx_i \right] \right\} \\
 & = \frac{1}{[Q_i + (1 - \beta_i) K_1]^2} \left\{ \frac{D_i^2 P_i (1 - \beta_i)}{2\sigma_i^2\mu_i} [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) K_1] \cdot [Q_i + (1 - \beta_i) K_1] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{D_i^2 P_i (1 - \beta_i)^2 K_1 [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) K_1]}{2\sigma_i^2\mu_i [Q_i + (1 - \beta_i) K_1]^2} \right\} \\
 & = \frac{Q_i D_i^2 P_i (1 - \beta_i) [K_2 - (\sigma_i^2 + \mu_i^2) K_1]}{2\sigma_i^2\mu_i [Q_i + (1 - \beta_i) K_1]^2} \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{4} \quad \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \cdot \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& = \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \left(\frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \right) \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \cdot \frac{d}{dd(Q_0, r_0)} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& = \frac{1}{4[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \{ (h_i + \beta_i \pi_i) D_i \cdot 2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)] - 2(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i (1 - \beta_i) \} \\
& \times \int_{r_i^*}^{\infty} \left[\frac{-D_i}{2\mu_i} + \frac{(x_i - \mu_i) D_i}{\sigma_i^2} + \frac{(x_i - \mu_i)^2 D_i}{2\sigma_i^2 \mu_i} \right] (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) \mu_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left[-\frac{D_i}{2\mu_i} + \frac{(x_i - \mu_i) D_i}{\sigma_i^2} \right. \\
& \left. + \frac{(x_i - \mu_i)^2 D_i}{2\sigma_i^2 \mu_i} \right] f_i(x_i) dx_i \\
& = \frac{2(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) - (1 - \beta_i)] \int_{r_i^*}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(x_i - \mu_i) \mu_i}{\sigma_i^2} + \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right\} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x_i - r_i^*)^2}{\sigma_i^2} + \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) f_i(x_i) dx_i \\
& = \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ [Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) - (1 - \beta_i)] \int_{r_i^*}^{\infty} \left(\frac{x_i^2 - \sigma_i^2 - \mu_i^2}{2\sigma_i^2} \right) \right. \\
& \left. \times (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right\} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(\frac{x_i^2 - \sigma_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) f_i(x_i) dx_i \\
& = \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) - \frac{(1 - \beta_i)}{2} \int_{r_i^*}^{\infty} \left[\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} + 1 \right) \right] (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right\} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
& + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left[\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} + 1 \right) \right] f_i(x_i) dx_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]^2} \left\{ Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*) - \frac{1 - \beta_i}{2} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2 (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) \int_{r_i^*}^{\infty} (x_i - r_i^*) f_i(x_i) dx_i \right] \right\} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)}{x_i} f_i(x_i) dx_i \\
 &\quad + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4[Q_i + (1 - \beta_i) y_i(r_i^*)]} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} \int_{r_i^*}^{\infty} x_i^2 \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right] \\
 &= \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{2[Q_i + (1 - \beta_i) K_1]^2} \left\{ Q_i + (1 - \beta_i) K_1 - \frac{1 - \beta_i}{2} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} K_2 - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) K_1 \right] \right\} K_3 \\
 &\quad + \frac{(h_i + \beta_i \pi_i) D_i}{4[Q_i + (1 - \beta_i) K_1]} \left[\frac{1}{\sigma_i^2} K_4 - \left(1 + \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) K_3 \right] \tag{4}
 \end{aligned}$$

◀ APPENDIX 2 ▶

$\beta_i = 1$ 일때 Park 과 Kim[16]의 식(24)로 환원되는 과정

식(29)로부터 $\beta_i = 1$ 이면,

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}_0 &= \sum_{i=1}^N \left[-\frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{2Q_i^* D_0} Q_i^* \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(\frac{x_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right) f_i(x_i) dx_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[-\frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{2(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(\frac{x_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right) f_i(x_i) dx_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \left[\int_{r_i^*}^{\infty} \frac{2(x_i - r_i^*)^2}{x_i} f_i(x_i) dx_i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(\frac{x_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right) f_i(x_i) dx_i \right] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \left[\int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(2 + \frac{x_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} - 1 \right) f_i(x_i) dx_i \right] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[-\frac{h_i D_i}{D_0} + \frac{(h_i + \pi_i) D_i}{4Q_i^* D_0} \int_{r_i^*}^{\infty} \frac{(x_i - r_i^*)^2}{x_i} \left(1 + \frac{x_i^2 - \mu_i^2}{\sigma_i^2} \right) f_i(x_i) dx_i \right]
 \end{aligned}$$