

## 복합재료 적층판의 유한요소 해석을 위한 효율적 경계조건

김택현\*, 김인권\*\*

### Effective Boundary Conditions for FEM Analysis of Composite Laminates

Taek-Hyun Kim\*, In-Kweon Kim\*\*

#### Abstract

This paper presents three boundary techniques which are useful for FEM analysis of composite laminates: 1) a rotational symmetric boundary technique, 2) a quasi three-dimensional boundary technique and 3) a contact boundary technique.

The use of the rotational symmetric boundary technique is possible for a smaller FEM model. With the use of the quasi three-dimensional boundary technique, quasi three-dimensional analysis of composite laminates can be performed on the conventional 3-D FEM program. These techniques can readily be adopted to FEM programs.

Keywords : Composite Laminate(복합재 적층판), FEM Analysis(유한요소해석), Boundary Condition(경계조건)

## 1. 서 론

일반적으로 유한요소법(Finite Element Method : FEM)에 이용되고 있는 경계조건에는 크게 나누어서 응력 경계조건과 변위 경계조건이 있다. 여기서 말하는 응력 경계조건은 해석영역의 경계에서의 응력분포를 이미 알고 있으면서, 이 응력분포의 값이 영인 경우를 자연 응력 경계조건이라 하고, 영(zero)이 아닌 경우를 강제 응력 경계조건이라 한다. 또 변위 경계조건은 해석영역의 경계에서의 변위분포를 이미 알고 있으면서, 이 변위 분포가 영

인 경우를 구속 변위 경계조건이라 하고, 영이 아닌 경우를 강제변위 경계조건이라 한다.<sup>(1), (2)</sup>

그러나 실제로 경계조건을 이용해서 유한요소 해석을 하는 경우, 경계조건은 다른 의미로서 중요하다. 예를 들면 해석하는 문제에 대칭성이 있는 경우에는 적절한 경계조건을 주어 실제로 계산하는 문제의 해석영역을 대폭적으로 축소할 수 있기 때문에 유한요소법을 적절하게 사용하기 위해서는 경계조건에 대한 올바른 인식이 필요하다. 일반적인 복합재료 적층판의 유한요소 해석 프로그램에서는 변위 고정 경계조건이 사용되고 있다.<sup>(3), (4)</sup> 그러나 복

\* 조선대학교 기계공학부

\*\* 조선대학교 기계설계공학과

합재료 적층판을 유한요소로 해석하는 경우, 일반적인 경계조건만으로는 사실상 한계성이 있으므로 혼합 경계조건을 고려해야만 한다.<sup>(5)</sup>

따라서 본 연구에서는 복합재료 적층판의 유한요소 해석에 있어서 회전대칭 경계조건을 이용한 해석, 준3차원 경계조건을 이용한 해석 및 접촉 경계조건을 이용한 해석을 통해서 그 유효성을 고찰하려고 한다.

## 2. 기본이론

일반적으로 혼합 경계조건은 응력 경계조건과 변위 경계조건에 비해 많이 사용되지 않는다. 왜냐하면 이 혼합 경계조건을 이용하는 경계에서 응력과 변형률의 분포는 미지수이고, 알 필요가 없기 때문에 응력 및 변위 경계조건과는 크게 다르다. 이 경계조건은 경계에서 응력과 변위에 대한 어떠한 구속조건이 성립하는 경우에만 이용할 수 있다. 구체적으로 다음 3가지 혼합 경계조건을 이용해서 3차원 유한요소해석을 행하기로 한다.

- ① 회전대칭인 문제의 해석 : 회전대칭 경계조건(rotational symmetric boundary condition)
- ② 3차원 유한요소법을 이용한 준3차원 문제의 해석 : 준3차원 경계조건(quasi-three-dimensional boundary condition)
- ③ 층간박리부에 있어서 접촉을 고려한 해석 : 접촉 경계조건(contact boundary condition)

이들 경계조건을 이용한 유한요소 해석을 3, 4, 5절에서 몇 가지 모델에 적용하기로 한다.

## 3. 회전대칭을 이용한 해석

복합재료는 이방성이므로 유한요소법을 이용하여 복합재료 적층판을 해석하는 경우에는 대칭성을 이용하여 해석영역을 축소하는 범위는 한정되어 진다. Fig. 1(a)는 off-axis재가 일축 인장하중을 받는 3차원 문제를 그린 것이다. 유한요소 해석에서는 문제의 대칭성을 활용하여 해석영역을 축소하는 방법이 일반적으로 사용되므로, 이 문제는 재료의 형상과 하중조건으로 보아 xz 평면, yz 평면에 대해서 면대칭이지만 역학적 특성은 어느 평면에 대해서도 면대칭이 아니다. 이것은 일방향 강화재가 이방성을 가지고 있기 때문이고, 섬유의 방향이 면대칭이지 않기 때-

문에 일반적인 유한요소 프로그램에서 전체에 대하여 계산하지 않으면 해를 얻을 수 없다.

그러나, 이 경우 z 축둘레로 180° 회전시키면 완전히 똑같은 문제가 된다. 이와 같은 경우를 회전대칭 문제라고 부른다. 이 회전 대칭성을 활용하면 해석영역을 절반으로 줄일 수 있다.

먼저 Fig. 1(a)의 1/2 영역을 Fig. 1(b)에 나타낸 것처럼 zx 평면상의 절점이 회전 대칭인 위치가 되도록 요소분할을 한다. 이 문제를 유한요소법으로 해석하려면 다음식을 사용하면 된다.

$$\{P\} = \{F\} + \{R\} = [K]\{\delta\} \quad (1)$$

여기서,  $\{P\}$ 는 절점 하중벡터,  $\{F\}$ 는 외력 하중벡터,  $\{R\}$ 은 반력 하중벡터,  $[K]$ 는 전체의 강성 메트릭스,  $\{\delta\}$ 는 절점 변위벡터이다.  $\{F\}$ 는 주어진 값이지만, zx 평면상의 절점에서의  $\{R\}$  값은 미지수이다. 그러므로 이대로는 연립방정식을 풀 수 없다. Fig. 1(b)에 대응하는 절점, 예를 들면 절점A와 절점B사이에서 다음과 같은 회전대칭 경계조건이 성립한다.

$$\begin{cases} \delta_{Bx} = -\delta_{Ax} \\ \delta_{By} = -\delta_{Ay} \\ \delta_{Bz} = +\delta_{Az} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \gamma_{Bx} = +\gamma_{Ax} \\ \gamma_{By} = +\gamma_{Ay} \\ \gamma_{Bz} = -\gamma_{Az} \end{cases} \quad (3)$$

여기서,  $\delta_{Ax}$ 는 절점 A의 x축 방향 변위성분,  $\gamma_{Ax}$ 는 절점 A의 x축 방향 반력성분을 나타낸다.

이 회전대칭 경계조건은 절점B가 절점A에 종속하고 있음을 의미한다.

따라서 절점A를 독립절점, 절점B를 종속절점이라고 부른다. zx 평면상의 다른 절점도 같은 방법으로 독립절점과 종속절점으로 나눈다. Fig. 1(b)에서 독립절점은 “●”, 종속절점은 “○”로 나타내었다.

이와 같이 경계조건을 이용하여 절점A, B의 x축방향 성분에 대하여 다음과 같은 순서로 식(1)을 변형한다.

① 식(2)를 이용하여, 절점B의 x축 방향성분에 대응하는  $[K]$ 의 열을, 절점A의 x축 방향 성분에 대응하는  $[K]$ 의 열에서 뺀다.

② 절점B의 x축 방향 성분에 대응하는  $\{F\}$ ,  $\{R\}$ ,  $[K]$ 의 행을, 각각 절점A의 x축 방향 성분에 대응하는  $[K]$ 의 행에서 뺀다. 그러면 식(3)의 관계로부터  $\gamma$

$\alpha_x$ 와  $\gamma_{Bx}$ 가 소거된다.

③ 절점B의 x축 방향 성분에 대응하는  $[K]$ 의 열과  $\{F\}$ ,  $\{R\}$ ,  $[K]$ ,  $\{\delta\}$ 의 행을 소거한다. 즉, 식(1)을 다음과 같이 변형한 후 절점B의 x축 방향 성분을 소거한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cdot \\ f_i - f_d \\ \cdot \\ f_d \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \gamma_i - \gamma_d \\ \cdot \\ \gamma_d \\ \cdot \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cdot \\ f_i - f_d \\ \cdot \\ f_d \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \gamma_d \\ \cdot \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{ii} - k_{id} - k_{di} + k_{dd} & \cdot \\ \cdot & k_{di} - k_{dd} & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{dd} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \delta_i \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

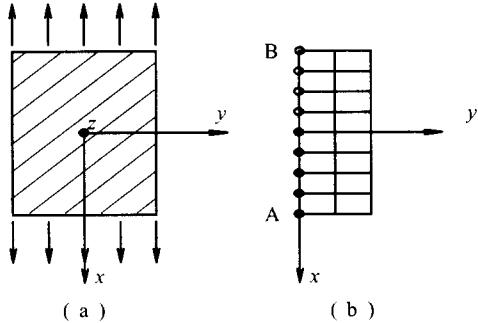


Fig. 1 Modeling of rotational symmetry problem.  
(a) Off-axis materials under axial extension.  
(b) 1/2 model of a rotational symmetric boundary condition

여기서,  $f$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $\delta$ 의 첨자  $i$ 는 절점 A의 x축 방향 성분에 대응하는 행 또는 열을 나타내고, 첨자  $d$ 는 절점 B의 x축 방향 성분에 대응하는 행 또는 열을 나타낸다. 이와 같은 방법으로 모든 종속 절점의 자유도를 제거한다.  $\{R\}$ 의 성분이 전부 소거되면 결과식은 풀어진다.

Fig. 1(a)와 같은 모델을 유한요소법으로 해석한 결과를 Fig. 2에 나타 냈다. Fig. 2(a)는 1/1모델이고, (b)는 부적절한 대칭 경계조건을 고려한 1/2모델이며, (c)는 회전 대칭 경계 조건을 이용한 1/2모델이다. 그러므로 Fig. 2(b)의 모델에서는 올바른 해가 얻어지지 않았고, Fig. 2(c)의 해석결과는 Fig. 2(a)의 해석결과와 비교해 계산시간과 계산용량을 절반 정도로 줄일 수 있었다.

또한 이 방법은 등방성 재료의 회전대칭 문제에도 적용할 수 있다.

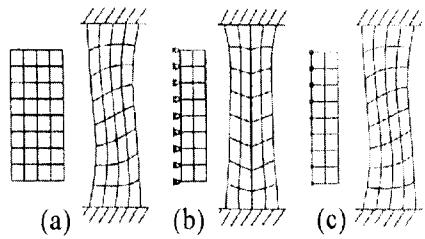


Fig. 2 Analysis result by each model.  
(a) 1/1 model.  
(b) 1/2 model to have mistaken.  
(c) Appropriate 1/2 model

#### 4. 준3차원 해석

복합재료 적층판의 자유단 거동을 알기 위해 준3차원 해석을 행하는 경우가 많다.<sup>(6)</sup> 준3차원 유한요소법은 까다로운 수식을 필요로 하기 때문에 그다지 보급되어 있지 않다. 이 때문에 준3차원 유한요소법을 사용하지 않는 준3차원 해석을 Whitcomb 등<sup>(7)</sup>이 행하였으나, 그들의 방법은 Fig. 3에 나타낸 바와 같이 충분하게 긴 시험편이 인장하중을 받는 경우로서 전단 변형율의 하나의 성분을 영으로 가정하고 있기 때문에 일반적인 적층판의 해석에는 적용할 수 없다. 그러면 3차원 유한요소법을 이용한 준3차원 해석을 행하는 방법을 논하기로 한다.

Fig. 4(a)와 같이 무한하게 긴 시험편이 x축 방향으로 일정한 신장 변형률  $\varepsilon_0$ 를 받는 경우, 준3차원 문제로 생각해도 무방하다. 우선 이 문제를 준3차원으로 해석하기 위해서는 사선부를 Fig. 4(b)와 같이 유한요소로 모델링 해야 한다.

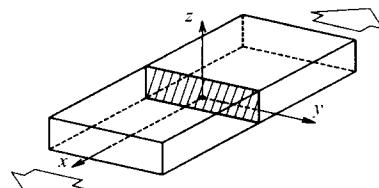


Fig. 3 Quasi-three dimensional problem

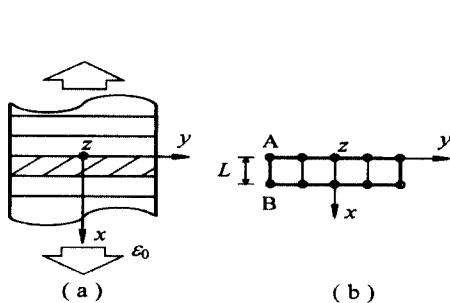


Fig. 4 Modeling of quasi-three dimensional problem. (a) Quasi-three dimensional problem. (b) FEM model of a quasi-three dimensional boundary condition

그러나 이 경우는  $x$ 축 방향 단면에 작용하는 반력  $\{R\}$ 이 미지수이므로 이대로는 식(1)을 풀 수 없다. 그러나 이 문제는 준3차원 문제이므로 대응하는 절점, 예를 들면 절점A와 절점B에 대해 다음의 준3차원 경계조건이 성립한다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{Bx} = +\delta_{Ax} + \varepsilon_0 \times L \\ \delta_{By} = +\delta_{Ay} \\ \delta_{Bz} = +\delta_{Az} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{Bx} = -\gamma_{Ax} \\ \gamma_{By} = -\gamma_{Ay} \\ \gamma_{Bz} = -\gamma_{Az} \end{array} \right. \quad (6)$$

여기서,  $\delta_{Ax}$ 는 절점A의  $x$ 축 방향 변위성분,  $\gamma_{Ax}$ 는 절점A의  $x$ 축 방향 반력성분,  $L\varepsilon_0$ 는  $x$ 축 방향의 일정 신장변형률,  $L$ 은 요소의  $x$ 축 방향 길이이다.

이 경계조건은 회전대칭 경계조건과 마찬가지로 절점B가 절점A에 종속하고 있음을 의미한다. 다음으로 준3차원 경계조건을 이용하여 식(1)을 변형한다. 예를 들면 절점AB의  $x$ 축 방향 성분에 대해서 다음의 순서로 식(1)을 변형한다. 처음에 식(5)의  $\varepsilon_0 \times L$ 을 상대변위로 생각하여  $\{F\}$ 에서  $\{K\}$ 의 절점B의  $x$ 축 방향 성분에 대응하는 열에  $\varepsilon_0 \times L$ 을 곱한 것을 뺀다.

다음은 3절의 회전대칭 경계조건에서 행한 것과 같이 식(5), (6)의 부호에 주의하여 식(1)의 행과 열을 변형한 후 소거하면 된다. 즉, 식(1)을 다음과 같이 변형하여, 절점B의  $x$ 축 방향 성분을 제거한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_i \\ f_d \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} & - \varepsilon_0 \times L \begin{pmatrix} k_{id} + k_{dd} \\ \vdots \\ k_{dd} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \gamma_d \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{ii} + k_{id} + k_{di} + k_{dd} & \cdot & k_{id} + k_{dd} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{di} + k_{dd} & \cdot & k_{dd} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta}_i \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

이 경계조건을  $x$ 축 단면 전부의 절점에 대하여 식(1)에 적용하면, 최종적으로  $\{R\}$ 의 성분이 모두 소거된 연립방정식이 얻어진다. 이 연립방정식을 풀면 준3차원 해석을 행할 수 있다.

## 5. 박리부의 접촉을 고려한 해석

실제로 복합재료 적층판이 자유단에서 층간박리 현상이 생기는 경우가 많다. 그러므로 유한요소해석에 의하여 층간 박리문제를 시뮬레이션하는 것은 매우 중요하다. 또 층간의 접촉에 의하여 박리현상이 일어날 가능성도 많으므로 이러한 접촉에 대처하기 위하여 접촉 경계조건을 사용하여 해석하는 것은 중요한 일이다..

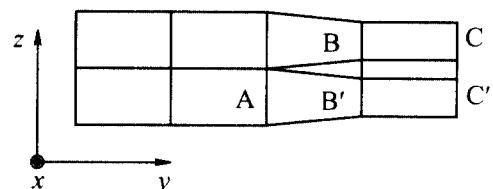


Fig. 5 Sinking of the delamination part

준3차원 유한요소법에 근거한 준3차원 해석에서는 Fig. 5에 나타낸 것처럼 절점을 2중화하는 것으로 층간 박리문제를 시뮬레이션하였다. 그러나 이 방법을 이용하면 층간 박리면에서 시험편이 서로 눌려 박힐 가능성이 있다.

예를 들면 절점을 2중화하면 Fig. 6처럼 층간 박리 균열의 선단면에서 눌려 박히게 된다. 실제의 시험편에서는 이와 같은 현상은 있을 수 없으므로 이 눌려 박힌 부분의 접촉에 대해서 무엇인가의 고려가 필요하게 된다.

이 접촉문제는 2중화한 2개의 절점에서 층간박리와 수

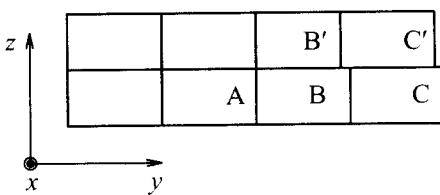


Fig. 6 Contact boundary condition

직방향의 변위의 자유도를 구속하는 것으로 간단하게 해결할 수 있다. 이 방법을 Fig. 7에 나타냈다. 접촉하지 않는 부분에서는 2중화한 2개의 절점에 각각  $x$ ,  $y$ ,  $z$  축 방향의 절점변위의 자유도가 있지만, 눌려 박힘에 의해 접촉이 일어난 절점에서는  $z$  축 방향의 절점변위가 같도록 절점 자유도에 구속을 하면 된다. 즉, 절점B에서는 식(8)과 같이 절점변위를 구속한다.

$$u_B = u_{B'}, \quad v_B = v_{B'}, \quad w_B \neq w_{B'} \quad (8)$$

또, 접촉부의 상면과 하면에서는 층간 박리와 수직방향의 응력은 같다. 따라서 층간 박리면에서 마찰 효과를 무시하면 응력 조건으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{zB} &= \sigma_{zB'} = \text{unknown}, \\ \tau_{yzB} &= \tau_{yzB'} = 0, \quad \tau_{zxB} = \tau_{zxB'} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식(8)과 식(9)를 고려한 것이 접촉 경계조건이다. 요소분할에 대하여 변형량이 큰 경우에는 서로 엇갈리는 변형에 의해 절점B와 절점B'가 대응하지 않게 되므로 이 수법은 문제가 있지만, 본 연구에서 다루는 해석과 같은 요소 분할에 비해 변형량이 적은 경우, 이 방법은 타당하다고 생각한다.

다음은 접촉 경계조건을 유한요소법에 도입하는 방법에 대하여 논하기로 한다. 예로서 Fig. 6과 같은 문제를 생각한다. 이 문제를 유한 요소법으로 해석하기 위해서 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\{P\} + \{R\} = [K]\{d\} \quad (10)$$

여기서,  $\{P\}$ 는 강재외력에 의한 외부하중 벡터이며, 이미 알고 있는 값이다. 이에 반해  $\{R\}$ 은 내력에 의한 내부하중 벡터이다. 이 성분의 값은 영에 가깝지만 접촉면에서는 영이 아닌 미지수이다. 따라서 이대로는 이 연립방정식을 풀 수 없다. 여기서 접촉면의 응력에 대해서는 식(9)

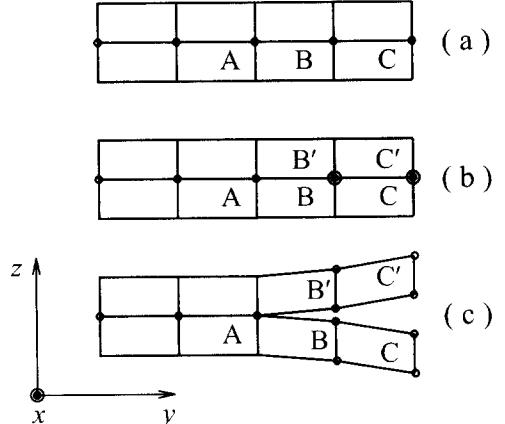


Fig. 7 Imitation way of delamination.

- (a) Normal mesh
- (b) Delaminated mesh
- (c) Deformation of delaminated mesh

의 조건이 성립한다. 유한요소법에서의 응력은 절점하중과 등가이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\gamma_{zB} = -\gamma_{zB'} \quad (11)$$

$v$ ,  $z$  축 방향의 절점력은 자연 경계조건으로부터 음(-)의 값이고, 유한요소법에 도입된다. 또 변위에 대해서는 식(8)의 조건으로부터 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$w_B = w_{B'} \quad (12)$$

이들의 관계식을 유한요소법에 도입하는 데는 우선 강성메트릭스( $K$ )의 절점B'에 대응하는 열을 절점B에 대응하는 열에 더한다. 다음에  $\{P\}$ ,  $\{R\}$ ,  $[K]$ 의 절점B'에 대응하는 행을 절점B에 대응하는 행에 대해 주면 된다. 예를들면  $x$  축 방향의 자유도에 대해서 다음과 같이 변형 할 수 있다.

$$\{P\} + \{R\} = [K]\{d\}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ P_{zB} \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{zB'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \gamma_{zB} \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{zB'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{AA} & K_{AB} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{BA} & K_{BB} & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ w_B \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{B'} \end{pmatrix}$$

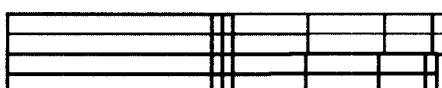
$$\begin{pmatrix} P_{zB} + P_{zB'} \\ \vdots \\ P_{zB'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{zB} + \gamma_{zB'} \\ \vdots \\ \gamma_{zB'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & K_{AA} + K_{AB} + K_{BA} + K_{BB} & \cdot & K_{AB} + K_{BA} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_{BA} + K_{BB} & \cdot & K_{BB} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_B \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

동일한 방법으로 접촉하고 있는 전체의 절점( $x, y, z$ )에 대하여 강성 메트릭스의 재배열을 행한다. 이와 같이 하면 미지수인  $\{R\}$ 의 성분이 소거되므로 절점  $B'$ ,  $C'$ 에 대응하는 행과 열이 소거되어 연립방정식을 풀 수 있다.

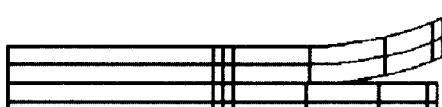
이와 같은 방법을 이용하여 해석한 결과를 Fig. 8에 나타냈다. (a)는 층간 박리면의 접촉을 전혀 고려하지 않고 행한 해석결과이다. 이 층간 박리면 전체면에 접촉 경계조건을 고려해서 해석한 결과가 (b)이다. (a)와 (b)를 비교하면 (a)에서는 놀려 박힌 부분이 (b)에서는 놀려 박혀 있지 않고 있지만, 그 반면 (a)에서는 떨어져 있던 부분까지 (b)에서는 접촉하고 있다. 실제로는 층간 박리의 선단 근방에서는 접촉하고, 어느 정도 박리가 떨어지면 박리면이 접촉하지 않고 떨어짐을 알 수 있다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 Result of analysis

그러므로, 이 방법을 이용하여 접촉문제를 풀기 위해서는 반복계산을 행할 필요가 있다. 구체적으로는 박리 표면에서는 수직응력이 양(+)의 값이 되지 않는 조건을 평가함수로 채택해서 어느 절점을 접촉시키고, 어느 절점을 떨어지게 할 것인가에 대해서 평가함수를 극소로 하는 반복계산을 하면 된다. 이 방법으로 해석한 결과를 (c)에 나타냈다. 층간박리의 선단에서는 접촉이 일어나고, 층간 박리 선단으로부터 어느 정도 떨어지면 층간 박리면이 벌어 진다고 하는 자연스런 결과를 얻을 수 있다. 따라서 이 방법은 유효하다고 말할 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 복합재료 적층판의 유한요소 해석에 있어서 유용한 3가지 경계조건을 이용하는 방법을 몇 개의 모델에 적용함으로써 그 유용성을 입증할 수 있었다.

- (1) 회전 대칭 경계조건을 유한요소 프로그램에 도입하면, 보다 작은 FEM모델로 문제를 해석할 수 있으므로, 계산에 필요한 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있다.
- (2) 준3차원 경계조건을 3차원 유한요소 프로그램에 도입하면, 준3차원 유한요소법을 이용하지 않고 준3차원 해석을 행할 수 있다.
- (3) 복합재료 적층판의 자유단 층간박리의 선단에서는 접촉이 일어나고, 층간 박리 선단에서 어느 정도 떨어지면 층간 박리면이 벌어 진다고 하는 자연스러운 결과를 접촉 경계조건을 도입함으로써 얻어낼 수 있었다.

이들의 방법을 기존의 유한요소 프로그램에 도입하면 연립방정식을 다시 짜서 루틴을 추가하는 것만으로도 해석이 가능하다.

## 참 고 문 헌

1. 山田善之 外 4人, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, pp.353-358.
2. 山田善之 外 4人, 有限要素法ハンドブック II 應用編, 培風館, pp.396-421.
3. Pipes, R. B. and Pagano, N. J., "The Influence

- of Stacking Sequence on Laminate Strength". J. of Compos. Mater., Vol.5, pp.50-57, 1971.
4. Rybicki, E. F., Schmueser, D. W. and Fox, J., "An Energy Release Rate Approach for Stable Crack Growth in the Free-Edge Delamination Problem", J. of Compos. Mater., Vol.11, pp.470 - 487, 1977.
5. 金仁權, 擬似等方性複合材料積層板の疲労損傷に及ぼす荷重方向変化の影響に関する研究, 九州大學博士學位論文, 1997.
6. Pipes, R. B. and Pagano, N. J., "Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension", J. Compos. Mater., 4, pp. 538-548, 1970.
7. Whitcomb, J. D. and Raju, I. S., "Superposition Method for Analysis of Free-Edge Stresses", J. Compos. Mater., 17, pp. 492-507, 1983.