

최적 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해

A Unified Solution to Optimal Hankel-Norm Approximation Problem

윤상순, 권오규
(Sang-Soon Youn and Oh-Kyu Kwon)

Abstract : In this paper, a unified solution of Hankel norm approximation problem is proposed by δ -operator. To derive the main result, all-pass property is derived from the inner and co-inner property in the δ -domain. The solution of all-pass becomes an optimal Hankel norm approximation problem in δ -domain through LLFT(Low Linear Fractional Transformation) inserting feedback term $\Phi(\gamma)$, which is a free design parameter, to hold the error bound desired against the variance between the original model and the solution of Hankel norm approximation problem. The proposed solution does not only cover continuous and discrete ones depending on sampling interval but also plays a key role in robust control and model reduction problem. The verification of the proposed solution is exemplified via simulation for the zero-order Hankel norm approximation problem and the model reduction problem applied to a 16th order MIMO system.

Keywords : robust control, model reduction, δ -operator

I. 서론

최적 한켈 놈 근사화는 다변수 제어문제의 하나로써 H_∞ 제어기법을 비롯한 건설제어 이론이 등장하면서 최적제어기와 축소차수 모델을 설계하는데 핵심적인 역할을 하는 중요한 이론이다. 이러한 연구의 대표적인 예로는 Glover[1][3], Safonov등[2], Frances[4]등과 같이 연속형으로 제안된 경우와 Gu등[5], Kavranoglu등[6]과 같이 이산형으로 제안된 경우가 있다. 그 중에서도 Glover[1]와 Gu등[5]은 평형화 실현된 상태공간 모델을 사용하였으며 Safonov등[2], Glover[3], Kavranoglu등[7]은 평형화 실현 과정 없이 직접 해를 구하는 방법을 사용하였다. 특히, Glover[1][3]의 이론은 다변수 건설제어 분야에서 가장 많이 사용되는 방법으로서 인과적 시스템을 비인과적 시스템에 의하여 근사화시켜 축소차수 모델의 개발뿐만 아니라 H_∞ 제어 분야에서 최적해를 구하는데 있어서 중요한 역할을 하게 되었다[8]. 그러나 연속형 플랜트를 디지털 제어기로 제어하는 실제 문제에서는 연속형이나 이산형 제어기 모두가 수치오차 때문에 그대로 적용할 수 없고 제어이득을 재조정해야 하는 난점이 있으며, 이 다변수 건설제어 분야에서도 이러한 문제점이 남아 있다.

한편으로, 90년대에 들어서면서 Middleton과 Goodwin [9]등에 의해서 δ -연산자에 의하여 연속형과 이산형을 동시에 해석할 수 있는 통합형 접근법이 제시되면서 기존의 각종 다변수 이론에 대한 통합형 이론이 등장하게 되었다[9][10][15]. 이 방법에 의해 통합형으로 제안된 제어기나 모델은 샘플링 주기에 따라 연속형/이산형으로 간단히 변환이 가능하며 이산화 과정에서의 수치오차가 매우 작다는 장점이 있다. 따라서 δ -변환을 이용하여 연속형 제어기로부터 통합형 제어기를 유도하면 제어기 이산화에 따른 오차를 최소화하면서 설계된 제어기를 디지털 제어기로서 마이크로프로세서를 통해 직접 실현할 수 있다. 그러나 H_∞ 제어 분야에서는 주로 연속형 결과들

이 제시되고 있으며, 통합형 제어기는 매우 드물게 제시되고 있다[10][15]. 그러므로, 이 논문에서는 H_∞ 제어 분야에서의 대표적 결과인 Glover[3]의 최적 한켈 놈 근사화 문제를 δ -영역에서 유도하여 통합형 해를 제시한다. 이 해는 4-블럭 최적화 문제를 0차 한켈 놈 근사화 문제로 단순화시켜서 γ -반복의 절차 없이 이산형 또는 연속형 최적제어기를 동시에 설계할 수 있도록 하는 0차 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해이다. 한켈 놈 근사화 문제는 건설 H_∞ 제어기법 및 각종 다변수 현대제어 이론 분야에서 핵심적인 역할을 하므로 이 통합형 해는 중요한 의미를 지닌다. 또한, 설계자가 설정한 오차한계 내에서 별도의 이산화 과정 없이 샘플링 주기의 선택에 따라서 간단히 통합형 축소차수 모델을 설계할 수 있는 유용한 이론이라는 데에 이 기법의 의의가 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 2장에서는 주요 결과를 유도하기 위해서 δ -영역에서의 수학적 개념과 용어 등을 살펴본다. 3장에서는 우선 통합형으로서 한켈 놈 근사화 문제를 설정하고 inner와 co-inner의 성질을 이용하여 전역(All-pass)의 해를 유도한 뒤 자유 설계 계수행렬 $\Phi(\gamma)$ 를 뇌먹임 항에 삽입한 하선형 분해 변환을 이용하여 최적 한켈 놈 문제의 통합형 해를 제시한다. 4장에서는 모의실험을 통하여 제안된 통합형 해를 이용하여 16차 다변수 모델로부터 0차 한켈 놈 근사화 문제와 7차 축소 모델을 연속형과 이산형으로 각각 설계하여 제안된 해의 타당성을 입증하며 5장에서는 결론을 맺는다.

II. δ -영역에서의 정의와 용어

다음과 같은 연속형 상태공간 모델을 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 A_c, B_c, C_c, D_c 는 연속형 행렬들이다. (1)의 모델은 다음과 같은 δ -연산자에 의한 이산화 모델로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta x(k) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\delta = \frac{q-1}{\Delta}$ 이고, q 는 전향이동(forward shift) 연산자, Δ 는 샘플링 시간이다. 그리고 각 행렬들은 다음과 같다.

$$A = \Omega A_c \quad (3)$$

$$B = \Omega B_c \quad (4)$$

$$C = C_c \quad (5)$$

$$D = D_c \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \exp(A_c \tau) d\tau.$$

이때 (1), (2)에 대해 복소평면에서 라플라스 변환변수 s 와 δ -변환변수 γ 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\frac{\Delta}{2} |\gamma|^2 + \text{Re}(\gamma) < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(s) < 0 \quad (7)$$

$$\frac{\Delta}{2} |\gamma|^2 + \text{Re}(\gamma) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(s) = 0 \quad (8)$$

특히 δ -변환은 이동 연산자 모델에 대한 z -변환과는 달리 새로운 불안정 영점을 만들지 않는 특징을 가진다[9].

RL_{∞} 은 안정경계 즉 $\gamma = \frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta}$ 을 제외한 전 복소영역에서 해석적이고 높, $\|\cdot\|_{\infty}$, 이 유한한 실유리함수(proper real-rational function)들로 이루어진 집합이다. 그리고 RH_{∞} 는 RL_{∞} 의 부분공간으로 안정경계 외부에서 해석적인 실 유리함수들의 집합으로 정의된다. RH_{∞} 는 RL_{∞} 내에서 RH_{∞} 의 직교여집합으로 정의된다. 이때 H_{∞}/L_{∞} 높은 다음과 같이 정의한다.

$$\|G(\gamma)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma \left[G \left\{ \frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right\} \right] \quad (9)$$

여기서 σ_{\max} 는 최대 특이값을 나타낸다. 그리고 상태공간 모델은 다음과 같이 표현한다.

$$G(\gamma) = C(\gamma I - A)^{-1}B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (10)$$

$G(\gamma)$ 의 공액복소 시스템 $G(\gamma)^*$ 은 A 와 $(I + \Delta A)$ 의 역행렬이 존재한다는 가정하에 다음과 같은 상태공간 모델로 표현된다[15].

$$G(\gamma)^* = \left[\begin{array}{c|c} -A^T \hat{A}^T & \hat{A}^T C^T \\ \hline -B^T \hat{A}^T & D^T - \Delta B^T \hat{A}^T C^T \end{array} \right] \quad (11)$$

여기서 $\hat{A} = (I + \Delta A)^{-1}$ 이다. 하선형 분해 변환(Lower Linear Fractional Transformation, LLFT)은 다음과 같이 정의된다.

$$F_L \left[\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Phi \right] = P_{11} + P_{12} \Phi (I - P_{22} \Phi)^{-1} P_{21}$$

만약 $G(\gamma)$ 가 안정하고 (10)의 상태공간모델을 가지면 제어가능, 관측가능 그램행렬(Gramian) P 와 Q 는 다음의 통합형 Lyapunov 식들을 만족하게 된다.

$$AP + PA^T + BB^T + \Delta APA^T = 0 \quad (12)$$

$$A^T Q + QA + C^T C + \Delta A^T Q A = 0 \quad (13)$$

보조정리 1 : $G(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ 에 대해 다음의 대수

Lyapunov방정식을 만족하는 $P = P^T > 0$ 가 존재할 때,

$$AP + PA^T + BB^T + \Delta APA^T = 0, \quad (14)$$

$GG^* = I$ 이기 위한 필요충분조건이 다음과 같다.

$$BD^T + PC^T + \Delta APC^T = 0 \quad (15)$$

$$DD^T + \Delta CPC^T = I. \quad (16)$$

증명 : [15] 참조. ■

보조정리 2 : $G(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ 에 대해 다음의 대수 Lyapunov방정식을 만족하는 $Q = Q^T > 0$ 가 존재할 때,

$$A^T Q + QA + C^T C + \Delta A^T Q A = 0, \quad (17)$$

$G^* G = I$ 이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$D^T C + B^T Q + \Delta B^T Q A = 0 \quad (18)$$

$$D^T D + \Delta B^T Q B = I. \quad (19)$$

증명 : [15] 참조. ■

또한 δ -영역에서도 정방행렬 $G(\gamma)$ 가 $GG^* = G^* G = I$ 일 때 '전역(all-pass)' 이라고 한다.

s -영역에서의 $G_1(s)$ 와 δ -영역에서의 $G(\gamma)$ 는 다음과 같은 양선형 변환을 통하여 각각 대응될 수 있다.

$$G(\gamma) = G_1(s) \quad s = \frac{\gamma}{\Delta\gamma/2}$$

$$\text{또는 반대로 } G_1(s) = G(\gamma) \quad \gamma = \frac{s}{1 - \Delta s/2} \quad (20)$$

δ -영역에서 어떤 행렬 A 의 "관성"은 연속형과 같이 각각 $\text{In}_d A$ 과 $\text{In} A$ 로 표시되며 다음과 같이 정수의 3중 관계를 갖는다.

$$\text{In}_d A = \{ \pi_d(A), \nu_d(A), \xi_d(A) \}$$

$$\text{In} A = \{ \pi(A), \nu(A), \xi(A) \}$$

여기서 $\pi_d(A), \nu_d(A), \xi_d(A)$ 는 안정경계 외부, 내부, 경계에 놓여있는 고유값의 수를 나타낸다. 또한, $\pi(A), \nu(A), \xi(A)$ 는 RHP, LHP, 허수축상에 놓여있는 고유값의 수를 나타낸다.

III. δ -영역에서의 최적 한켈 높 근사화 문제

이 장에서는 δ -영역에서의 최적 한켈 높 근사화 문제의 해를 유도한다. 먼저 문제를 설정하고 전역함수의 해를 구한다. 이를 바탕으로 하선형 분해변환을 통하여 최적 한켈 높 근사화 문제의 모든 해를 구한다.

1. 문제설정

한켈 높 근사화 문제를 δ -영역에서 정의하기로 한다.

안정한 실유리함수 $G(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ 가 안정경계 외부에서 해석적이라고 가정할 때 즉, $G(\gamma) \in RH_{\infty}$ 일 때, δ -영역에서 한켈 높은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\|G\|_H = \min \|G - X\|_{\infty} \quad (21)$$

$$X \in RH_{\infty}$$

여기서 $X = \hat{G} + F \in RH_{\infty}$ 이고 \hat{G} 은 k 의 McMillan 차수를 가지며 $\hat{G} \in RH_{\infty}, F \in RH_{\infty}$ 이다.

(20)에서 한켈 높을 최소화하는 문제는 Glover[3]에 의

해서 다음과 같이 간략화된다.

$$\|G-X\|_\infty \leq \alpha \tag{22}$$

여기서 $\sigma_k(G) > \alpha > \sigma_{k+1}(G)$ 이고 $\sigma_k(G)$ 는 G 의 k 번째 특이치이다. 결국 한켈 놈 근사화 문제는 (22)를 만족하는 $X \in RH_\infty^-$ 를 구하는 것이다. 연속형에서 (22)를 만족하는 X 를 구하는 문제는 Glover에 의해서 체계적으로 정리되었다[3]. 이 논문에서는 (22)로부터 한켈 놈 근사화 문제를 δ -영역에서 유도함으로써 이산형 및 연속형에 대하여 동시에 해석할 수 있는 통합형 해를 유도한다.

2. 전역 해

한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해를 구하기 위해 안정한 전달함수 행렬 $G_a \in RH_\infty^{(n+m) \times (n+m)}$ 와 상태공간 행렬을 다음과 같이 정의하고

$$G_a(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} G(\gamma) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \ 0 \\ \hline C & D \ 0 \\ 0 & 0 \ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B_a \\ \hline C_a & D_a \end{array} \right]$$

$\alpha^{-1}[G_a - J]$ 가 전역이 되도록 하는 $J(\gamma) \in RH_\infty^{-(n+m) \times (n+m)}$ 를 구성한다. J 의 상태공간 행렬을

$$J(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] \text{로 할 때 } (G_a - J) \text{는 다음과 같이 표현된다.}$$

$$G_a - J = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right] \tag{23}$$

여기서 $A_e = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right], B_e = \left[\begin{array}{c} B_a \\ \tilde{B} \end{array} \right],$

$C_e = [C_a \ -\tilde{C}], D_e = D_a - \tilde{D}$ 이다.

보조정리 1과 2로부터, 다음을 만족하는 대칭행렬 P_e 와 Q_e 가 존재할 때 $(G_a - J)$ 는 전역이 된다.

$$A_e P_e + P_e A_e^T + B_e B_e^T + \Delta A_e P_e A_e^T = 0 \tag{24}$$

$$A_e^T Q_e + Q_e A_e + C_e^T C_e + \Delta A_e^T Q_e A_e = 0 \tag{25}$$

$$D_e B_e^T + C_e P_e + \Delta C_e P_e A_e^T = 0 \tag{26}$$

$$D_e^T C_e + B_e^T Q_e + \Delta B_e^T Q_e A_e = 0 \tag{27}$$

$$D_e D_e^T + \Delta C_e P_e C_e^T = \alpha^2 I \tag{28}$$

$$D_e^T D_e + \Delta B_e^T Q_e B_e = \alpha^2 I \tag{29}$$

$$P_e Q_e = \alpha^2 I \tag{30}$$

$G(\gamma)$ 또는 $G_a(\gamma)$ 의 아래와 같은 Lyapunov 방정식 해를 각각 P 와 Q 라 하자.

$$AP + PA^T + BB^T + \Delta APA^T = 0 \tag{31}$$

$$A^T Q + QA + C^T C + \Delta A^T QA = 0 \tag{32}$$

(24)와 (25)에서 P_e 와 Q_e 는 (1,1)블럭이 각각 P 와 Q 이어야 하므로 다음의 형태를 가진다.

$$P_e = \left[\begin{array}{c|c} P & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & P_{22} \end{array} \right], Q_e = \left[\begin{array}{c|c} Q & Q_{21}^T \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array} \right] \tag{33}$$

(30)과 (33)의 (1,1)블럭으로부터 $P_{12} Q_{21} = \alpha^2 I - PQ$ 임을 알 수 있고 \tilde{A} 와 A 의 차원이 같다고 가정하면 (30)의 (1,1)블럭이 $P_{12} Q_{21} = \alpha^2 I - PQ$ 이고 α 는 $G(\gamma)$ 의 특

이치가 아니고 α^2 도 PQ 의 고유값이 아니기 때문에 P_{12} 와 Q_{21} 은 정방 정칙행렬이므로 P_{12} 를 단위행렬로 두고 (30)의 해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_e = \left[\begin{array}{c|c} P & I \\ \hline I & QR^{-1} \end{array} \right], Q_e = \left[\begin{array}{c|c} Q & -R^T \\ \hline -R & RP \end{array} \right] \tag{34}$$

여기서 $R = PQ - \alpha^2 I$ 이다.

이제 (28)과 (29)를 만족하는 모든 D_e 에 대하여, \tilde{B} 은 (27)의 (1,1)블럭으로부터, \tilde{C} 은 (27)의 (1,1)블럭으로부터, 그리고 \tilde{A} 은 (24)의 (1,2)블럭으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{B} = R^{-T}(\hat{A}^T C_a^T D_e + Q B_a) \tag{35}$$

$$\tilde{C} = C_a P + D_e B_a^T \hat{A}^T \tag{36}$$

$$\tilde{A} = -(A^T + \tilde{B} B_a^T) \hat{A}^T \tag{37}$$

마지막으로 (28)와 (29)을 만족하고 $\alpha^{-1}[G_a - J]$ 가 전역이 되도록 하는 \tilde{D} 를 구하기 위해 다음의 보조정리를 살펴본다.

보조정리 3 : QR^{-1} 는 다음의 Lyapunov 방정식을 만족한다.

$$\hat{A} QR^{-1} + QR^{-1} \hat{A}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T + \Delta \hat{A} QR^{-1} \hat{A}^T = 0. \tag{38}$$

증명 : (28)과 (36)로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} D_e D_e^T &= \alpha^2 I - \Delta [(C_a P - \tilde{C}) C_a^T - (C_a - \tilde{C} QR^{-1}) \tilde{C}^T] \\ &= \alpha^2 I - \Delta [-D_e B_a^T \hat{A}^T C_a^T + (\alpha^2 C_a \\ &\quad + D_e B_a^T \hat{A}^T Q) R^{-1} (P C_a^T + \hat{A} B_a D_e^T)] \end{aligned} \tag{39}$$

(39)의 양변에 R^{-T} 를 곱하고 이 식을 (38)의 좌변에 대입하면 행렬 대수연산을 거쳐 (38)이 성립함을 보일 수 있다. ■

\tilde{D} 를 유도하기 위해 (39)로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_e (I + \Delta B_a^T \hat{A}^T QR^{-1} \hat{A} B_a) D_e^T + \Delta D_e B_a^T \hat{A}^T \\ (QR^{-1} P - I) C_a^T + \alpha^2 \Delta C_a R^{-1} \hat{A} B_a D_e^T \\ + \alpha^2 (\Delta C_a R^{-1} P C_a^T - I) = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

$B_a = [B \ 0], C_a^T = [C^T \ 0], QR^{-1} P - I = \alpha^2 R^{-T}$ 를 이용하면 (40)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} D_e \left[\begin{array}{c|c} I + \Delta B^T \hat{A}^T QR^{-1} \hat{A}^T B & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] D_e^T \\ + \Delta D_e \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 B^T \hat{A}^T R^{-T} C^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \\ + \Delta \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 C R^{-1} \hat{A} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] D_e^T \\ + \alpha^2 \left[\begin{array}{c|c} \Delta C R^{-1} P C^T - I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array} \right] = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

위의 유사한 방법으로 (29), (35)로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_e^T \left[\begin{array}{c|c} I + \Delta C \hat{A} R^{-1} P \hat{A}^T C^T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] D_e \\ + \Delta D_e^T \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 C \hat{A} R^{-1} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \\ + \Delta \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 B^T R^{-T} \hat{A}^T C^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] D_e \end{aligned}$$

$$+ \alpha^2 \begin{bmatrix} \Delta B^T Q R^{-1} B - I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = 0. \quad (42)$$

이제 D_e 를 다음과 같이 4개의 블록으로 나누고

$$D_e = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

(41)과 (42)를 연립하여 D_e 를 구하면 다음과 같다.

$$D_{11} = -\Delta \alpha^2 C R^{-1} \hat{A} B (I + \Delta B^T \hat{A}^T Q R^{-1} \hat{A} B)^{-1} \quad (44)$$

$$D_{21}^T D_{21} = \alpha^2 (I + \Delta B^T \hat{A}^T Q R^{-1} \hat{A} B)^{-1} \quad (45)$$

$$D_{12} D_{12}^T = \alpha^2 (I + \Delta C \hat{A} R^{-1} P \hat{A}^T C^T)^{-1} \quad (46)$$

여기서 D_{11} , D_{12} , D_{21} 는 각각 $n \times m$, $n \times n$, $m \times m$ 행렬이고, (45)과 (46)의 우변에서 $(I + \Delta B^T \hat{A}^T Q R^{-1} \hat{A} B)^{-1}$, $(I + \Delta C \hat{A} R^{-1} P \hat{A}^T C^T)^{-1}$ 는 양한정이므로 D_{12} 와 D_{21} 은 항상 실해를 가진다

이상의 결과들을 정리하면, (35)-(37)과 (44)-(46)로부터 $\alpha^{-1}[G_a(\gamma) - J(\gamma)]$ 가 전역이 되는 상태변수 형태 $J(\gamma)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$J(\gamma) = \left[\begin{array}{c|cc} -(A^T + B_1 B^T) \hat{A}^T & B_1 & -R^{-T} \hat{A}^T C^T D_{12} \\ \hline CP + (D - D_{11}) B^T \hat{A}^T & D - D_{11} & -D_{12} \\ -D_{21} B^T \hat{A}^T & -D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (47)$$

여기서 $B_1 = R^{-T} [\hat{A}^T C^T (D - D_{11}) + Q B]$ 이다.

(A_e, B_e, C_e, D_e) 와 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 가 최소실현이 되어야 하므로 A_e 는 안정경계면상에 고유값을 가질 수 없다. 그런데 A_e 는 블록대각 행렬, P_e 와 Q_e 는 정방 행렬, A 는 점근적으로 안정하기 때문에 \tilde{A} 가 안정경계면상에서 고유값을 가지지 않아야 한다. 다음의 보조정리는 보조정리 3의 Lyapunov 방정식을 이용하여 위 사실을 증명한다.

보조정리 4 : (37)에 의해 정의된 \tilde{A} 는 안정 경계면 상에서 어떠한 고유값도 가지지 않는다. 즉,

$$\xi_d(\tilde{A}) = 0 \text{ 이다.} \quad (48)$$

증명 : Kavranoglu[6]의 보조정리 4와 유사하게 안정경계면상에서 \tilde{A} 가 어떠한 모드도 가지지 않음을 두 단계로 나누어 증명한다.

i) \tilde{A} 는 안정경계면상에서 어떠한 제어불능 모드도 가지지 않는다. : (\tilde{A}, \tilde{B}) 가 안정경계면상에서 어떤 제어불능 모드도 가진다고 가정하자. 그러면 다음을 만족하는 실수 ω 와 벡터 x 가 존재한다.

$$x^* \tilde{A} = x^* (-A^T - B_1 B^T) \hat{A}^T = \left(\frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) x^* \quad (49)$$

$$x^* \tilde{B} = x^* [B_1 \quad R^{-T} \hat{A}^T C^T D_{12}] = [0 \quad 0] \quad (50)$$

(49)와 (50)으로부터

$$-x^* A^T \hat{A}^T = \left(\frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) x^* \quad (51)$$

여기서 $-A^T \hat{A}^T$ 는 (11)에서와 같이 $G(\gamma)$ 의 공액복소 시스템이므로 행렬 A 가 안정경계면상에서 어떠한 고유값을 갖지 않으면 공액복소 시스템도 안정경계면상에서 고유값을 갖지 않으므로 (51)은 이 사실에 모순된다. 따라서 \tilde{A} 는 안정경계면상에서 어떠한 제어불능 모드도 가

지지 않는다.

ii) \tilde{A} 가 안정경계면상에서 어떠한 제어가능한 모드를 가지지 않는다. : (\tilde{A}, \tilde{B}) 가 안정경계면상에서 어떤 제어가능한 모드를 가진다고 가정하자. 그러면 다음을 만족하는 어떤 실수 ω 나 벡터 x 가 존재하지 않는다.

$$x^* \tilde{A} = \left(\frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) x^* \quad (52)$$

$$x^* \tilde{B} = 0 \quad (53)$$

(52)을 만족하는 x 를 취하고 (38)과 같은 Lyapunov 방정식에 x^* 를 왼쪽에 x 를 오른쪽에 곱하면 다음과 같은 관계를 얻게된다.

$$\begin{aligned} & x^* \tilde{A} Q R^{-1} x + x^* Q R^{-1} \tilde{A}^T x + x^* \tilde{B} \tilde{B}^T x \\ & + x^* \Delta \tilde{A} Q R^{-1} \tilde{A}^T x = \left\{ \left(\frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{e^{-j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) + \Delta \left(\frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) \left(\frac{e^{-j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right) \right\} x^* Q R^{-1} x \\ & + x^* \tilde{B} \tilde{B}^T x = x^* \tilde{B} \tilde{B}^T x = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

(54)은 $x^* \tilde{B} = 0$ 이므로 (52), (53)을 동시에 만족하는 벡터 x 가 존재하지 않는다는 가정은 모순된다. 따라서 \tilde{A} 는 안정경계면상에서 어떠한 제어가능한 모드도 갖지 않는다. 이상과 같이 i)과 ii)로부터 안정경계면상에서 어떠한 모드가 존재할 수 있는 가정을 모두 반박함으로써 증명이 완성된다. ■

3. 최적 한켈 놈 근사화 문제의 모든 해

이 절에서는 하선형 분해 변환(LLFT)을 이용하여 한켈 놈 근사화 문제의 해를 구한다. 유도된 해는 샘플링 주기를 조절함에 따라서 연속형과 이산형을 모두 나타내는 통합형의 형태를 가진다. 즉, 샘플링 주기를 0으로 가까이 가져가면 연속형의 해로 수렴된다.

한켈놈 근사화 문제의 해를 구하기 위해서는 몇 가지 보조정리를 필요로 한다. 우선 Lyapunov 방정식을 만족하는 어떤 행렬에 있어서 $J(\gamma)$ 의 안정경계내부의 극점의 숫자는 (22)에서 주어진 $G(\gamma)$ 의 한켈 특이치의 숫자와 동일하므로 극점의 정확한 숫자를 결정하는 것이 필수적이다. Lyapunov 방정식의 해와 시스템의 극점간에 연결은 다음 보조정리에서 알 수 있다.

보조정리 5 : $n \times n$, $n \times m$ 행렬 A 와 B 에 대하여, 다음의 Lyapunov 방정식을 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재한다면

$$AP + PA^T + BB^T + \Delta APA^T = 0, \quad (55)$$

i) (55)에 대한 유일한 해가 존재한다.

단, $\lambda_i(A) + \lambda_j(A)^* + \Delta \lambda_i(A) \lambda_j(A)^* \neq 0, \forall i, j$ 일때,

ii) $\xi(P) = 0$ 이면 $\pi_d(A) \leq \nu(P), \nu_d(A) \leq \pi_d(A)$ 이다.

iii) $\xi_d(A) = 0$ 이면 $\pi(P) \leq \nu_d(A), \nu(P) \leq \pi_d(A)$ 이다.

iv) (A, B) 가 제어가능하면 $\pi_d(A) = \nu(P), \nu_d(A) = \pi(P), \xi_d(A) = \xi(P)$.

증명 : (55)는 연속형에서는 Glover[1]의 정리3.3에 의하여 제시되었으므로 여기서는 (55)를 만족하는 양한정 행렬 P 가 (20)과 같은 양선형 변환을 통하여 δ -영역에서의 A 에 대응되는 연속형 시스템의 A 행렬을 A_1 이라고 할 때 이에 대해서도 성립함을 보이면 된다.

$$A_1 \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1 \right)^{-1} P + P \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1^T \right)^{-1} A_1$$

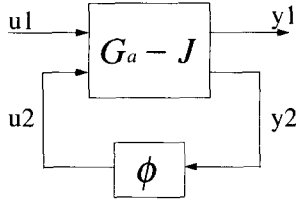
$$\begin{aligned}
 & + \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1\right)^{-1} B_1 B_1^T \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1^T\right)^{-1} \\
 & + \Delta \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1\right)^{-1} A_1 P A_1^T \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1^T\right)^{-1} \\
 & = \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1\right)^{-1} (A_1 P + P A_1^T + B_1 B_1^T) \\
 & \quad \times \left(I - \frac{\Delta}{2} A_1^T\right)^{-1} = 0
 \end{aligned}$$

여기서 (55)를 만족하는 P 는 양선형 변환을 통하여 연속형에 대응하는 Lyapunov 방정식, $A_1 P + P A_1^T + B_1 B_1^T = 0$ 을 만족하므로 $In_d(A) = In(A_1)$ 이다. ■

다음 보조정리는 전역해와 하선형 분해변환(LLFT)을 이용하여 (22)에서 주어진 문제의 해를 구하는데 중요한 역할을 한다.

보조정리 6[11] : 다음의 되먹임 시스템에서

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad J \in RH_{\infty}^-, \quad \Phi \in RH_{\infty}^-$$



$\alpha^{-1}(G_a - J)$ 가 전역, $J_{21}^{-1} \in RH_{\infty}^-$, $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 이고 Φ 는 진유리 행렬이라면 다음은 동치이다.

- i) $F_L(J, \Phi) \in RH_{\infty}^-$ 그리고 $\|T_{y1u1}\|_{\infty} \leq \alpha$
- ii) $\Phi \in RH_{\infty}^-$ 그리고 $\|\Phi\|_{\infty} \leq \alpha^{-1}$

증명 : Dolye[11]의 보조정리 15참조. ■

이상과 같은 보조정리들을 이용하면 다음과 같이 한켈 놈 근사화 문제의 해를 구할 수 있다.

정리 1 : 한켈 놈 근사화 문제의 모든 해는 되먹임 항 $\Phi(\gamma)$ 를 다음과 같이 삼입함으로써 얻을 수 있다.

$$X(\gamma) = F_L(J(\gamma), \Phi(\gamma)), \quad (56)$$

여기서 $\Phi \in RH_{\infty}^-$, $\|\Phi\|_{\infty} \leq \alpha^{-1}$ 이다.

증명 : $X(\gamma)$ 는 보조정리 5와 보조정리 6의 조건식을 만족한다면 (21)의 \hat{G} 이 k 개의 McMillan 차수를 가지므로 i) \hat{A} 의 극점중 k 개는 반드시 안정경계외부에 있어야 하고 ii) $J_{21}^{-1} \in RH_{\infty}^-$ 과 $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 이 성립함을 보여 증명할 수 있다.

i) 우선 앞장에서 구한 \hat{A} 에 대하여 QR^{-1} 의 관성을 고려하면,

$$\begin{aligned}
 In(QR^{-1}) &= In(R - Q^{-1}) = In(Q^{\frac{1}{2}} P Q^{\frac{1}{2}} - \alpha I) \\
 &= In[\text{diag}(\rho_i^2 - \alpha I)] = (k, n - k, 0)[1]. \quad (57)
 \end{aligned}$$

따라서 보조정리 5와 (57)에서 \hat{A} 는 k 개 보다 작은 극점을 안정경계면 밖에서 갖지 않음을 알 수 있고 또한 보조정리 2에 의해 안정경계면 상에서 어떠한 고유값도 갖지 않는다.

ii) $\|\Phi\|_{\infty} < \alpha^{-1} \in RH_{\infty}^-$ 이고 $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 이면 $T_{y2u1} = J_{21}^{-1}(I - J_{22}\Phi) \in RH_{\infty}^-$ 이므로 소이득정리에 의하여 J_{21}^{-1}

$\in RH_{\infty}^-$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 을 증명하면 된다. 그런데 $J(\gamma)$ 는 $\|G_a - J\|_{\infty} = \alpha I$ 가 되는 해이므로 전역의 성질을 이용하면

$$J_{12}^T J_{12} + J_{22}^T J_{22} = \alpha^2 I, \quad (58)$$

이므로 모든 ω 에 대하여 만약 $J_{12} J_{12}^T \neq 0$ 이면 $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 이다. 그러므로 $\det \left[J_{12} \left\{ \frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} \right\} \right] \neq 0$ 임을 증명하면 된다. (47)로부터, $\det(J_{12})$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \det(J_{12}) &= \det(D_{12}) \cdot \det \{ \gamma I + [A^T \\
 &+ R^{-T}(\hat{A}^T C^T D_{11} B^T + Q B B^T) \hat{A}^T] \\
 &- R^{-T} \hat{A}^T C^T (C P + D_{11} B^T) \hat{A}^T \} \div \det(\gamma I - \hat{A}) \\
 &= \det(D_{12}) \cdot \det(\gamma I + A^T \hat{A}^T + R^{-T} Q B B^T \hat{A}^T \\
 &- R^{-T} \hat{A}^T C^T C P) \div \det(\gamma I - \hat{A}) \\
 &= \det(D_{12}) \cdot \det(\gamma I + R^{-T} \hat{A}^T A^T R^T) \div \det(\gamma I - \hat{A})
 \end{aligned}$$

여기서 보조정리 2에서와 같이 $\lambda, (-\hat{A}^T A^T)$ 가 안정경계면상에서 존재하지 않으므로 $\det(R^{-T} \hat{A}^T A^T R^T) \neq 0$ 이고 또한 $\det(D_{12}) \neq 0$ 이므로 $\det(J_{12}) \neq 0$ 이다. 그러므로 $\|J_{22}\|_{\infty} < \alpha$ 이다. ■

이상과 같이 한켈 놈 근사화 문제의 해는 (21)에서 설정한 $\|G - X\|_{\infty} \leq \alpha$ 를 만족하는 최소 놈을 가진 $X(\gamma)$ 를 구하기 위하여 다음과 같은 하선형 분해변환을 이용하여

$$G - X = F_L(G_a - J, \Phi) = G - F_L(J, \Phi), \quad (59)$$

(59)와 같이 (22)를 변형하고, $J(\gamma)$ 가 설정된 오차 한계 α 를 만족하도록 하는 것이다.

IV. 모의실험

이 장에서는 정리 1의 최적 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해를 이용하는 모의실험을 수행한다. 먼저 건설 H_{∞} 제어문제에서 최적제어기를 설계하는데 있어서 핵심적인 역할을 하는 0차 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해를 구하고, 다음에 고차모델로부터 축소차수 모델을 구하는 문제를 다루기로 한다.

모의실험을 위하여 대상모델로서 Chiang[12]등이 사용한 16차 모델을 사용한다. 주어진 모델이 (2)와 같이 연속형 모델이므로 (3)-(6)을 이용하여 (2)의 이산형 모델을 유도한다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘이 통합형이므로 샘플링 주기를 연속형을 위한 0(sec.) 또는 이산형을 위한 적절한 주기를 선택할 수 있다. 이 장의 모의실험에서는 샘플링 주기를 0.01 (sec.)로 하여 이산형 모델을 유도하였으며 또한, 이산형과의 비교 분석을 위해 샘플링 주기를 0(sec.)로 한 연속형도 함께 사용하였으며 이 해는 Glover[3]에 의해 제안된 연속형 해와 동일하다. (2)의 이산형 모델은 <부록 가>에 첨부하였다.

우선 0차 한켈 놈 근사화 문제의 해를 구하여 본다. (21)에서 $G(\gamma) \in RH_{\infty}$ 일 때, X 를 대신하여 $F \in RH_{\infty}$ 인 F 만으로도 다음과 같은 식을 정의할 수 있다.

$$\|G\|_H = \min_{F \in RH_{\infty}} \|G - F\|_{\infty} \quad (60)$$

여기서 $\|G - F\|_{\infty} \leq \sigma_1(G)$ 를 만족한다. 따라서 정리 1을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(\gamma) = F_L(\mathcal{J}(\gamma), \Phi(\gamma)), \quad (61)$$

즉, (22)의 α 를 $\alpha = \sigma_1(G)$ 로 설정하면 된다. 따라서 주어진 모델[13]으로부터 α 를 설정하기 위해 특이값 행렬을 이산형과 연속형에 대하여 각각 $\alpha(G), \alpha(G_c)$ 라고 할 때 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= [\sigma_1(G) \ \sigma_2(G) \ \dots \ \sigma_{16}(G)] \\ &= [3.77e-01 \ 3.77e-01 \ 3.09e-01 \ 2.99e-01 \ 8.12e-02 \\ &\quad 6.88e-02 \ 1.54e-03 \ 1.38e-04 \ 2.51e-07 \ 1.46e-07 \\ &\quad 6.94e-09 \ 1.02e-09 \ 1.02e-09 \ 4.70e-12 \ 0 \ 0] \quad (62) \\ \alpha(G_c) &= [\sigma_1(G_c) \ \sigma_2(G_c) \ \dots \ \sigma_{16}(G_c)] \\ &= [3.19e-01 \ 3.19e-01 \ 3.11e-01 \ 3.00e-01 \ 7.70e-02 \\ &\quad 6.53e-02 \ 1.53e-03 \ 1.38e-04 \ 3.28e-07 \ 1.50e-07 \\ &\quad 2.36e-09 \ 1.18e-09 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (63) \end{aligned}$$

그러므로 여기에서는 α 를 $\sigma_1(G) = 0.377$ 과 $\sigma_1(G_c) = 0.319$ 로 각각 설정하였다. 따라서 F 는 $\|G - F\|_\infty \leq 0.377, 0.319$ 를 만족하도록 각각 설계되어야 한다. 남은 설계 변수로는 자유설계 계수인 되먹임 항 $\Phi(\gamma)$ 를 설계하여야 하는데 간단히 설계할 수 있는 방법으로 $\Phi(\gamma) = 0$ 으로 설정하였다[13][14].

그림 1과 그림 2는 0차 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해를 이용하여 주어진 모델에 대해서 이산형과 연속형으로 각각 설계한 결과이다. α 를 log 스케일로 변환하면 각각 -8.2(dB)과 -9.6(dB)이므로 그림과 같이 $\|G - F\|_\infty$ 는 설정한 α 값을 만족하면서 $F(\gamma)$ 를 이산형과 연속형에 대하여 각각 설계할 수 있었다.

다음으로 주어진 16차 모델을 이산형과 연속형으로 각각 7차 모델로 근사화하는 문제를 다룬다. 우선 정리 3.1로 부터 3장의 문제설정에서 주어진 다음의 $X(\gamma)$ 를 구한다.

$$\|G - X\|_\infty \leq \alpha \quad (64)$$

여기서 $X(\gamma)$ 는 $X = \hat{G} + F$ 이고 \hat{G} 은 k 의 McMillan 차수를 가지며 $\hat{G} \in RH_\infty$ 이고 F 는 $F \in RH_\infty$ 이다. 또한 α 는 $\sigma_k(G) > \alpha > \sigma_{k+1}(G)$ 이므로 7차 모델로 근사화하기 위해서는 $k=7$ 로 둔다. 그러면 α 는 $\sigma_7(G)$ 과 $\sigma_8(G)$ 사이의 임의의 값을 선정할 수 있다. 여기에서 α 를 이산형과 연속형에 대해 각각 $\sigma_7(G) > 0.00153 > \sigma_8(G), \sigma_7(G_c) > 0.00152 > \sigma_8(G_c)$ 로 선정하였다. 마지막으로 계산된 $X(\gamma)$ 를 인과적 \hat{G} 과 비인과적 F 로 나눔으로써 7차 근사화 모델인 \hat{G} 을 설계할 수 있다. 축소된 모델은 표 1, 표 2와 같으며, 주파수 응답특성은 그림 3, 그림 4와 같다. 여기서 저주파 대역에서 오차가 발생하고 있지만, 이때 플랜트의 이득이 -40(dB)이하로서 실제 응답에는 거의 영향을 미치지 않는다. 전대역에서 오차를 극소화 시키야 한다면 자유설계 계수인 되먹임항 $\Phi(\gamma)$ 를 적절히 설정하면 된다. 그림 1과 그림 3에서 고주파 영역에서 진동이 발생하는 것은 제안된 해가 이산형임을 나타낸다.

V. 결론

이 논문에서는 δ -연산자를 이용하여 기존에 연속형과 이산형으로 각각 유도되었던 최적 한켈 놈 근사화 문제의 통합형 해를 제시하였다. 제안된 통합형 해가 연속형과 이산형으로 간단히 변환이 되는 것을 보이기 위해 16차 다변수 연속형 모델을 이용하여 샘플링 주기 Δ 를

0(sec.)와 0.01(sec.)로 각각 설정하고 설정된 오차 허용 한계 α 를 만족하는 0차 한켈 놈 근사화 문제와 7차 축소모델 설계를 연속형과 이산형으로 각각 설계하였으며, 결과가 만족할 만함을 예시하였다. 차후 연구과제로서는 제안된 해를 이용하여 실제 제어를 설계하고 실시간 실험을 통하여 통합형 접근법의 유용함을 보이는 것이다.

표 1. 이산형 7차 근사화 모델.

Table 1. Discrete 7 degree approximation model.

A	1.001450e+00	-1.748907e-03	1.447678e+03	5.952171e+00	1.303648e+06	5.049944e-05	1.831943e-05
	2.440129e+03	2.381355e-01	1.400878e+00	7.132621e+02	1.678947e+04	1.684397e+03	4.120208e-04
	3.834740e+04	3.295602e-04	2.185223e+01	9.176311e+01	2.122458e+05	2.941146e+01	5.610310e-04
	7.927493e+05	6.729058e-05	2.862201e+05	1.140312e+01	3.761423e+02	1.184735e+02	1.753263e+00
	2.527103e+05	2.187107e-05	9.285762e-06	9.848578e+01	1.378307e+01	1.934548e+01	1.194781e+02
	9.782798e+05	8.364521e-05	3.532506e-05	8.624994e+00	9.311228e+05	1.318311e+01	3.883938e+02
	4.294437e+06	-3.622273e-06	1.529720e+06	3.744897e+07	1.034088e+06	-9.845766e+01	1.348435e+01
B	-4.738742e+04	6.186655e-04					
	2.564282e+03	1.679043e+03					
	5.220130e+03	3.271284e+03					
	3.273256e+03	5.297420e+01					
	1.754147e+01	6.558241e+00					
	1.827825e+01	3.201297e+01					
	3.3037164e+00	2.082748e+00					
C	1.386737e-07	1.010827e-03	1.4518134e-03	4.088002e-02	2.123548e+00	7.284267e-04	4.378887e-01
	1.6171801e-06	2.183125e-03	1.280108e-03	9.190223e-02	1.257248e+00	1.283127e+00	2.224470e+00
D	1.672000e-01	1.547000e-02					
	1.547000e-02	1.672000e-01					

표 2. 연속형 7차 근사화 모델.

Table 2. Continuous 7 degree approximation model.

A	5.427193e-01	8.790349e+02	2.4890344e-03	6.328124e-04	1.913838e+04	6.2110657e-04	2.6763534e-05
	1.1084482e+11	3.0121174e+01	1.225225e+01	1.3615730e+03	8.3846580e+03	6.6324275e+04	6.8272243e+04
	1.8853777e+11	1.2888847e+11	2.7211356e+01	1.5300891e+03	2.3480999e+03	1.7891254e+04	1.0484736e+02
	8.833158e+12	2.4939540e+12	2.9295222e+11	2.0808981e+01	4.1815734e+01	3.3580022e+02	3.4124576e+02
	1.9231314e+12	3.7649111e+12	2.6815704e+11	3.8525333e+01	4.6213895e+01	3.6598776e+02	3.4704914e+02
	1.5509255e+12	3.1009382e+13	1.2403635e+12	9.8886180e+13	2.1328431e+12	1.1458872e+01	7.9257312e+01
	1.0417238e+13	3.2583171e+13	9.8548908e+13	3.9061166e+13	1.1115667e+13	5.9611577e+01	1.1210698e+01
B	1.5681077e+05	2.0381351e+04					
	7.3068567e+03	6.6183650e+03					
	7.8412562e+02	2.277823e+03					
	4.9884723e+01	3.3871498e+01					
	3.8331196e+01	4.4162310e+01					
	9.3443288e+00	5.683002e+00					
	4.9357775e+00	1.1749215e+01					
C	6.7846773e-06	7.7834725e-04	2.2423863e-03	3.8725825e-03	1.1331648e-01	1.0796234e+00	4.9170930e+00
	6.3003001e-07	2.1400274e-01	2.8891493e-03	5.1288930e-01	6.5465331e-01	4.9168217e+00	1.1540361e+00
D	1.6720000e-01	1.5470000e-02					
	1.5470000e-02	1.6720000e-01					

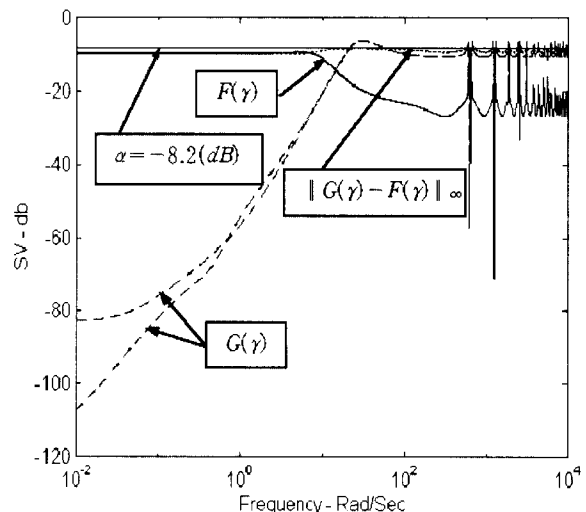


그림 1. 이산형에서의 0차 한켈 놈 근사화. Fig. 1. Discrete 0 degree Hankel norm approximation

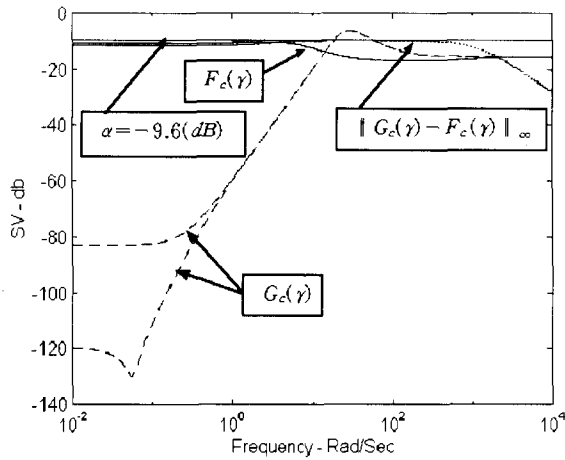


그림 2. 연속형에서의 0차 한켈 놈 근사화.
Fig. 2. Continuous 0 degree Hankel norm approximation.

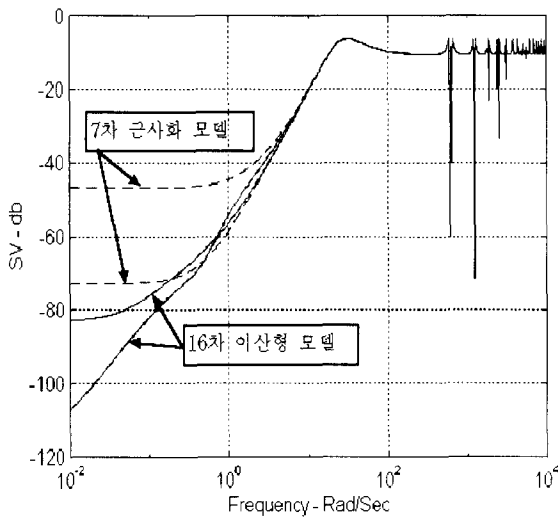


그림 3. 이산형에서의 7차 근사화 모델.
Fig. 3. Discrete 7 degree approximation.

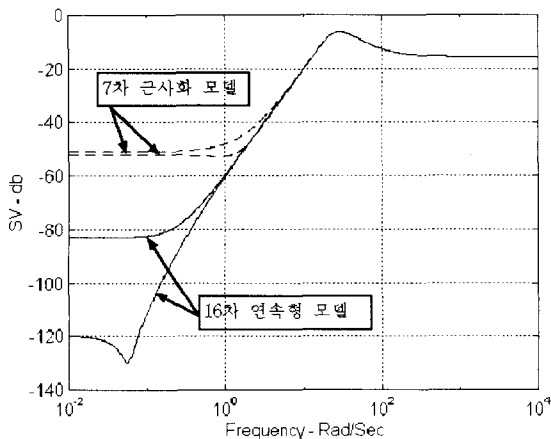


그림 4. 연속형에서의 7차 근사화 모델.
Fig. 4. Continuous 7 degree approximation.

참고문헌

[1] G. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations linear multivariable systems and their L_∞

-error bounds," *Int. J. of Control*, vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.

[2] M. G. Safonov, R. Y. Chiang and J. N. Limebeer, "Hankel-norm model reduction without balancing - A descriptor approach," *Proc. 26th CDC*, pp 112-117, 1987.

[3] K. Glover, "Model reduction : A tutorial on Hankel-norm methods and lower bounds on L_2 errors," *Proc. 10th IFAC Congress*, Munich, pp. 288-293, 1987.

[4] B. A. Frances, *A Course of H_∞ Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, Springer-Verlag, 1987.

[5] D. W. Gu, M. C. Tsai, S. D. O'Young and I. Postlethwaite, "State-space formula for discrete-time H_∞ optimization," *Int. J. of Control*, vol. 49, pp. 1683-1723, 1983.

[6] D. Kavranoglu and M. Bettayeb, "Direct state-space solutions to the discrete-time Hankel-norm reduction problem," *Proc. '92 ACC*, pp. 328-342, 1992.

[7] D. Kavranoglu and A. Sideris, "A simple solution to H_∞ optimization problem," *Proc. 28th CDC*, pp. 753-758, 1989.

[8] D. C. McFalane and K. Glover, *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 138, Spring-Verlag, 1990.

[9] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation: Unified Approach*, Prentice-Hall, 1990.

[10] S. S. Youn and O. K. Kwon, "A unified H_∞ controller design to continuous and discrete NLCF models," 대한전기학회 영문논문지, 게재예정, 1998.

[11] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. A. Frances, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, pp. 831-847, 1989.

[12] R. Y. Chiang and M. G. Safonov, "The LINF computer program for L_∞ controller design," *USC EE Report EECG-0785-1*, ver. 1.0 & 2.0, July, 1986 & 1987.

[13] K. Glover and D. Mustafa. "Derivation of the maximum entropy H_∞ controller and a state-space formula for its entropy," *Int. J. of Control*, pp. 896-916, 1989.

[14] D. J. N. Limebeer, E. Kasenally, I. Jaimouka, and M. G. Safonov "All solutions to the four-block general distance problem," *Proc. 27th IEEE CDC*, pp 875-880, Austin, 1988.

[15] 이근석, 윤상순, 권오규, "통합형 H_∞ 제어기법에 의한 발사체의 자동조종장치 설계," 한국항공우주학회지, 제23권, 제1호, pp. 1-8, 1995.

