

## 반쪽 롱테이퍼 스프링과 공기스프링의 조합시 특성해석 연구

권 혁 흥\*, 최 선 준\*\*

### The Characteristic Analysis on the Combination of Air and Half-long Taper Spring

H. H. Kwon\*, S. J. Choi\*\*

#### Abstract

Air spring has the advantages to be nearly constant in natural frequency in spite of load change, and to be able to control height level. Half-long taper spring has the advantages to function as well link as spring. Thus to utilize two type spring's advantages, half-long taper spring and air spring are combined and used. In this study, the theory to calculate the characteristics in combination is developed.

Keywords : Half-long taper spring(반쪽 롱테이퍼 스프링), Air spring(공기스프링), Spring combination (스프링 조합), Truck(트럭)

#### 1. 서 론

스프링은 금속, 고무, 플라스틱 등의 재료가 가지는 성질을 이용하여 보다 유익한 형태의 탄성, 에너지 흡수, 진동 및 충격완화 등을 목적으로 필요한 형상을 제작한 기계요소로서 기계 완제품을 구성하는 중요한 기본 부품이다. 스프링의 종류를 살펴보면, 코일스프링, 판스프링, 토션바스프링, 스파이럴스프링, 볼류우트스프링, 접시스프링, 선세공스프링, 공기스프링 등이 있다.

특히 자동차의 현가장치용으로 많이 사용되는 겹판스프링, 공기스프링, 코일스프링 및 토션바스프링 등은 노면으로부터의 진동을 절연하여 자동차 구조물을 보호하고 승

객의 승차감을 향상시켜 궁극적으로 자동차의 속도증가를 도모하는 것이 주기능이다.

이중에서도 판스프링의 일종인 롱테이퍼 스프링은 일반적인 겹판스프링의 단점인 동적특성의 저하, 작동시 소음 발생문제 등이 개선됨과 동시에 겹판스프링의 장점인 스프링역할과 동시에 구조물로서의 역할을 하므로 다른 스프링에서 필요한 별도의 링크장치 등이 필요없고 작동에 필요한 설치 높이가 낮아도 되는 잇점이 있어 최근 겹판스프링을 대신하여 중형 버스 및 트럭에 많이 사용되어지는 추세이다. 특히 반쪽 롱테이퍼 스프링은 단독으로 보다는 공기스프링과 조합되어 많이 사용되어 지는데 그 대표적인 형상은 Fig. 1과 같다.

\* 대진대학교 기계설계공학과, 생산기술연구소

\*\* (주)고려자동차

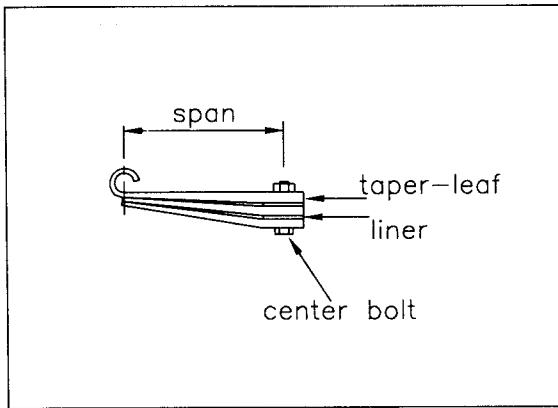


Fig. 1 Schematic of half-long taper spring

겹판스프링에 대한 연구는 일찍부터 시작되어 많은 자료가 발표되었는데 그중에서 해석하는 방법은 기본가정에 따라 해석법이 여러가지이며, 일본 스프링학회(1)에서는 겹판스프링의 판을 옆으로 펼친 2점지지 단순보로 근사시킬 수 있다는 전개법을 개발했으며, Aoyama(2,3)는 판과 판사이는 짧은 판의 끝부분에서만 접촉한다는 가정의 판단법을 개발하였고, SAE(4)는 겹판스프링 전체에 걸쳐 응력이 일정하게 분포되어 변형형상이 항상 전체길이에 대해 일정한 곡률이 유지가 된다는 등반경법을 개발하였다. 또, 해석을 위해 날장판을 여러 부분으로 나누고 각 부분을 강성체와 등가 스프링으로 모델링하여 메트릭스 계산한 Shimoseki(5)의 연구가 있다.

최근에 와서는 유한요소법을 사용한 겹판스프링의 해석이 시도되고 있는데 Hamano(6)등이 날장판을 평면응력 요소로, 판사이의 접촉을 유한요소법의 GAP 요소를 사용하여 해석하였다.

롱테이퍼 스프링의 경우는 Bane(7)에서 여러 가지 단면형상에 따른 특성, 계산식 등에 대해 정리하여 발표하였으며 겹판스프링의 판단법 계산이론을 롱테이퍼 스프링에 적용한 연구는 Aoyama(8) 가 발표하였다. 국내에서는 이(9)가 롱테이퍼 스프링을 최적설계 하기위한 형상 최적화문제에 대해 연구하였고 엠(10) 등은 설계이론 및 제조 방법에 대해 연구한 결과를 발표하였다. Nigro(11) 는 테이퍼 판스프링을 1차원적 등가해석을 시도하였으며 여러가지 형상의 단판 스프링에 대한 결과식을 정리한 것이 SAE(12)에 의해 발표되었다. 유압에 의해 롱테이퍼 스프

링의 판간 마찰력을 제어하여 동특성을 변화시키는 연구는 Takadera(13)에 의해 행하여졌다.

공기스프링은 공기의 탄성을 이용한 기체스프링의 한 종류로 차량의 하중변동에도 불구하고 차량의 고유진동수를 거의 일정하게 유지, 승차감을 향상시키며 또 높이 조정밸브(levelling valve)에 의해 차량의 높이를 일정하게 유지시켜준다. 이 기능으로 차량의 선회시 일반스프링보다 안전한 자세를 유지할 수 있다.

또한 제한된 공간에서 하중지지 능력이 크며 쇠로 만든 스프링에 비해 주 부품이 섬유로 보강된 고무로 되어 있어 노면으로부터 전달되는 고주파진동의 절연이 매우 우수하고 별도의 공기배관에 의해 승강기 역할도 겸할 수 있다.

그러나 일반 자동차에 사용될 수 있는 공기스프링 형상은 스프링의 수직방향을 제외한 앞뒤 좌우방향의 지지능력이 없으므로 이 방향으로의 스프링 지지를 위하여 트러스트 로드(trust rod) 등의 부가장치를 필요로 하고 있어 현가장치가 복잡해지는 단점이 있다. 공기스프링의 대표적인 형상 및 용어는 Fig. 2와 같다.

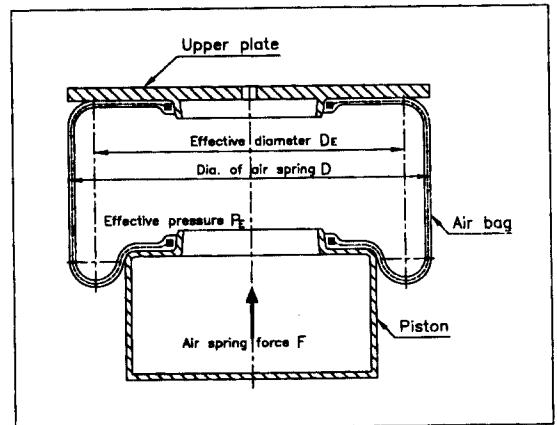


Fig. 2 The rolling lobe air spring

공기스프링에 대해서는 Hirtreiter(14)가 그 원리 및 종류, 용어의 정의, 다른 종류의 스프링과 비교한 장단점 등 일반적인 사항을 정리하였으며, Thomas(15)는 공기스프링의 원리로부터 스프링특성이 비선형적임을 이론적으로 보이고 이 비선형성이 현가장치의 스프링으로 사용될 때 얼마나 유용한지를 보여줌과 동시에 설계기법을 연

구정리하였다. 실제 몇 가지 모델의 승용차에 적용되었던 시스템의 소개 및 이때의 장단점 분석은 Hulk(16)가 하였다. 공기스프링의 일반적인 특성인 비선형성과 히스테리시스 특성을 고려한 강제진동시의 거동에 대한 연구가 있었으며(17), SAE 매뉴얼(18)에는 공기스프링에 대한 용어, 종류, 장착방법, 간단한 이론 등이 기술되어 있다.

위에서 설명하였듯이 롱테이퍼 스프링과 공기스프링은 서로 장단점을 가지고 있는데 공기스프링의 장점인 하중변동에도 불구하고 그 차량의 고유진동수와 높이를 일정하게 할 수 있는 것과 롱테이퍼 스프링의 장점인 현가장치의 구조를 간단하게 할 수 있다는 것을 동시에 만족시키기 위하여 공기스프링과 롱테이퍼 스프링의 조합설계를 한다.

또한 반쪽 롱테이퍼 스프링과 조합된 경우는 차체에 롤링이 발생될 때 차축을 지지점으로하여 좌우의 롱테이퍼 스프링의 변위에 차이가 생겨 롤링 반대방향으로 복원력을 즉, 반쪽 롱테이퍼 스프링이 엔티롤바(anti-roll bar) 역할을 하게 되므로 공기스프링에서 부족한 롤링복원력을 별도의 엔티롤바 추가없이도 그 기능이 달성될 수 있다는 장점이 있다. 따라서, 이러한 조합 스프링은 중형 및 대형 트럭에 많이 적용되어 왔는데, 그 대표적인 형상은 Fig. 3과 같다. 본 논문에서는 반쪽 롱테이퍼 스프링과 공기스

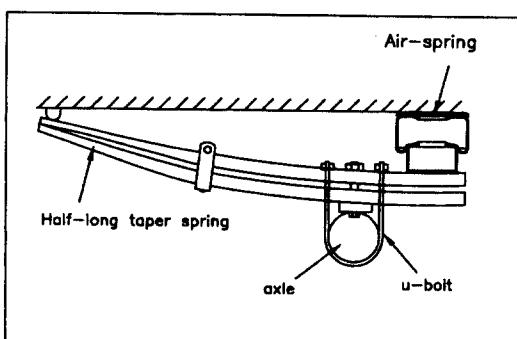


Fig. 3 Schematic of combination of half-long taper spring and air spring

프링이 병렬로 조합되어 현가장치에 사용될 때 각각의 스프링 특성치로 부터 조합된 스프링 특성치를 구하는 방법에 대해 이론식을 정립하고자 한다.

## 2. 특성계산식

### 2.1 반쪽 롱테이퍼 스프링

판스프링의 재료효율을 높이기 위해서는 스프링 전 단면에 걸리는 응력이 일정해야 한다. 이를 위해 두가지 방법을 생각할 수 있는데 하나는 두께를 일정하게 두고 폭을 변화시키는 방법과 다른 하나는 폭을 일정하게 두고 두께를 변화시키는 것이다. 전자의 방법으로 만든 판스프링이 일반적인 겹판스프링이고 후자의 방법으로 만든 판스프링이 단판 판스프링이다.

단판 판스프링은 형상에 따라 여러 가지로 나누는데 이 중에서 두께가 직선으로 변하는 것을 롱테이퍼 스프링이라 하며 차체와의 연결부분의 강도를 유지하기 위해 밴드부의 두께는 일정하게 하는 것이 일반적이다.

수직방향의 스프링상수를 구하기 위해서는 에너지법을 사용하는 것이 편리한데 Fig. 4를 참조하여 굽힘응력에 의해 외팔보에 저장되는 내부 에너지  $U$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

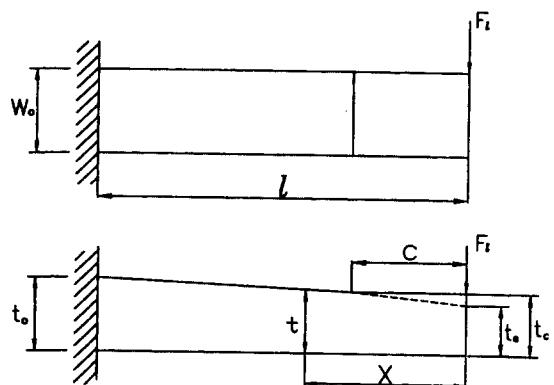


Fig. 4 Half-long taper spring

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_c^l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^c \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1)$$

여기서 임의의 위치  $x$ 에서의 두께  $t$ 는,  

$$t = t_e + \frac{t_o - t_e}{l} x \quad (c \leq x \leq l)$$
 을 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{3F_l^2 l^3}{EW_0 t_o^2} \left( \frac{1}{(1-J_e)^3} \left[ 4J_e - J_e^2 - 2 \log \left[ J_e \left( 1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H \right) \right] \right] - \frac{4}{1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H} + \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H \right)^2} + \frac{2}{3} \frac{H^3}{J_e^3} (1 - J_e)^3 \right) (2)$$

하중에 의해 외부적으로 행하여지는 일 W는 다음과 같다.

$$W = F_l \cdot \delta_l \quad (3)$$

여기서  $\delta_l$ 는 롱테이퍼 스프링의 변위이다.

식 (2)와 식 (3)에 의한 스프링상수  $K_l$ 는 다음과 같다.

$$K_l = \frac{F_l}{\delta_l} = \frac{E W_0 t_o^3}{4 l^3} C_v \quad (4)$$

여기서

$$C_v = \left[ 2(1 - J_e)^3 / \left[ 12J_e - 3J_e^2 - 6 \log \left[ J_e \left( 1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H \right) \right] \right] - \frac{12}{1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H} + \frac{3}{\left( 1 + \left( \frac{1}{J_e} - 1 \right) H \right)^2} + 2 \frac{H^3}{J_e^3 (1 - J_e)^3} \right]$$

이며

$$J_e = \frac{t_e}{t_o}, \quad J_c = \frac{t_c}{t_o}, \quad H = \frac{t_e/t_o - t_c/t_o}{t_e/t_o - 1} \text{이다.}$$

수평방향의 스프링특성  $K_L$ 도 동일한 방법으로 구할수 있는데 그 결과식은 다음과 같다.

$$K_L = \frac{F_{Ll}}{\delta_{Ll}} = \frac{E W_o^3 t_o}{4 l^3} C_L \quad (5)$$

여기서

$$C_L = \frac{2}{3} (1 - J_e)^3 / \left[ (1 - 4J_e - (1 - J_e)H)^2 + 4 \{ J_e^2 + (J_e - J_e^2)H \} - 2J_e^2 \log (J_e + (1 - J_e)H) + \frac{2H^3}{3J_e} (1 - J_e)^3 \right] \text{이다.}$$

최대용력  $\sigma_p$ 의 계산은 다음식에 의한다.

$J_e \geq 0.5$ 인 경우는

$$\sigma_p = -\frac{6F_l}{W_o t_o^2} \quad (6)$$

이며,  $J_e < 0.5$ 인 경우는

$$\sigma_p = -\frac{6F_l}{W_o t_o^2} \cdot \frac{1}{4 J_e (1 - J_e)} \quad (7)$$

이다.

최대용력이 걸리는 거리  $X_p$ 는 다음식으로 구할수 있다.

$$X_p = \frac{l(J_c - H)}{1 - J_c} \quad (8)$$

두장 이상이 겹쳐서 사용되면 병렬연결로 생각할 수 있으므로 스프링상수는 단판 숫자만큼 곱하고 응력을 구하기 위한 하중은 단판 숫자로 나눈 값을 사용하면 된다.

## 2.2 공기스프링

공기스프링은 코드로 보강된 유연한 고무자루(에어백)와 금속부로 구성되어 있으며 내부공기의 압축과 팽창에 의한 탄성을 이용한 스프링으로 열역학의 기체방정식에서 그 특성을 유도한다. Fig. 2에서와 같이 공기스프링내의 압력을  $P_E$ (상대압력)라 하고, 유효면적을  $A_E$ 로 표시하면 공기스프링에 작용하는 하중  $F_a$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$F_a = P_E \cdot A_E \quad (9)$$

그리고 스프링정수  $K_a$ 는 다음식으로 정의된다.

$$K_a = \frac{dF_a}{d\delta_a} \quad (10)$$

여기서  $\delta_a$ 는 공기스프링의 변위이다. 식 (9)를 식 (10)에 대입하여 정리하면

$$K_a = P_E \frac{dA_E}{d\delta_a} + A_E \frac{dP_E}{d\delta_a} \quad (11)$$

또 이상기체의 경우 보일-샤르법칙에 의하여  $P \cdot V^n =$

일정이다. 이 관계식의 양변을 미분하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dP_E}{d\delta_a} = -n(P_A + P_E) \frac{1}{V} \frac{dV}{d\delta_a} = n(P_A + P_E) \frac{A_E}{V} \quad (12)$$

여기서  $P_E$ 는 절대압력,  $P_A$ 는 대기압,  $V$ 는 체적,  $n$ 은 폴리트로프지수이다. 식 (12)를 식 (11)에 대입하면 공기스프링의 스프링정수는 다음과 같다.

$$K_a = P_E \frac{dA_E}{d\delta_a} + n(P_A + P_E) \frac{A_E^2}{V} \quad (13)$$

위식에서 등온변화시 폴리트로프지수는 1.0이므로 정적상태에서의 스프링정수  $K_{stat}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$K_{stat} = P_E \frac{dA_E}{d\delta_a} + (P_A + P_E) \frac{A_E^2}{V} \quad (14)$$

동적인 경우는 단열변화를 일으키므로 폴리트로프지수가 1.4가 되어 스프링정수는 다음식으로 표시된다.

$$K_{dyn} = P_E \frac{dA_E}{d\delta_a} + 1.4(P_A + P_E) \frac{A_E^2}{V} \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)에서 알 수 있듯이 공기스프링의 스프링정수는 유효면적의 크기에 가장 크게 영향을 받아 증가하며 체적에 대해서는 반비례의 관계가 있다. 또한 퍼스톤부분의 형상을 변화시킴으로써 변위에 따른 유효면적의 변화율을 조정하여 스프링의 특성을 바꿀 수도 있음을 보여주고 있다. 차량을 단순한 1자유도 진동계로 생각하면 고유진동수  $f_n$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (16)$$

여기서  $M$ 은 질량이며  $K$ 는 스프링정수이다.

식 (15), (16)으로부터 공기스프링의 고유진동수  $f_{na}$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f_{na} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{A_E} \left[ \frac{dA_E}{d\delta_a} + 1.4 \left( 1 + \frac{P_A}{P_E} \right) \frac{A_E^2}{V} \right]} \quad (17)$$

위식에서  $P_E$ 를 제외하고는 공기스프링의 형상이 결정되면 다른 변수들은 상수가 되므로 하중에 의해 변화되는 값은 유효압력  $P_E$  뿐인데 일반적으로  $P_E > P_A$ 이므로 하중변화에 대한  $P_E$  값의 변화가 고유진동수의 값을 크게 변화시키지 않으므로 위식에서 알 수 있듯이 공기스프링은 하중의 변동에도 불구하고 차량의 고유진동수를 거의 일정하게 유지시켜 준다.

### 2.3 조합스프링의 특성식

Fig. 3에서 차축과 공기스프링사이의 부분은 다른 부분과 비교하여 길이에 비해 굽힘 강성이 매우 크므로 강제로 생각할 수 있다. 따라서 Fig. 3은 Fig. 5와 같이 단순화될 수 있다.

Fig. 5를 참고로 하여 변형의 기하학적 관계와 힘의 평행식을 이용하면 다음식이 성립된다.

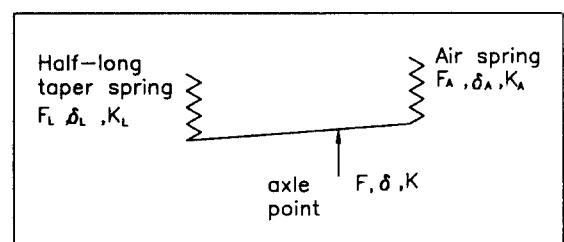


Fig. 5 Simplified model of combination spring

$$\delta_l = \frac{1 + \lambda}{1 + \phi \lambda^2} \delta \quad (18)$$

여기서  $\phi = K_l/K_a$ ,  $\lambda = l_l/l_a$ 이다.  $K_l$  정의에 의해

$$K_l = \frac{F_l}{\delta_l} = \frac{1}{1 + \lambda} \frac{F}{\delta_l} \quad (19)$$

로 표현되므로 두식으로부터  $\delta_l$ 을 소거하면 조합스프링의 스프링상수  $K$ 는

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{\phi(1 + \lambda)^2}{1 + \phi \lambda^2} K_l \quad (20)$$

이 되고, 이것으로부터 다음식이 유도된다.

$$K = (K_l + K_a) \frac{\phi(1+\lambda)^2}{(1+\lambda)(1+\phi\lambda^2)} \quad (21)$$

위식은 차축이 자유롭게 회전되는 경우의 조합스프링의 특성이다.

차량이 롤링이 발생하면 차체의 좌우가 설계높이에서 반대방향으로 움직이게 되고, 이때 설계높이를 기준으로 차축의 상하움직임시 전후방향의 변위가 동일한 방향이 되도록 롱테이퍼 스프링의 캠버를 설정하여 두면 롤링발생시 차축은 좌우에서 서로 반대방향으로 회전이 발생된다. 그러나 차축은 강체이기 때문에 회전이 일어나지 못하고 롱테이퍼 스프링의 작동지지점이 된다. 따라서 롤링이 일어나면 좌우 롱테이퍼 스프링이 서로 반대방향으로 변위가 발생하여 이 스프링 역할에 의해 롤링 복원력이 발생하며 그 복원모멘트  $M_R$ 은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$M_R = K_l \cdot \delta_R \cdot l_{axle} \quad (22)$$

여기서  $\delta_R$ 은 차체중심을 기준으로한 차체 기울어짐 변위량,  $l_{axle}$ 은 좌우 롱테이퍼 스프링간의 거리이다.

### 3. 고찰

정립된 이론을 검증해보기 위해 실험을 선정하여 두 스프링의 조합에 의한 특성값 계산, 롱테이퍼 스프링을 강체로 가정하였을 때의 특성값, 롱테이퍼 스프링이 링크 역할만 한다고 가정하였을 때의 특성값 등을 계산하여 상호 비교하여 본다. 대형트럭에 적용된 예를 기준으로 각 스프링의 특성값, 조합에 따른 치수는 Table 1과 같다.

Table 1 Data of combination spring

type data	long-taper spring	Air spring
spring rate(kgf/mm)	54.0	14.3
length from center bolt to(mm)	676	369

식 (21)을 이용하여 반쪽 롱테이퍼 스프링과 공기스프링이 조합된 경우의 스프링 특성값  $K$ 는  $31.9\text{kgf/mm}$ 이다. 두 번째로 반쪽 롱테이퍼을 강체로 가정하면 ( $K_l = 1430\text{kgf/mm}$ 로 가정) 식 (21)을 이용하여 조합특성식을 계산하

여 보면  $K$ 는  $34.5\text{kgf/mm}$ 가 된다. 세 번째로, 반쪽 롱테이퍼 스프링 대신에 강체의 링크로 대체한 경우를 생각해 보면 다음식에 의해 차축에서의 스프링상수가 계산될 수 있다.

$$K = \left( \frac{l_l + l_a}{l_l} \right)^2 \cdot K_a \quad (23)$$

따라서 이 경우의 스프링 상수값  $K$ 는  $34.2\text{kgf/mm}$ 가 될 수 있다.

이 계산결과에서 알 수 있듯이 롱테이퍼 스프링을 거의 강체로 가정하였을 때와 강체의 링크일 때의 계산결과가 거의 비슷하다. 또한 롱테이퍼 스프링이 스프링 작용을 할 때는 강체일 때보다 조합된 특성값이 낮아지며 공기스프링 단품보다는 높아지는 값이다. 이로부터 위에서 정립된 스프링 특성 조합식이 유효함을 알 수 있다. 더 자세한 검증을 위해서는 실험값과 비교해 보아야 할 것이다.

그리고 조합되어 사용되어 질 때 롱테이퍼 스프링은 구조물의 역할을 겸하고 있으므로 스프링 아이부분의 강도를 유지시킬 필요가 있으므로 차량이 각 현가장치에 부가하는 하중과 급제동시의 마찰력 등을 고려하여 차량 진행 방향의 힘에 의한 아이부 강도계산이 필요하다.

### 4. 결론

반쪽 롱테이퍼 스프링과 공기스프링은 서로 장단점을 가지고 있는데 공기스프링의 장점인 하중변동에도 불구하고 그 차량의 고유진동수와 높이를 일정하게 할 수 있다는 것과 반쪽 롱테이퍼 스프링의 장점인 현가장치의 구조를 간단하게 할 수 있다는 것을 동시에 만족시키기 위해 공기스프링과 반쪽 롱테이퍼 스프링의 조합설계를 한다.

본 논문에서는 이러한 조합설계시에 필요한 이론식을 정립하였으며 결론은 다음과 같다.

- (1) 공기스프링과 롱테이퍼 스프링의 조합시 각각의 특성과 배치에 의한 조합특성의 계산 방법을 정립하였다.
- (2) 이러한 조합스프링을 사용할 때 롱테이퍼 스프링이 작용할 수 있는 엔티를 특성값의 계산식을 정립하였다.
- (3) 극한 계산을 이용하여 정립된 조합 스프링의 특성식이 이론적으로 유효함을 증명하였다.

### 참 고 문 헌

1. ばね技術委員會, "ばね (3 edition)", 1989.
2. T. Aoyama, "The Calculation of a Tip Contact Leaf Spring", ばね論文集, Vol. 16, pp 47-50, 1971.
3. T. Aoyama, Y. Tsurui, "The Calculation of a Tip Contact Tapered Leaf Spring", ばね論文集, Vol. 19, pp 64-67, 1974.
4. SAE Manual, "Design and Application of Leaf Springs". SAE HS788, 1990.
5. M. Shimoseki, Y. Hayasaka, "Analysis of Leaf Springs by RBS Method", ばね論文集, Vol. 29, pp 12-18, 1984.
6. T. Hamano, M. Itoh, "Analysis of Leaf Spring using Finite Element Method with a Joint Element," ばね論文集, Vol. 37, pp 39-46, 1992.
7. "On the cross section of leaf spring", ばね論文集, Vol. 5, pp 67-70, 1959.
8. T. Aoyama, "The Calculation of tip contact tapered leaf spring", ばね論文集, Vol.19, pp. 64-67, 1974.
9. 이원희, "A study on optimal characteristies of tapered leaf spring", 서울대학교 석사논문, 1984.
10. 염영하 등, "Study and development on the taper leaf spring", 과학기술처, 1975.
11. N.S. Nigro, "Equivalent one-dimensional system for analysis of taper leaf spring", Engineering for Industry, 1976.
12. Manual on design and application of leaf spring, SAE, HS1788.
13. I. Takadera, "Oilhydraulically-controlled Taper Leaf Springs", 自動車技術, Vol. 38, No. 10, 1984.
14. Hirtreiter, A.B., "Principles and Application of Pneumatic Springs", SAE paper 730273.
15. Thomas, E.D., "Design and Validation of Variable rate Pneumatic Spring", SAE paper 800483.
16. Hulki, A., "Riding on air", SAE transactions, Vol. 67, pp 15-25.
17. "비대칭형 비선형 복원력특성이 있는 공기스프링의 강체 진동-변위가진의 경우", 日本精密工學會, Vol. 52, No. 9, pp 1567, 1986.
18. SAE Manual, "Incorporating Pneumatic Springs in Vehicle Suspension Designs", SAE HS1576.