

# GPS 위치결정 오차의 평가척도 사이의 관계

## Relationships Between the Measures of GPS Positioning Error

박 찬 식, 김 일 선, 이 장 규, 지 규 인

(Chansik Park, Ilsun Kim, Jang Gyu Lee, Gyu-In Jee)

**Abstract** : In GPS (Global Positioning System) positioning, various measures can be used to select satellites or to evaluate the positioning results. Among these, GDOP (Geometric Dilution of Precision) and RGDP (Relative GDOP) are the most frequently used. Although these measures are frequently used, the relationship between them is not clearly known. Moreover, the condition number is used as a traditional measure of numerical stability in solving linear equations. Sometimes, the volume of a tetrahedon made by the line of sight vector is used for simplicity. All of these measures share some common properties as well as differences. The relationships between these measures are analyzed in this paper.

**Keywords** : GPS, GDOP, RGDP, condition number, volume of tetrahedron

### I. 서론

GPS(Global Positioning System)을 이용하여 구해진 위치는 의사거리(pseudorange) 측정오차뿐 아니라 관측되는 위성의 배치에도 영향을 받는다. 일반적으로 GPS를 이용한 위치결정에서는 GDOP(Geometric Dilution of Precision)을 의사거리 측정오차와 위성의 배치가 구해진 위치의 정확도에 미치는 영향을 나타내는 척도로 사용한다. GDOP는 단위오차를 가정한 선형화된 의사거리 측정식을 최소자승법을 이용하여 사용자의 위치와 수신기 시계 오차를 추정할 때 나타나는 공분산으로 정의되며 GDOP가 작으면 위치측정 오차가 감소하므로 GDOP를 위치 정확도의 판단 기준으로 사용한다.

또한 수신기의 채널이 보이는 위성의 수보다 적은 경우, 좀 더 나은 위치를 구하기 위해서 GDOP을 이용하여 위성을 선택할 수도 있다. 그러나 이 경우 모든 위성의 조합에 대하여 GDOP을 계산하는데는 많은 계산량이 필요하다. 계산량의 감소를 위하여, 4개의 위성으로 위치를 구하는 경우에는 각 위성까지의 시선벡터가 이루는 4면체의 체적이 GDOP 대신 이용되기도 한다. 이는 이 4면체의 체적이 GDOP와 반비례한다고 알려져 있기 때문이다[1]. 그러나 이 두가지 사이의 정확한 관계식은 아직까지 알려지지 않았다.

정방행렬의 조건계수(condition number)는 이 행렬을 시스템 행렬로 하는 선형 방정식의 해를 구할 때의 수치적 안정도를 판별하는 기준이 된다. 즉 선형방정식의 민감도를 정의한다. 조건계수가 큰, 불량조건(ill-conditioned) 행렬이 시스템 행렬인 경우 아주 작은 계산상의 수치적 오차가 해를 구함에 있어서 매우 큰 오차로 나타난다. GPS의 측정방정식이 선형 방정식을 이루므로 조건계수도 위치오차를 나타내는 척도로 사용될 수 있다.

위의 세가지 척도들은 모두 한 대의 GPS 수신기를 이용하여 절대위치를 구하는 응용에서 사용되는 척도이다. 두 대 이상의 수신기를 사용하면서, 이중 한 대를 정확히

알고 있는 위치에 설치하면, 수신기간의 공통오차를 효과적으로 상쇄할 수 있어 정밀한 위치를 구할 수 있다. 이렇게 알려진 기준 위치에 대하여 상대적인 위치를 구하는 방법을 상대위치 결정법이라고 분류한다[2]. 상대위치 결정 방법에 의하여 구해진 위치도 측정 오차와 위성 배치의 영향을 받으며, RGDP(Relative GDOP)가 구해진 위치의 오차를 나타내는 척도로 사용된다.

이상의 네가지 척도들은 각각 다른 기준에서 정의되었지만 공통적인 부분도 갖고있다. 그러나 이들 사이의 관계에 대해서는 아직 알려지지 않았다. 본 논문에서는 각각의 척도에 대한 상세한 분석과 이들 사이의 관계식을 유도한다.

### II. GPS를 이용한 위치결정

#### 1. 절대 위치결정

GPS는 기본적으로 임의의 위치에서 위성까지의 거리를 측정하는 시스템이다. 이를 위해, 위성은 발신 시각을 알 수 있는 신호를 송신하고 수신기는 이 신호를 내장 신호와 동기시켜 신호의 전달시간을 구함으로써 위성까지의 거리를 측정한다. 단순한 위치의 측정에 더해 수신기가 부착된 항체의 속력과 진행방향, 정확한 시각을 측정하고자 하는 것도 GPS의 기본 목적이다[2].

수신기가 측정한 위성까지의 거리는 신호의 전달시간에 빛의 속도를 곱함으로써 얻어진다. 이 과정에서 신호를 동기시키기 위하여 수신기와 위성에 내장된 시계가 사용되는데 이 두 시계의 정확도가 크게 차이가 나므로 수신기 시계의 오차를 포함한 값, 즉 의사거리(pseudorange)가 얻어진다. 결국 수신기 시계의 오차와 수신기의 위치표범이 변수가 된다. 이들 4개의 변수를 구하기 위해서는 최소 4개의 위성까지의 의사거리가 필요하다. 수신기 A에서 위 i에 대한 의사거리의 측정치는 다음의 (1)로 나타낸다.

$$\Psi_A^i = r_A^i + cB_A + I^i + T^i + M^i + S^i + w_A^i \quad (1)$$

여기서  $\Psi_A^i$ 는 위성 i까지의 의사거리,  $r_A^i$ 는 위성 i까지의 실제거리,  $B_A$ 는 수신기 시계 바이어스,  $I^i$ 는 전리층 지연,  $T^i$ 는 대류권 지연,  $M^i$ 은 다중경로 오차,  $S^i$ 는 selective availability,  $w_A^i$ 는 수신기 측정잡음, c는 빛의 속도를 나타낸다. 의사거리 측정치에는 수신기잡음, 신호

접수일자 : 1997. 4. 9., 수정완료 : 1998. 3. 6.

박찬식 : 충북대학교 전기전자공학부

김일선 : 삼성전자 멀티미디어 연구소

이장규 : 서울대학교 전기전자공학부

지규인 : 건국대학교 전자공학부

전달과정에서의 지연에 의한 오차 및 정확성을 떨어뜨리기 위한 고의적인 오차 (SA: Selective Availability) 등 여러가지 오차가 포함되어있다. 이 중 가장 영향이 큰 것은 SA로서 이로인해 의사거리를 사용하여 위치를 구하면 약 100m (2dRMS)의 위치오차가 발생한다. 신호 전달과정에서 발생하는 오차는 대류권 통과 및 전리층 통과에 의한 지연, 다중경로에 의한 오차 등이다. 이 오차들은 수신기와 위성간의 배치상태에 따라 그 영향이 달라진다. 일반적으로 양각이 낮은 위성일 수록 전달과정에서의 오차가 커진다고 볼 수 있다. 전리층 통과 지연에 의한 오차를 보상하는데는 Klobuchar가 제안한 모델을 이용한다 [3]. 이를 위해 모델에서 사용될 계수의 값이 위성으로부터의 항법신호에 포함되어있다. 대류권 지연에 의한 오차의 보상은 일부의 수신기에만 채용되어 있으며 Hopfield 모델을 이용한다[4][5]. 이런 모델들을 이용함으로써 오차를 많이 줄일 수 있지만 아직도 상당한 크기의 오차가 남고 이 오차가 수신기와 위성간의 배치상태에 따라 위치 정확도에 영향을 주게된다. 의사거리 측정 방정식을 선형화 기준점(A0)에서 선형화하면 (2)와 같이 표현된다. 여기서

$r_{A0}^i$ 는 선형화 기준점에서 위성  $i$  까지의 거리의 계산값,  $g_{A0}^i = [g_{A0x}^i \ g_{A0y}^i \ g_{A0z}^i]^T$ 는 선형화 기준점에서 위성  $i$  로의 단위 시선벡터,  $\delta x$ 는 선형화 기준점에서 사용자로의 방향벡터,  $v_A^i = I^i + T^i + M^i + S^i + w_A^i$  는 보상후의 측정오차를 나타낸다.

$$\delta \Psi_A^i \equiv \Psi_A^i - r_{A0}^i = g_{A0}^{iT} \delta x + cB_A + v_A^i \quad (2)$$

$n$  개의 위성의 경우 다음의 (3)과 같이 쓸 수 있으며, (4)의 행렬 형태로 표현할 수 있다. (4)에  $r = [1 \ \dots \ 1]^T$ , 즉 각 항이 1인 벡터로 정의한다

$$\begin{bmatrix} \delta \Psi_A^1 \\ \vdots \\ \delta \Psi_A^n \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} g_{A0}^{1T} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ g_{A0}^{nT} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ cB_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_A^1 \\ \vdots \\ v_A^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\delta \Psi = [G \ r] \begin{bmatrix} \delta x \\ cB_A \end{bmatrix} + v = H \delta u + v \quad (4)$$

4개 이상의 의사거리 측정식을 얻을 수 있다면 (4)를 이용하여 사용자의 3차원 위치와 수신기 시계 바이어스를 구할 수 있다.

2. 상대 위치결정

정확한 위치를 알고 있는 기준 안테나  $R$  에서 구하고자 하는 안테나  $A$ 의 상대위치는 주로 이중차분 기법을 이용하여 구한다. 수신기  $R, A$ 에서 위성  $i, j$ 에 대한 이중차분은 (5)로 정의된다. 여기서 두 수신기간의 거리가 멀지 않다면 공간적으로 공통인 오차인 전리층 지연, 대류권 지연 오차 및 SA가 제거되나, 다중경로 오차와 수신기의 측정잡음은 증폭됨을 알 수 있다. 또한 수신기의 시계바이어스도 상쇄된다. 일반적으로 이중차분은 반송파 위상을 이용하여 구해진 의사거리 측정치에 대하여 적용되며, 이때 반송파 위상에 포함된 다중경로 오차와 수신기의 측정잡음은 그 크기가 작아 무시할 수 있다 [2]. 미지정수가 결정된 반송파 위상의 측정치는 코드를 이용하여 구한 의사거리 측정치와 같은 방법으로 처리할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 코드를 이용한 의사거리 측정치에 대해서만 나타내었다.

$$\Psi_{RA}^{ij} \equiv (\Psi_A^i - \Psi_A^j) - (\Psi_R^i - \Psi_R^j) = r_{RA}^{ij} + M_{RA}^{ij} + w_{RA}^{ij} \quad (5)$$

기준 안테나  $R$  의 위치는 정확히 알고 있으므로  $R$  과 임의의 선형화 기준점  $A0$ 에서 (5)를 선형화하면 다음의 (6)이 된다. 여기서  $(\cdot)_{RA}^{ij} \equiv ((\cdot)_A^i - (\cdot)_A^j) - ((\cdot)_R^i - (\cdot)_R^j)$ 는 이중차분 연산자를 나타내며,  $g_{A0}^{ij} = g_{A0}^i - g_{A0}^j$  는 위성간 차분된 시선각 벡터를 나타낸다.

$$\delta \Psi_{RA}^{ij} \equiv \Psi_{RA}^{ij} - r_{RA0}^{ij} = g_{A0}^{ijT} \delta x + \varepsilon_{RA}^{ij} \quad (6)$$

$n$  개의 위성에 대하여  $(n - 1)$ 개의 이중차분된 측정치를 얻을 수 있으며 (7)로 나타낸다. (7)은 다시 (8)의 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \delta \Psi_{RA}^{12} \\ \vdots \\ \delta \Psi_{RA}^{(n-1)n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{A0}^{12} \\ \vdots \\ g_{A0}^{(n-1)n} \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \varepsilon_{RA}^{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{RA}^{(n-1)n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\delta \Psi_D = G_D \delta x + \varepsilon_D \quad (8)$$

따라서 4개 이상의 의사거리 측정식을 얻을 수 있다면 (8)을 이용하여 사용자의 3차원 위치를 구할 수 있다.

III. GDOP과 RGDOPE의 관계

1. GDOP의 정의 및 특성

(4)에서 측정오차  $v$  를 평균이 0이고 공분산이  $\sigma^2 I$  인 가우시안 잡음으로 가정하고, 최소자승법을 적용하면 (9)로 수신기의 위치와 수신기 시계바이어스를 추정할 수 있다. 이 때 추정치의 공분산은 (10)이 된다.

$$\hat{\delta u} = (H^T H)^{-1} H^T \delta \Psi \quad (9)$$

$$\begin{aligned} cov(\hat{\delta u}) &= (H^T H)^{-1} H^T cov(\delta \Psi) H (H^T H)^{-1} \\ &= \sigma^2 (H^T H)^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

(10)으로부터 GDOP는 다음과 같이 정의된다.

$$GDOP = \sqrt{trace(H^T H)^{-1}} \quad (11)$$

즉 GDOP는 의사거리 측정오차가 위치오차로 증폭되는 정도를 나타내며 사용자가 바라보는 위성의 기하학적인 배치에 의하여 그 값이 결정된다. GDOP은 사용하는 좌표계에 무관하며 다시 (12)로 나타낼 수 있다[1]. (12)에서  $\sigma_E, \sigma_N, \sigma_U, \sigma_{CB}$  는 각각 동서방향의 오차, 남북방향의 오차, 고도오차 및 수신기 시계바이어스의 표준편차를 나타낸다. 여기서 위치와 관련된 항만을 모아 PDOP, 평면은 HDOP, 고도는 VDOP, 시간에 대해서는 TDOP로 정의할 수 있다.

$$\begin{cases} GDOP = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2 + \sigma_{CB}^2} \\ PDOP = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + \sigma_U^2} \\ HDOP = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_N^2} \\ VDOP = \sigma_U \\ TDOP = \sigma_{CB} \end{cases} \quad (12)$$

DOP와 함께 구해진 위치 해의 정확도를 나타내는 척도로서 자주 사용되는 것이 2dRMS이다. 2dRMS는 확률적인 개념으로써 수평면에서 구해진 위치 해의 95%가 포함되는 반경을 가리킨다[6]. 특히 실제 위치 결정에서 수평면상의 정확도가 실용적이므로 구해진 위치 해의 정확도의 척도로 사용하기에 알맞다. 이러한 이유로 인해서 대부분의 수신기의 성능을 평가하는 지표로서 2dRMS가 사용되고 있다. HDOP가 주어졌을 때 수평면에서의 위치 오차 2dRMS(95%)는 다음과 같이 정의된다.

$$2dRMS = 2 \cdot HDOP \cdot \sigma \quad (13)$$

위치오차는 의사거리 측정오차에 GDOP가 곱해진 형태가 되므로 GDOP의 최소값은 중요한 의미를 가진다.

Fang은 4개의 위성을 이용할 경우의 GDOP의 최소값이 가 될을 고유값을 이용한 접근법으로 처음으로 보였다 [7]. Fang의 내용을 위성의 갯수가 4개 이상인 경우로 확장하면 다음과 같다. 우선 주어진 측정행렬  $H$  에 대해서 다음 (14)를 정의한다.

$$\Sigma \equiv H^T H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n g_{x_i}^2 & \sum_{i=1}^n g_{x_i} g_{y_i} & \sum_{i=1}^n g_{x_i} g_{z_i} & \sum_{i=1}^n g_{x_i} \\ \sum_{i=1}^n g_{x_i} g_{y_i} & \sum_{i=1}^n g_{y_i}^2 & \sum_{i=1}^n g_{y_i} g_{z_i} & \sum_{i=1}^n g_{y_i} \\ \sum_{i=1}^n g_{x_i} g_{z_i} & \sum_{i=1}^n g_{y_i} g_{z_i} & \sum_{i=1}^n g_{z_i}^2 & \sum_{i=1}^n g_{z_i} \\ \sum_{i=1}^n g_{x_i} & \sum_{i=1}^n g_{y_i} & \sum_{i=1}^n g_{z_i} & n \end{bmatrix} \quad (14)$$

이 때 시선벡터는 단위벡터이므로 다음의 (15)이 성립한다. 여기서  $\lambda_i$ 는 행렬  $\Sigma$ 의 고유값을 나타낸다.

$$\text{trace}(\Sigma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2n \quad (15)$$

행렬  $\Sigma$ 는 대칭이고 양의 한정이므로 (16)의 부등식의 관계가 성립한다.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \quad (16)$$

GDOP는 의 고유값을 이용하여 (17)과 같이 정의할 수 있다.

$$GDOP^2 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} \quad (17)$$

최대 고유값의 정의로부터 (18)의 결과를 얻는다.

$$\lambda_4 = \max_{\|x\|=1} x^T \Sigma x \geq [0 \ 0 \ 0 \ 1] \Sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = n \quad (18)$$

(15)와 (18)의 관계로부터 최소 고유값은 (19)를 만족해야 함을 알 수 있다.

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{3} \quad (19)$$

따라서 GDOP와 최대 고유치 사이의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$GDOP \geq \min \sqrt{\frac{1}{\lambda_4} + \frac{9}{2n - \lambda_4}} \quad (20)$$

위 식에서 4개의 위성이 있을 경우의 최소의 GDOP값은  $\lambda_4=4$  일 때 나타나며 값은  $\sqrt{2.5}$ 가 됨을 알 수 있다. 이 경우는 기하학적으로 볼 때 4개의 위성이 정4면체의 꼭지점에 위치했을 때 이다.  $n$ 개의 위성이 있는 경우로 위의 식을 확장하면  $\lambda_4=n$  일 때 GDOP의 최소값이 나타나고 그 값은 (21)과 같이 얻어진다.

$$\min GDOP = \frac{\sqrt{10}}{n} \quad (21)$$

그러나 실제 상황에서는 위와 같은 GDOP의 이론적 최소값은 발생하지 않는다. 이는 이론적 최소값의 GDOP를 갖는 위성의 배치는 위성 일부가 지평선 아래에 위치해야 하기 때문이다. 지구에 의해서 위성이 보이지 않게 되는 효과를 고려하면 4개의 위성의 경우에는 GDOP의 최소값이  $\sqrt{3}$ 이 되고 이 값은 위성의 궤도에 제한을 두지 않고 구한 결과보다 크다[8]. 이 경우에 3개의 위성은 지평선 상에 존재하며 정삼각형의 꼭지점에 위치하고 한 개의 위성은 머리 위에 위치한다. 이처럼 GDOP를 최소화 하는 위성의 배치는 일반적으로 낮은 양각의 위성을 포함하게 되므로 GDOP를 위성 선택의 기준으로 사용하면 낮은 양각을 갖는 위성들이 선택되는 경향이 나타난다. 그러나 이와 같이 낮은 양각을 갖는 위성은 일반적으

로 의사거리 측정오차가 큰 경향이 있다. 그러므로 실제로 위성을 선택할 때는 GDOP뿐 아니라 위성의 양각을 고려할 필요가 있다. 이처럼 양각을 고려한 EGDOP (Extended GDOP)의 개념이 Park에 의하여 제시되었다 [8]. 실제로 이와 같은 접근 방법을 사용하면 위치결정 오차가 GDOP만을 이용한 경우보다 감소함이 보여졌다. 또한 (14)에서와 같이  $\Sigma$ 의 역행렬을 이용하여 정의되는 GDOP는 의사거리 측정오차가 가우시안 분포를 갖는 경우의 위치와 수신기 시계 바이어스의 추정값의 Cramer-Rao의 하한을 이용해서도 정의될 수 있다[9].

2. RGDOP의 정의 및 GDOP과의 관계

절대 위치 결정에서 구해진 위치의 정확도를 나타내는 척도로써 GDOP을 사용함을 앞에서 살펴보았다. 여기서는 상대 위치의 정확도를 나타내는 RGDOP(Relative GDOP)를 정의하고 이와 GDOP과의 관계를 살펴본다.

$n$ 개의 위성에 대한 기준국( $R$ ), 사용자( $A$ )에서의 측정치를 (22)와 같은 방법으로 배열하고, 선형화 기준점  $R, A$ 에서 선형화하면 (22)로 나타난다. 여기서 기준 수신기  $R$ 의 위치는 정확히 알고 있으므로 수신기  $A$ 의 위치오차인  $\delta x$ 항만 나타난다. 이후에는 (23)의 행렬 형태로 표시하고 사용한다.

$$\begin{bmatrix} \Psi_R^1 \\ \Psi_A^1 \\ \Psi_R^2 \\ \Psi_A^2 \\ \vdots \\ \Psi_R^n \\ \Psi_A^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_R^1 \\ r_{A0}^1 \\ r_R^2 \\ r_{A0}^2 \\ \vdots \\ r_R^n \\ r_{A0}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_R^1 \\ 0 \\ g_R^2 \\ 0 \\ \vdots \\ g_R^n \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{A0}^1 \\ 0 \\ g_{A0}^2 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{A0}^n \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} v_R^1 \\ v_A^1 \\ v_R^2 \\ v_A^2 \\ \vdots \\ v_R^n \\ v_A^n \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\nabla \Psi = G_0 \delta x + \nabla v \quad (23)$$

단일 차분 연산자  $S$ 와 이중 차분 연산자  $D$ 를 (24)와 (25)로 정의하고, 이를 이용하여 이중차분된 측정치를 (26)으로 나타낼 수 있다. 여기서  $\nabla \Psi$ 는  $(2n \times 1)$ 인 벡터,  $S$ 는  $(n-1) \times n$ 인 행렬이고,  $D$ 는  $((n-1) \times 2n)$ 인 행렬이다. 측정치를 배열하는 방법에 따라 이중 차분 연산자는 여러 가지의 형태를 가질 수 있다. 대표적으로 사용되는 방법은 양각이 가장 높은 위성을 기준으로 두고 여기에 대해서 각 위성의 차분을 취하는 방법과, 양각으로 위성의 순서를 정하고 앞뒤 위성간의 차분을 구하는 방법이다. 두 방법이 수학적으로 일치하며, 여기서는 후자의 방법을 사용하였다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D \cdot \nabla \Psi = S \cdot G \cdot \delta x + D \cdot \nabla v \quad (26)$$

(8)과 (26)은 동치이며 (26)에서 상대 위치결정에서는 의사거리 측정오차가 서로 연관되어 나타남을 알 수 있다. 여기서는 (8) 혹은 (26)을 다음과 같이 간략한 형태로 표현하고 사용한다. 여기서  $Q$ 는 수신기  $R$ 과  $A$ 에서의 측정잡음의 공분산으로 이루어진  $(2n \times 2n)$ 의 행렬을 나타낸다.

$$\rho_D = L \delta x + v_D \quad (27)$$

$$v_D \sim N(0, D Q D^T) \equiv N(0, Q_D)$$

(27)을 이용하여 구해진 상대 위치  $\delta\hat{x}$ 의 공분산 행렬을 이용하여 RGDP를 다음과 같이 정의한다.

$$RGDP \equiv \sqrt{\text{trace}[\text{cov}(\delta\hat{x})]} \quad (28)$$

따라서 코드 측정치를 이용한 경우 RGDP은 다음의 (29)로 구해진다.

$$RGDP \equiv \sqrt{\text{trace}[(L^T Q_D^{-1} L)^{-1}]} \quad (29)$$

$$= \sqrt{\text{trace}[(G^T S^T (DQD^T)^{-1} SG)^{-1}]}$$

(29)에서 RGDP은 상대 위치 결정에서 추정된 위치의 정확도를 나타내는 척도가 된다. 또한 여기서 GDOP의 정의와 같이 수신기의 각 채널이 독립적이고 같은 크기의 오차를 갖는다는 가정으로  $Q=I$ 로 두면 다음의 관계를 얻는다.

$$RGDP \equiv \sqrt{\text{trace}[(G^T S^T (DD^T)^{-1} SG)^{-1}]} \quad (30)$$

(25)는 위치 오차만을 나타내므로 정확한 의미에서는 PDOP에 해당한다. 즉 (4)의 측정식에서 양변에 행렬  $S$ 를 곱하면 시계 바이어스가 제거된 다음의 식을 얻는다.

$$S\delta\psi = S[G \ r] \begin{bmatrix} \delta x \\ cB_A \end{bmatrix} + S v \quad (31)$$

$$= SG\delta x + S v$$

위 식을 다음과 같이 간략화 된 형태로 표현하고 사용한다. 여기서  $n$ 개의 위성에 대하여  $\rho_s$ 는  $((n-1) \times 1)$ 의 벡터가 된다.

$$\rho_s = L\delta x + v_s \quad (32)$$

$$v_s \sim N(0, SQS^T) \equiv N(0, Q_s)$$

여기서  $Q=I$ 의 가정과 추정된 위치  $\delta\hat{x}$ 의 공분산으로부터 PDOP을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$RGDP \equiv \sqrt{\text{trace}[(G^T S^T (SS^T)^{-1} SG)^{-1}]} \quad (33)$$

(30)과 (33)으로부터 RGDP과 PDOP은 유사한 형태가 됨을 알 수 있다. 특히 행렬  $S$ 와  $D$ 사이에는 다음의 관계가 성립하므로 최종적으로 다음의 (35)를 얻는다.

$$DD^T = 2SS^T \quad (34)$$

$$RGDP = \sqrt{2} \times PDOP \quad (35)$$

따라서 위의 관계로부터 RGDP와 PDOP이 같은 척도이며 상대 위치를 구할 때에도 PDOP를 사용하여 위성을 선택하면 된다. 앞에서 살펴본 GDOP의 이론적 최소값  $\sqrt{10/n}$ 을 줄때 PDOP은  $\sqrt{9/n}$ 가 되므로 RGDP의 최소값은  $\sqrt{18/n}$ 이다. 지구에 의한 신호의 단절을 고려하면 4개의 위성에 대하여 실제로 얻을 수 있는 RGDP의 최소값은  $2\sqrt{4/3}$ 가 된다. 추가로 주어진 행렬  $S$ 와  $D$ 에 대하여 다음의 관계가 성립하므로 RGDP의 계산을 간단히 할 수 있다.

$$W = S^T (DD^T)^{-1} S = \frac{1}{2n} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

측정 오차와 GDOP를 동시에 고려하는 위성 선택 기준인 EGDOP [8]와 같은 방법으로 ERGDOP도 쉽게 정의 할 수 있다.

#### IV. GDOP와 조건계수의 관계

##### 1. 조건 계수의 정의

조건계수는 선형 방정식을 풀 때의 수치적 안정도를 평가하는 척도로서 정방행렬의 역행렬을 구할 때의 안정도를 나타내는 기준으로도 쓰일 수 있다[10]. 임의의 선형

방정식  $Ax=b$ 의 섭동된 형태는 (37)과 같이 표현할 수 있다. 여기서  $A$ 는 기준 정방행렬,  $F$ 는  $A$ 의 섭동 행렬,  $b$ 는 기준 측정 벡터,  $f$ 는  $b$ 의 섭동 벡터,  $x$ 는 미지 벡터,  $\epsilon$ 는 상수 섭동을 나타낸다.

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = b + \epsilon f, \quad x(0) = x. \quad (37)$$

만약  $A$ 의 역행렬이 존재하면  $x(\epsilon)$ 는 0근처에서 미분가능하다. 양변을 미분하면 (38)를 얻는다.

$$\dot{x}(0) = A^{-1}(f - Fx). \quad (38)$$

섭동의 영향은 Taylor 확장을 이용하여 (39)와 같이 표현할 수 있다. 또한 임의의 노음을 사용하여 (40)과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$x(\epsilon) = x + \epsilon \dot{x}(0) + O(\epsilon^2) \quad (39)$$

$$\frac{\|x(\epsilon) - x\|}{\|x\|} \leq \epsilon \|A^{-1}\| \left\{ \frac{\|f\|}{\|x\|} + \|F\| \right\} + O(\epsilon^2) \quad (40)$$

여기서 조건 계수  $\chi$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (41)$$

부등식  $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$ 를 이용하면 입력 오차와 추정오차 사이의 관계인 (42)가 얻어진다. 이 식으로부터 추정오차는 시스템 행렬의 오차에 의한 영향과 측정오차의 영향의 합으로 구성됨을 알 수 있다. 이 오차는 수치연산에 의해서 발생하는 것일 수도 있고 수치오차와 관계없이 모델링 과정에서 발생하는 것일 수도 있다.

$$\frac{\|x(\epsilon) - x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \left\{ \epsilon \frac{\|F\|}{\|A\|} + \epsilon \frac{\|f\|}{\|b\|} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (42)$$

2-노음을 사용하는 경우에는 조건계수가 최대 특이값과 최소 특이값의 비로 정의된다.

$$\chi(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (43)$$

##### 2. GDOP와 조건계수의 관계

GPS를 이용한 위치결정에서의 마지막 방정식은 절대 위치 결정이나 상대위치 결정 모두 항상 선형 방정식의 형태를 갖는다. 이 때 시스템 행렬은 사용자와 위성간의 기하학적인 관계에 의해서 결정된다. 만약 GDOP가 큰 값을 가지면 기하학적인 영향에 의한 오차가 증가한다. 또한 조건계수가 크면 수치연산 오차가 증가한다. 그러나 이 두가지오차의 관계는 지금까지 정확히 정리되지 않았다. 본 절에서는 위치오차의 척도가 되는 GDOP와 조건계수 사이의 관계를 분석한다.

앞의 (17)과 (43)에서 정의된 바와 같이 GDOP와 조건계수는 시스템 행렬의 고유치 또는 특이치를 이용하여 정의할 수 있다. 의사거리 측정식의 시스템 행렬  $H^T H$ 는 형태상 항상 양의 정치 행렬이 되므로, 즉 고유치와 특이치가 일치하므로, (43)의 특이치는 고유치로 바꾸어 (44)과 같이 쓸 수 있다.

$$\chi(\Sigma) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \quad (44)$$

(15)와 (16), (18)로부터 다음의 관계를 얻는다.

$$n \leq \lambda_4 < 2n \quad (45)$$

$$\lambda_4 GDOP(\Sigma)^2 = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} + \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_3} + 1 \quad (46)$$

$$= \chi(\Sigma) \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) + 1$$

$$\frac{1}{\lambda_4} [\chi(\Sigma) + n - 1] \leq GDOP(\Sigma)^2 \leq \frac{1}{\lambda_4} [(n-1)\chi(\Sigma) + 1] \quad (47)$$

(45)와 (47)로부터 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{nGDOP(\Sigma)^2 - 1}{n - 1} \leq \chi(\Sigma) < 2nGDOP(\Sigma)^2 - (n - 1) \quad (48)$$

(48)은 시스템 행렬  $H$  가 주어졌을 때 GDOP와 조건계수 사이의 관계를 보여준다. 위 식에서 보듯이 조건계수는 항상 GDOP와 관측되는 위성의 수에 의해서 상한과 하한이 정해지므로 조건계수와 GDOP가 대략 비례함을 알 수 있다. 그러므로 조건계수의 값을 구하기가 GDOP보다 용이하다면 위치오차를 나타내는 척도로서 조건계수를 GDOP대신에 사용하는 것이 유리하다.

이론적으로 4개의 위성이 있는 경우에 GDOP의 최소값이  $\sqrt{2.5}$ 이므로 이를 (48)에 대입하면 조건계수의 하한은 3이된다. (49)에 GDOP을 최소화하는 시스템 행렬의 한 예를 나타내었다.

$$H = \begin{bmatrix} 0.6005 & -0.5542 & -0.5764 & 1 \\ -0.5542 & 0.6005 & -0.5764 & 1 \\ -0.5996 & -0.5996 & 0.5301 & 1 \\ 0.5533 & 0.5533 & 0.6227 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

행렬  $H^T H$  의 고유치와 조건계수는 (50), (51)과 같이 얻어진다.

$$\lambda(H^T H) = [1.3333, 1.3333, 1.3333, 4] \quad (50)$$

$$\chi(H) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} = \frac{4}{1.3333} = 3 \quad (51)$$

여에서 GDOP이 최소가 되는 경우에 조건계수도 최소가 됨을 알 수 있다.

**V. GDOP와 4면체의 체적의 관계**

4개의 위성이 있는 경우에 사용자로부터 위성까지의 시선벡터가 이루는 4면체의 체적은 계산의 용이성 때문에 GDOP대신에 위성 선택의 기준으로서 사용되어 왔다. 그러나 이 값이 GDOP와 반비례한다는 사실은 알려져 있었지만 정확한 해석은 알려져 있지 않았다. 본 절에서는 이 두가지 척도 사이의 관계를 분석하며, 해석의 편의를 위하여 4개의 위성만을 사용한 경우의 관계를 유도하였다.

(4)의 선형화 된 의사거리 측정식에서 시스템 행렬  $H$  를 (52)와 같이 나눈다. 그러면 3개의 위성에 의한 값  $P$  와 나머지 하나의 위성에 의한  $q$ 에 의한 값으로  $H$ 를 표현할 수 있다. 여기서  $P = [g_{A0}^1 : g_{A0}^2 : g_{A0}^3]^T$  는 3개의 위성에 대한 시선벡터로 구성된 행렬,  $q$ 는 4번째 위성으로의 시선벡터를 나타내며,  $r = [1 \ 1 \ 1]^T$  은 각 항이 1인 벡터를 나타낸다.

$$H = \begin{bmatrix} P^T & r \\ q^T & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

(52)를 이용하면 (53)을 얻으며, 이로부터 GDOP를 (54)와 같이 구할 수 있다[11].

$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} (P^T - rq^T)^{-1}(P^T - rq^T)^{-T} + \frac{P^{-T} r r^T P^{-1}}{(1 - q^T P^{-T} r)^2} & : \\ \dots & \frac{q^T P^{-T} P^{-1} q + 1}{(1 - q^T P^{-T} r)^2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$GDOP^2 = tr\{(P^T - rq^T)^{-1}(P^T - rq^T)^{-T}\} + tr\frac{P^{-T} r r^T P^{-1}}{(1 - q^T P^{-T} r)^2} + \frac{q^T P^{-T} P^{-1} q + 1}{(1 - q^T P^{-T} r)^2} \quad (54)$$

(54)를 Frobenius 노름을 이용하여 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$GDOP^2 = \|P^{-1}\|_F^2 + \frac{2q^T P^{-T} P^{-1} P^{-T} r}{1 - q^T P^{-T} r} + \frac{1}{(1 - q^T P^{-T} r)^2} \{ \|P^{-T} r\|_F^2 \|P^{-1} q\|_F^2 + \|P^{-T} r\|_F^2 + \|P^{-1} q\|_F^2 + 1 \} \quad (55)$$

여기서  $\|\cdot\|_F$  는 행렬  $A$  의 Frobenius 노름으로 다음과

$$\|A\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad A = \{a_{ij}\}.$$

또한 시선각 벡터의 끝 점으로 이루어진 4면체의 체적은 (56)과 같이 구해진다.

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} P^T & r \\ q^T & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \det[P^T] \det[1 - q^T P^{-T} r] \quad (56) = \frac{1}{6} (1 - q^T P^{-T} r) \det[P^T]$$

(55)와 (56)으로부터  $V$ 를 최대화 하는 것은 GDOP<sup>2</sup> 의 분모인  $1 - q^T P^{-T} r$ 를 최소화 하는 것과 동일함을 알 수 있다. 즉 대략 반비례한다고 볼 수 있다. 그러나 (55)에서 볼 수 있듯이  $P$ 와  $q$ 는 GDOP<sup>2</sup>의 분모 뿐 아니라 분자에 도 포함되어 있다. 그러므로 4면체의 체적을 최대화하는 위성의 배치와 GDOP을 최소화하는 위성의 배치는 정확히 일치하지는 않음을 알 수 있다.

이상의 방법들의 계산량을 Matlab을 이용하여 살펴 보았다. 임의의 4개의 위성에 대한 측정행렬  $H$ 에 대하여 계산량을 구했으며 그 결과를 표 1에 나타내었다.

표 1. Matlab을 이용한 계산량의 비교.

Table 1. Comparison of computational Burden using Matlab.

	GDOP	조건계수	사면체의 체적
FLOPS	342	738	35

**VI. 결론**

본 논문에서는 GPS를 이용하여 결정된 절대 위치의 정확도를 판별하는 기준이 되는 척도인 GDOP, 위성까지의 시선각 벡터에 의해서 이루어지는 4면체의 체적, 조건계수를 분석하고 이들 사이의 관계식을 유도하였다. 조건계수는 GDOP과 관측되는 위성의 수에 의하여 상한과 하한이 결정되므로 이 둘은 대략 비례함을 알 수 있었다. 4면체의 체적과 GDOP은 정확히 반비례하는 관계가 아님을 밝혔다. 이 결과는 위성의 궤도에 제한을 두지 않고 구해진 결과이며, 위성 궤도에 제한이 있는 실제의 경우에는 GDOP과 조건계수는 거의 비례하는 결과를, GDOP과 4면체의 체적은 거의 반비례하는 결과를 줄 것으로 기대된다. 즉 실제에서는 계산이 가장 용이한 척도를 사용하는 것이 유리할 것으로 예측된다.

또한 본 논문에서는 결정된 상대위치의 정확도를 나타내는 RGDOP을 정의하였으며, 이 RGDOP과 절대위치 결정에서 사용되는 PDOP이 정확히 비례함을 밝혔다. 이 결과는 상대 위치결정 기법을 사용하는 측지나 자세 결정분야에서의 오차해석에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

**참고문헌**

[1] G. M. Siouris, *Aerospace Avionics Systems-A Modern Synthesis*, Academic Press, 1993.

[2] H. Wellenhof, B. H. Lichtenegger and J. Collins, *Global Positioning System : Theory and Practice*, Springer-Verlag, 1993.

[3] J. A. Klobuchar, "Ionospheric time-delay algorithm for single-frequency GPS users," *IEEE Trans. Aerospace and Electronics System*, vol. 23, no. 3, 1987.

[4] H. S. Hopfield, *Tropospheric Range Error Parameters-Further Studies*, Applied Physics Laboratory Johns Hopkins University, 1972.

[5] J. J. Spilker Jr., "Tropospheric effects on GPS," in *Global Positioning System: Theory and Applications Volume 1*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Washington D.C., USA, 1996.

[6] R. M. Kalafus, J. Vilcans and N. Knable, "Differential operation of navstar GPS," *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*, vol. 30, no. 3, 1993.

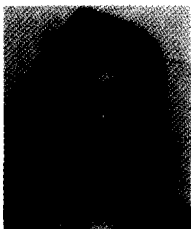
[7] B. T. Fang, "The minimum for geometric dilution of precision in global positioning system navigation," *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 10, no. 1, pp. 116, 1987.

[8] C. Park, I. Kim, J. G. Lee and G.-I. Jee, "A satellite selection criterion incorporating the effect of elevation angle in GPS positioning," *Control Engineering Practice*, vol. 4, no. 12, pp. 1741-1746, 1995.

[9] J. W. Chaffee and J. S. Abel, "GDOP and the Cramer-Rao Bound," *Proc. IEEE Position Location and Navigation Symposium*, Las Vegas, Nevada, USA, 1994.

[10] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1987.

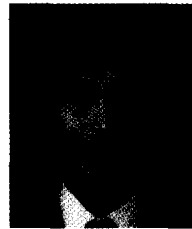
[11] I. Kim, C. Park, G.-I. Jee, J. G. Lee and C. S. Kim, "GPS positioning using quasi-pseudorange," *Proc. of the First Asian Control Conference*, Tokyo, Japan, 1994.



**박 찬 식**

1961년 10월 1일생. 1984년 서울대 공대 제어계측공학과 졸업. 1986년 동대학원 제어계측공학과 석사. 1997년 동 대학원 제어계측공학과 박사. 1984년 3월~1997년 8월 삼성전자 수석연구원. 1997년 8월~현재 충북대학교

제어계측공학과 전임강사.



**김 일 선**

1965년 5월 11일생. 1988년 서울대 공대 제어계측공학과 학사. 1990년 동대학원 제어계측공학과 석사. 1996년 동 대학원 제어계측공학과 박사. 1996년 3월~현재 삼성전자 멀티미디어 연구소 선임 연구원.



**이 장 규**

1946년 3월 28일생. 1971년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1974년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(석사). 1977년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(공학박). 1977년 4월~1981년 6월 The Analytic Sciences Corporation 연

구원(Technical Staff). 1981년 6월~1982년 7월 Charles Stark Draper Laboratory 연구원(Technical Staff). 1982년 9월~현재 서울대 공대 제어계측공학과 교수. 1994년 12월~현재 서울대 자동제어특화연구센터 소장.



**지 규 인**

1959년 11월 24일생. 1982년 서울대 공대 제어계측공학과 학사. 1984년 서울대 대학원 제어계측공학과 석사. 1989년 Case Western Reserve University 시스템공학과 박사. 1990년 Rensselaer Polytechnic Institute 연구원. 1990년

9월~1992년 2월 강원대학교 제어계측공학과 전임강사. 1992년 3월~현재 건국대학교 전자공학과 부교수.