

# 양실 시스템의 시간영역에서의 특성

## Properties of Positive Real Systems in Time Domain

심 덕 선  
(Duk-Sun Shim)

**Abstract** : This paper provides some properties of positive real systems in time domain. It is well-known that a positive real system and a bounded real system are closely related by bilinear transform in a frequency domain. By using supply rate and storage function, we show that a positive real system can be transformed into a bounded real system, and that a positive real system can be transformed into another positive real system with in a time domain. Also, we show that an ESPR(extended strictly positive real) system can be decomposed into a feedback system of lossless positive real system and another ESPR system. These results may be used to design an output feedback controller for mixed  $H_2$ /ESPR problem.

**Keywords** : robust control, positive real, bounded real, supply rate, algebraic Riccati equation

### I. 서론

제어이론의 근본적인 문제는 주어진 시스템에 불확실성이 존재하는 상황에서 그 시스템으로부터 원하고자 하는 동작이나 성능을 얻는 것이다. 불확실성은 모든 시스템의 환경이나 시스템의 모델에 존재한다. 이와같이 불확실성을 포함한 시스템에 제어이론을 적용하는 분야를 견실제어(robust control)라고 한다. 불확실성은 어디에나 존재하므로 모든 제어는 근본적으로 견실 제어여야 한다고 보아도 과언이 아니다. 현대 견실 제어이론은 1970년대 중반부터 시작되었고  $H_\infty$  제어,  $L_1$  제어, Kharitonov 이론, 뮈이론, Youla 매개변수이론, 양실(positive real)제어 등 여러 분야에 걸쳐 발전되어 오고 있다.

이중 양실제어는 1960년대에 비선형제어이론의 안정성 문제에 양실 시스템(positive real system) 이론이 사용된 이후 1980년대 말에 들어와서 다시 주목받고 있는 분야이다. 양실제어는 1981년 이후 많이 연구되고 있는  $H_\infty$  제어분야와 아주 밀접한 관계가 있다.  $H_\infty$  제어 이론은 최악의 외부 입력에 대해서 주어진 성능 지수를 최적화하는 제어를 설계하는 것에 중점을 두는데 소이득 정리(small gain theorem)에 기초를 두고 있다. 이 소이득 이론은 시스템의 크기(norm)만을 고려하기 때문에 아주 보수적(conservative)인 결과를 줄 수 있다는 것이 잘 알려져 있다. 예를 들어 상수인 실수매개변수 불확실성을 소이득 모델로 모델링 하였을 때는 그 결과가 매우 보수적이다. 이런 문제에 대처하기 위해 어떤 시스템이 위상(phase) 정보를 가졌을 경우 양실 시스템 이론을 사용하면 좋다. 위상 정보를 가진 시스템의 한 예를 들면 경계동유연구조(lightly damped flexible structure)를 들 수 있는데 이 구조에 속도센서와 힘 구동기를 같은 곳에 위치시키면 센서와 구동기 사이의 전달함수가 양실함수가 된다.

이론적인 면에서 양실 개념의 적용범위는 네트워크 해석, 적응제어, 비선형제어에서부터 견실제어 이론에까지 이른다. 실제적인 면에서는 양실제어이론은 우주 공간의 대형안테나, 우주 정거장과 같은 대형 우주 구조물에 적용되

고 있으며 또한 로봇 머니플레이션에도 응용되고 있다.

양실제어문제에 대한 제어기 설계는 [1][2][3]에서 다루어졌는데 모두 폐회로의 안정성 문제만을 다루고 있다. [4]에서는 폐회로의 안정성 및 성능을 동시에 얻기 위한 혼합문제(mixed problem)를 다루고 있는데 혼합문제에 대한 상태변수케환제어기만 구성하였다.

본 논문의 목적은 양실시스템의 시간영역에서의 특성을 찾아보는데 있다. 주파수 영역에서는 양실 시스템과 이와 밀접한 관련이 있는 노음제한 시스템의 특성과 양방향 변환을 통하여 두 시스템간의 변환이 가능하다는 사실 등의 여러 특성이 알려져 있다. 본 논문에서는 이런 특성들을 시간영역에서도 찾을 수 있음을 보인다. 이것은 시스템의 특성 분석(analysis)을 위해서도 필요하지만 그것을 기초로 하여 아직 풀리지 않은 혼합  $H_2$ /ESPR(extended strictly positive real)문제의 출력케환제어를 설계하는데 적용될 수 있다.

### II. 양실 시스템의 정의

이 절에서는 앞으로 사용될 용어에 대한 정의와 시스템 해석에 대한 기본 개념을 살펴본다.

다음의 시스템  $\Sigma_C$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ z &= Cx + Dw \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x$ 는 상태변수,  $u$ 는 입력,  $z$ 는 출력이며 행렬  $A, B, C, D$ 는 상수이며 적절한 차원을 갖는다.

먼저 시스템의 양실성(positive realness)의 정의에 대하여 살펴본다.

정의 1 : 1) 시스템  $\Sigma_C$ 의 전달 함수  $G(s)$ 가  $Re(s) > 0$ 를 만족하는 모든  $s$ 에서 해석적이며  $G(s) + G^*(s) \geq 0$  이면 시스템  $\Sigma_C$ 는 양실(positive real, 이후부터는 PR)이라고 한다. 2) 시스템  $\Sigma_C$ 의 전달 함수  $G(s)$ 가  $Re(s) \geq 0$ 를 만족하는 모든  $s$ 에서 해석적이며,  $\omega \in [0, \infty)$ 에서  $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$ 을 만족하면 시스템  $\Sigma_C$ 는 순양실(strictly positive real, 이후부터는 SPR)이라고 한다. 3) 시스템  $\Sigma_C$ 가 SPR이고  $G(j\infty) + G^*(j\infty) > 0$ 을 만족하면 시스템  $\Sigma_C$ 는 확장순양실(extended strictly positive real, 이후부터는 ESPR)이라고 한다. 4) 시스템  $\Sigma_C$ 가 PR이고 전달함수  $G(s)$ 가 극점이 아닌 모든  $j\omega$ 에 대해서

접수일자 : 1997. 9. 2., 수정완료 : 1998. 3. 6.

심덕선 : 중앙대학교 제어계측공학과

\* 본 논문은 1996년도 중앙대학교 교내 학술연구비 지원에 의한 결과입니다.

$G(j\omega) + G^*(j\omega) = 0$ 이면 시스템  $\Sigma_G$ 는 부손실양실(lossless positive real, 이후부터는 LPR)이라고 한다.

PR시스템은 정의에서 모든 전달함수의 위상이  $-90^\circ$ 에서  $+90^\circ$ 사이 존재하며 스칼라 시스템인 경우에는 Nyquist 선도가 복소평면에서 우반평면에 존재한다. PR 시스템과 밀접한 관계가 있는 것이 BR(bounded real) 시스템인데 이 BR 시스템은 노옴의 상한치가 있다. PR 시스템과 BR 시스템은 다음의 양선형 변환(bilinear transform)을 통하여 서로 변환할 수 있다 ;  $S = (I - Z)(I + Z)^{-1}$ , 여기서  $S$ 가 BR 시스템일 필요충분 조건은  $Z$ 가 PR 시스템인 경우이다 [5].

선형시불변이 아닌 시스템을 해석하기 위한 도구로 공급률(supply rate)과 저장함수(storage function)를 사용한다. 공급률은 시스템의 입력과 출력의 함수로서  $r(t) = r(z(t), u(t))$ 로 주어지며 지역적으로 적분가능하다고 가정한다. 시스템의 상태변수  $x$ 의 함수이며 스칼라 함수인 저장함수  $V(x) \geq 0$ 가 모든  $t_0, t_1$ 과 모든 입력  $u$ 에 대해서  $V(x_0) + \int_{t_0}^{t_1} r(\xi) d\xi \geq V(x_1)$ 이 성립하면 이 시스템은 공급률  $r(t)$ 에 대해서 소모적(dissipative)이라고 한다[6][7]. 공급률에 대한 시스템의 에너지 소모성과 동등한 조건은 상태계적  $x(t)$ 에 따라서  $V(t)$ 의 전미분인  $\dot{V}$ 이 모든  $t$ 에 대해서  $\dot{V} \leq r(t)$ 를 만족하는 미분 가능한  $V(x)$ 가 존재하는 것이다.

시스템의 공급률과 저장함수는 일반적으로 특별한 물리적 의미를 갖고 있지 않으나 특별한 경우에는 물리적 의미를 찾아볼 수 있다. 시스템의 입력, 출력이 전압과 전류(또는 힘과 속도)이면 저장함수는 에너지를 나타내며 공급률은 시스템으로 들어가는 전력(또는 에너지의 유입률)을 나타낸다. 그러나 공급률과 저장함수는 에너지의 의미가 아닌 일반적인 함수에도 적용된다. 시스템의 수동성(시불변인 경우에는 양실성)을 테스트하기 위한 공급률은  $r(t) = w'z$ 가 된다. 이 경우  $u$ 가 전압이고  $z$ 가 전류이면  $r(t)$ 는 전력이 된다. 또 시스템의 상한치를 갖는(bounded) 이득을 테스트하기 위한 공급률은  $r(t) = w'w - z'z$ 가 된다. 이와 같은 공급률을 사용하기 위한 통계를 보기 위해 이 공급률을 적분해보자.

$$\int_0^T r(t) dt = \int_0^T w'w dt - \int_0^T z'z dt$$

이 식에서 오른쪽 처음 항은 입력 에너지이며 둘째 항은 출력 에너지가 된다. 따라서 공급률의 적분값이 양수이면 출력 에너지가 임의의 시간  $T$ 에서 입력 에너지보다 작다는 것을 의미하며 이것은 시불변 시스템인 경우에는  $T = \infty$ 일 때 전달함수가  $\|G\|_\infty < 1$ 의 의미하므로 시스템의 이득이 상한치를 갖음을 말한다. 이와 같이 공급률을 사용하면 시간 영역에서 양실성과 노옴한계성을 표현할 수 있으며 더 일반적인 소모성(dissipative) 시스템을 나타낼 수 있다. 본 논문에서 사용할 부호 및 용어를 다음과 같이 정의한다.

“안정한 행렬”이라는 것은 어떤 행렬의 모든 고유치 가 음의 실수부를 갖고 있음을 나타낸다. “내적 안정”한 시스템은 시스템의 모든 외부 입력을 0으로 놓았을 때 상태변수가 시간이 흐름에 따라 0으로 접근하는 시스템을 말한다.  $G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ 는 시스템  $G$ 가  $\dot{x} = Ax + Bw$ ,

$z = Cx + Dw$ 와 같이 행렬  $A, B, C, D$ 로 구현되었음을 말한다.  $T_{zu}$ 는  $w$ 에서  $z$ 로의 전달함수를 말한다.

III. 양실 시스템의 시간 영역에서의 특성

이 절에서는 주파수 영역에서 정의되어진 PR시스템에 대해서 시간 영역에서의 특성을 알아본다.

다음 정리는 시스템이 ESPR인 경우에 시스템의 입력, 출력의 관계를 보여준다.

정리 1 : 1)의 시스템  $\Sigma_G$ 에서  $x(0) = x(\infty) = 0$ 라고 가정하자. 이 시스템이 ESPR이면 입력과 출력  $w(t)$ 와  $z(t)$ 에 대해서 다음식이 성립한다;  $\int_0^\infty z'w dt > 0$ .

증명 :  $\Sigma_G$ 가 ESPR이므로  $D + D' > 0$ 이고 다음 대수리 카티 부등식을 만족하는 실행렬  $X > 0$ 가 존재한다[1].

$A'X + XA + (C - B'X)'(D + D')^{-1}(C - B'X) < 0$  위의 식을 적용한 후 대수계산을 통하여 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & 2z'w - \frac{d}{dt} x'Xx \\ &= (Cx + Dw)'w + w'(Cx + Dw) - x'(A'x + XA)x \\ & \quad - w'B'Xx - x'XBw \\ & > \{\phi^{-\frac{1}{2}}w + \phi^{\frac{1}{2}}(C - B'X)x\}' \{\phi^{-\frac{1}{2}}w + \phi^{\frac{1}{2}}(C - B'X)x\} \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

여기서  $\phi = (D + D')^{-1}$ 이다. 위 식을 0에서  $\infty$ 까지 적분하면  $\int_0^\infty z'w dt > 0$ 를 얻는다. ■

다음의 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \tag{2}$$

여기서  $x$ 는 상태변수,  $w$ 는 외부입력,  $u$ 는 제어입력,  $z$ 는 제어출력,  $y$ 는 측정출력이며 행렬  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ 은 상수이며 적당한 차원을 갖는다. 시스템의 출력  $z$ 에서 입력  $w$ 사이 불확실성이 존재하여  $w = \Delta z$ 의 관계가 있고  $\Delta$ 는 PR이라고 가정하자. 양실 정리(positivity theorem)에 의하면  $T_{zu}$ 가 내적안정하고 SPR(또는 ESPR)이면 불확실성을 포함한 전체 시스템이 안정하다[8]. 따라서  $T_{zu}$ 가 내적안정하고 ESPR이 되도록 제어입력  $u = Ky$ 를 설계하는 것이 필요하다. 이 제어문제를 양실제어문제라 한다. 이 양실제어문제와 관련하여 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 에 대하여 두 대수 리카티함수  $R(X)$ 와  $S(Y)$ 를 도입한다.

$$R(X) := (\bar{A} - \bar{B}_2\bar{E}_C\bar{C}_1)'X + X(\bar{A} - \bar{B}_2\bar{E}_C\bar{C}_1) + X(R_1 - \bar{B}_2\bar{E}_C\bar{B}_2')X + Q_1 - \bar{C}_1'\bar{E}_C\bar{C}_1 \tag{3}$$

$$S(Y) := (\bar{A} - \bar{B}_1\bar{E}_C\bar{C}_2)Y + Y(\bar{A} - \bar{B}_1\bar{E}_C\bar{C}_2)' + Y(Q_1 - \bar{C}_2'\bar{E}_F\bar{C}_2)Y + R_1 - \bar{B}_1\bar{E}_F\bar{B}_1' \tag{4}$$

대수리카티방정식  $R(X) = 0, S(Y) = 0$ 의 해와 관련하여 양실제어문제의 상태변수케환이득과 상태 관측기 이득은 다음과 같다[1].

$$\begin{aligned} F &:= -\bar{E}_C(\bar{C}_1 + \bar{B}_2'X) \\ L &:= -(\bar{B}_1 + Y\bar{C}_2')\bar{E}_F \end{aligned} \tag{5}$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - B_1\phi C_1 \\ \tilde{B}_1 &= B_1\phi D_{21}', & \tilde{B}_2 &= B_2 - B_1\phi D_{12} \\ \tilde{C}_1 &= D_{12}'\phi C_1, & \tilde{C}_2 &= C_2 - D_{21}\phi C_1 \\ R_1 &= B_1\phi B_1', & Q_1 &= C_1'\phi C_1 \\ \mathcal{E}_C &= (D_{12}'\phi D_{12})^{-1}, & \mathcal{E}_F &= (D_{21}\phi D_{21}')^{-1} \\ \phi &= (D_{11} + D_{11}')^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

다음 정리는 ESPR 시스템의 공급률을 BR 시스템의 공급률 형태로 변환할 수 있음을 보여준다.

정리 2 : (2)의 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 이 ESPR이라고 하자. 행렬  $D_{12}$ 는 전렬계수를 갖고  $D_{11} + D_{11}' > 0$ 이며  $x(0) = x(\infty) = 0$  라고 가정하자. 그러면 다음의 등식이 성립한다.

$$2 \int_0^\infty z'w dt = \|\phi^{-\frac{1}{2}}\{w + \phi(D_{12}u + (C_1 - B_1'X)x)\}\|_2^2 - \|\mathcal{E}_C^{-\frac{1}{2}}(u - Fx)\|_2^2 \quad (7)$$

여기서  $F$ 와  $\mathcal{E}_C$ 는 (5)와 (6)에 정의되어 있다.

증명 :  $T_{zw}$ 가 ESPR이므로 (3)의 대수 리카티 방정식  $R(X) = 0$  을 만족하는  $X > 0$ 가 존재하며 다음과 같이 간단한 대수 리카티 방정식으로 바뀔 수 있다.

$$A'X + XA + (C_1 - B_1'X)\phi(C_1 - B_1'X) - F'\mathcal{E}_C^{-1}F = 0 \quad (8)$$

(8)의 대수 리카티 방정식을 적용한 후 대수계산을 통하여 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2z'w - \frac{d}{dt}x'Xx &= (C_1x + D_{11}x + D_{12}u)'w + w'(C_1x + D_{11}x + D_{12}u) \\ &\quad - x'Xx - x'Xx \\ &= \{w + \phi(D_{12}u + (C_1 - B_1'X)x)\}'(D_{11} + D_{11}')\{w + \phi \\ &\quad \cdot (D_{12}u + (C_1 - B_1'X)x) - (u - Fx)'\mathcal{E}_C^{-1}(u - Fx) \end{aligned}$$

윗 식을 0에서  $\infty$ 까지 적분하면 (7)을 얻는다. (7)에서 제어입력이  $u = Fx$ 이면 외부 입력  $u$ 에 관계없이  $\int_0^\infty z'w dt \geq 0$ 임을 알 수 있다. 즉 상태 변수를 알 때는  $w$ 에서  $z$ 까지의 시스템을 PR로 만들기 위한 제어 입력  $u = Fx$ 는 최적제어임을 알 수 있다. 정리 2는 변수 치환을 통하여 PR 제어문제를 BR 제어문제(또는  $H_\infty$  제어문제)로 바꿀 수 있음을 보여준다. 즉  $r$ 과  $v$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\begin{aligned} r &= \phi^{-\frac{1}{2}}\{w + \phi(D_{12}u + (C_1 - B_1'X)x)\}, \\ v &= \mathcal{E}_C^{-\frac{1}{2}}(u - Fx) \end{aligned}$$

(7)로부터  $2 \int_0^\infty z'w dt = \|r\|_2^2 - \|v\|_2^2$ 의 관계식을 얻으며 이것은  $T_{zw}$ 가 PR이면  $T_{vr}$ 이 BR임을 보여준다.

다음 정리는 PR 시스템을 같은 공급률을 갖는 다른 형태의 PR 시스템으로 변환할 수 있음을 보여준다.

정리 3 : 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 이 ESPR이고 행렬  $D_{12}$ 의 역행렬이 존재하며 상태변수  $x(0) = x(\infty) = 0$  라고 가정하자. 그러면 다음 등식이 성립한다.

$$\int_0^\infty z'w dt = \int_0^\infty v'r dt \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} v &= u + \frac{1}{2}D_{12}^{-1}(D_{11} + D_{11}')w + D_{12}^{-1}\{\frac{1}{2}(D_{11} \\ &\quad + D_{11}')D_{12}^{-T}B_2'X + (C_1 - B_1'X)x\} \\ r &= D_{12}(w - D_{12}^{-T}B_2'Xx) \end{aligned} \quad (10)$$

증명 : (8)의 대수 리카티 방정식을 적용한 후 대수계

산을 통하여 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2z'w - \frac{d}{dt}x'Xx &= (C_1x + D_{11}x + D_{12}u)'w + w'(C_1x + D_{11}x + D_{12}u) \\ &\quad - x'Xx - x'Xx \\ &= (C_1x + D_{11}x + D_{12}u)'w + w'(C_1x + D_{11}x + D_{12}u) \\ &\quad - (Ax + B_1w + B_2u)'Xx - x'X(Ax + B_1w + B_2u) \\ &= 2[u + \frac{1}{2}D_{12}^{-1}(D_{11} + D_{11}')w + D_{12}^{-1}\{\frac{1}{2}(D_{11} + D_{11}') \\ &\quad D_{12}^{-T}B_2'X + (C_1 - B_1'X)x\}][D_{12}(w - D_{12}^{-T}B_2'Xx)] \\ &= 2v'r \end{aligned}$$

윗 식을 0에서  $\infty$ 까지 적분하면 (9)를 얻는다. ■

(2)의 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 과 (10)을 사용하여 다음과 같은 시스템을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= (A + B_1D_{12}^{-T}B_2'X)x + B_1D_{12}^{-T}r + B_2u \\ v &= D_{12}^{-1}\{(D_{11} + D_{11}')D_{12}^{-T}B_2'X + C_1 - B_1'X\}x \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{12}^{-1}(D_{11} + D_{11}')D_{12}^{-T}r + u \\ y &= (C_2 + D_{21}D_{12}^{-T}B_2'X)x + D_{21}D_{12}^{-T}r \end{aligned}$$

정리 3은 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 에서  $w$ 에서  $z$ 로의 시스템이 PR일 때 윗 식으로 표현되는 시스템에서 같은 제어입력  $u$ 를 사용할 때  $r$ 에서  $v$ 로의 시스템이 PR임을 의미한다.

보조정리 4[5] : (1)의 시스템  $\Sigma_G$ 를 생각하자. 상태식 구현행렬  $[A, B, C, D]$ 가 최소차수이고 전달함수는  $G(s)$ 라 하자. 그러면  $G(s)$ 가 LPR이 되기 위한 필요충분조건은 다음 세 식을 만족하는 실대칭 행렬  $Y > 0$ 가 존재하는 것이다:

$$\begin{aligned} AY + YA' &= 0 \\ B &= YC' \\ D + D' &= 0. \end{aligned}$$

보조정리 5[9] : 허수 행렬  $M, N \in C^{n \times n}$ 에 대해서  $M + M^* \geq 0$ 과  $N + N^* > 0$ 를 만족하면 모든 양의 실수  $\alpha$ 에 대해서  $\det(\alpha I + MN) \neq 0$ 이 성립한다.

아래 그림과 같은 피드백 연결 시스템을 생각하자.

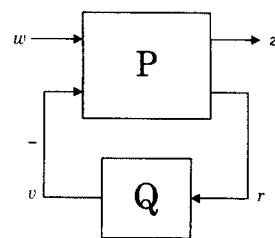


그림 1. P와 Q의 피드백 연결 시스템.

Fig. 1. Feedback system of P and Q.

여기서 시스템 P와 Q는 다음과 같다.

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (11)$$

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] \quad (12)$$

정리 6 : 그림 1에서 시스템 P와 Q는 (11)과 (12)와 같이 주어져 있다고 한다. 행렬  $D_{12}$ 가 정방행렬이고  $D_{12}^{-1}$ 가 존재하며 행렬  $A - B_2D_{12}^{-1}C_1$ 이 안정한 행렬이라고 가정하자. 또 다음 식을 만족하는 대칭행렬  $Y \geq 0$ 가 존재한다고 가정하자.

$$AY + YA' = 0 \quad (13)$$

$$(B_1 \ B_2) = Y(C_1' \ C_2') \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}' = 0 \quad (15)$$

그러면 다음 두 내용은 등가이다.

(1) 그림 1의 피드백 시스템은 well-posed이고 내적 안정하며  $T_{zu}$ 는 ESPR이다. (2) Q는 내적 안정하며 ESPR이다.

증명 : (1  $\Leftarrow$  2) Q가 내적안정하고 ESPR이므로 다음 식을 만족하고

$$\hat{A}Z + Z\hat{A}' + (\hat{B} - Z\hat{C})(\hat{D} + \hat{D}')^{-1}(\hat{B} - Z\hat{C}) = 0 \quad (16)$$

행렬  $\hat{A} - (\hat{B} - Z\hat{C})(\hat{D} + \hat{D}')^{-1}\hat{C}'$ 이 안정한 행렬이 되는 실대칭행렬  $Z \geq 0$ 가 존재한다.

$D_{22} + D_{22}' = 0$ 이고  $\hat{D} + \hat{D}' > 0$ 이므로 보조정리 5에 의해서  $\det(I + D_{22}\hat{D}) \neq 0$ 이다. 그러므로 폐회로는 적합설정(well-posed)이다.  $x$ 와  $\eta$ 가 시스템 P와 Q의 상태변수라 하고  $\bar{x} = (x' \ \eta')$ 라 하자. 그러면 아래와 같은 폐회로 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= F\bar{x} + Gu \\ z &= H\bar{x} + Jw \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} A - B_2\hat{D}\phi C_2 & -B_2(I - \hat{D}\phi D_{22})\hat{C}' \\ \hat{B}\phi C_2 & \hat{A} - \hat{B}\phi D_{22}\hat{C}' \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} B_1 - B_2\hat{D}\phi D_{21} \\ \hat{B}\phi D_{21} \end{bmatrix} \\ H &= [C_1 - D_{12}\hat{D}\phi C_2 \quad -D_{12}(I - \hat{D}\phi D_{22})\hat{C}] \\ J &= D_{11} - D_{12}\hat{D}\phi D_{21} \\ \phi &= (I + D_{22}\hat{D})^{-1} \end{aligned}$$

위 시스템에 대해서 다음 등식

$$R(\bar{Q}) := F\bar{Q} + \bar{Q}F' + (G - \bar{Q}H)(J + J')^{-1}(G - \bar{Q}H)' = 0 \quad (18)$$

을 만족하고  $F - (G - \bar{Q}H)(J + J')^{-1}H$ 가 안정한 행렬이 되는 대칭 행렬  $\bar{Q} \geq 0$ 가 존재함을 보이면 증명이 끝난다.  $\bar{Q}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{Q} := \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

(13)-(16)를 이용하여 대수계산을 해보면  $R(\bar{Q}) := 0$ 가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$F - (G - \bar{Q}H)(J + J')^{-1}H = \begin{bmatrix} A - B_2D_{12}^{-1}C_1 & 0 \\ * & \hat{A} - (\hat{B} - Z\hat{C})(\hat{D} + \hat{D}')^{-1}\hat{C}' \end{bmatrix}$$

여기서 \*는 관계없는 항이다.

행렬  $A - B_2D_{12}^{-1}C_1$ 과  $\hat{A} - (\hat{B} - Z\hat{C})(\hat{D} + \hat{D}')^{-1}\hat{C}'$ 는 안정한 행렬이므로  $F - (G - \bar{Q}H)(J + J')^{-1}H$ 는 안정한 행렬이다. 그러므로 (18)과 안정화 조건을 만족하는 대칭 행렬  $\bar{Q} \geq 0$ 가 존재하므로 폐회로 시스템 (17)은 내적안정하고 ESPR이다.

(1  $\Rightarrow$  2) 증명은 세 부분으로 나누어진다.

1. (13)-(15)로부터 P는 LPR이므로 P의 극점이 아닌 모든  $\omega$ 에 대해서 다음 식이 성립한다[1].

$$P(j\omega) + P^*(j\omega) > 0 \quad (19)$$

주어진 폐회로가 ESPR이므로 위 식을 이용하면 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} T_{zu}(j\omega) + T_{zu}^*(j\omega) &= P_{12}(j\omega)(I + P_{22}(j\omega)Q(j\omega))^{-*} \{Q(j\omega) + Q^*(j\omega)\} \\ &\quad \cdot (I + P_{22}(j\omega)Q(j\omega))^{-1} P_{12}^*(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty] \end{aligned}$$

따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$Q(j\omega) + Q^*(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty] \quad (20)$$

2. 폐회로 시스템이 내적 안정하므로  $(I + P_{22}(s)Q(s))^{-1}$ 도 안정하다. (19)로부터  $P_{22}(j\omega)$ 의 극점이 아닌 모든  $\omega$ 에 대해서  $P_{22}(j\omega) + P_{22}^*(j\omega) = 0$ 이 성립한다. 다음과 같이 실수 집합 W를 정의하자.

$$W := \{\omega \in R : j\omega \text{는 } P_{22}(j\omega) \text{의 극점이 아니다}\}$$

보조정리 5로부터 다음식이 성립한다.

$$\det(aI + P_{22}(j\omega)Q(j\omega)) \neq 0, \quad \forall a > 0, \quad \forall \omega \in W \quad (21)$$

이것은 W에 속하는 모든  $\omega$ 에 대해서  $P_{22}(j\omega)$ 가 음의 실수축에서 고유치를 갖지 않음을 의미한다.  $j\omega_0$ 가  $P_{22}(j\omega)$ 의 극점이라고 가정하고  $j\omega_0$ 점 주위의 케적 C를 다음과 같이 정의하자.

$$C := \{s : s = j\omega_0 + \epsilon e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

그러면 아주 작은  $\epsilon > 0$ 에 대해서 다음 부등식이 계속 성립한다.

$$Q(s) + Q^*(s) > 0, \quad \forall s \in C \quad (22)$$

$P_{22}(s)$ 가 양실함수이므로  $j\omega_0$ 는 단일 극점이고 나머지(residue) 행렬  $K_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0)P_{22}(s)$ 는  $K_0 \geq 0$ 이고 hermitian이다(정리 2.7.2 [5]). 그러므로  $P_{22}(s)$ 는 C에서  $P_{22}(s) \sim \frac{K_0}{s - j\omega_0}$ 로 근사화 할 수 있다.  $s = j\omega_0 + \epsilon e^{i\theta}$ 일

때  $P_{22}(s) = \frac{1}{\epsilon} e^{-i\theta} K_0$ 이다. 따라서 다음식이 성립한다.

$$P_{22}(s) + P_{22}^*(s) = \frac{2}{\epsilon} \cos \theta K_0 \geq 0, \quad \forall s \in C \quad (23)$$

(22)와 (23)과 보조정리 5로부터 다음식이 성립한다.

$$\det(aI + P_{22}(j\omega)Q(j\omega)) \neq 0, \quad \forall a > 0, \quad \forall \omega \in C \quad (24)$$

(21)과 (24)는  $P_{22}(s)Q(s)$ 의 특성값(characteristic values)의 근궤적(root loci)이 (-1, 0)점을 감싸지 않음을 의미한다. 따라서 일반화된 Nyquist정리[pp. 99, [10]]에 의해서 Q는 안정하다.

3. 마지막으로 폐회로 시스템이 내적안정하고 Q가 출력 v로부터 검출가능하고 입력 r로부터 안정화 가능하므로 Q는 내적안정하고 ESPR하다. ■

정리 6이 의미하는 것은 LPR 시스템인 플랜트 P에 대해서, 제어기 Q가 내적 안정하고 ESPR이면 폐회로 시스템  $T_{zu}$ 는 내적 안정하고 ESPR이며 역으로 폐회로 시스템  $T_{zu}$ 가 내적 안정하고 ESPR이면 Q가 내적 안정하고 ESPR이라는 것이다. 이 결과를 이용하면 임의의 내적 안정하고 ESPR인 시스템을 LPR 시스템과 내적 안정하고 ESPR인 시스템의 피드백 시스템으로 분리할 수 있다(정리 7 참조).

다음 등식을 만족하고

$$(A - B_1D_{21}^{-1}C_2)Y + Y((A - B_1D_{21}^{-1}C_2)' + Y(C_1'D_{21}^{-1}C_2 + C_2'D_{21}^{-T}C_1 - C_2'D_{21}^{-T}(D_{11} + D_{11}')D_{21}^{-1}C_2)Y = 0 \quad (25)$$

또 아래의 행렬  $\bar{A}$ 가 안정화 행렬이 되는 실대칭행렬  $Y \geq 0$ 가 존재한다고 가정하자.

$$\bar{A} = A - B_1D_{21}^{-1}C_2Y(C_1'D_{21}^{-1}C_2 + C_2'D_{21}^{-T}C_1 - C_2'D_{21}^{-T}(D_{11} + D_{11}')D_{21}^{-1}C_2) \quad (26)$$

(25)는 (4)의 대수 리카티 방정식 S(Y)=0에서  $D_{21}^{-1}$ 가 존재한다는 가정하에 얻을 수 있다.

다음의 시스템  $\Sigma_{G_c}$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z_0 &= C_0x + D_0u \\ z_1 &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}u \end{aligned}$$

그림 2는 시스템  $\Sigma_{G_2}$ 에 제어기  $C$ 가  $y$ 에서  $u$ 로 연결된 시스템이다.

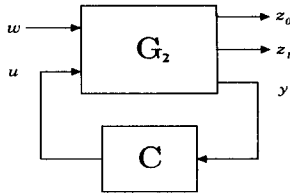


그림 2. 혼합문제에 대한 기본 시스템.  
Fig. 2. A standard system for mixed problem.

위의 시스템은 시스템  $\Sigma_{G_1}$ 에서  $z_0$ 가 추가된 형태이며  $z_0$ 는 시스템의 성능을 나타내는 변수이다.

위의 시스템  $\Sigma_{G_2}$ 와 관련하여 다음 보조 시스템  $\Sigma_{P(Y)}$ 와  $\Sigma_{H(Y)}$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} \Sigma_{P(Y)} : \quad & \dot{\eta} = (A - SC_2)\eta + (B_1 - SD_{21})w + TD_{21}'v \\ & z_0 = C_0\eta \\ & z_1 = (C_1 - RC_2)x + \frac{1}{2}(D_{11} - D_{11}')w - D_{21}'v \\ & r = C_2\eta + D_{21}u \\ \Sigma_{H(Y)} : \quad & \beta = (A + TC_1)\beta + (S + TR)r + (B_2 + TD_{12})u \\ & v_0 = C_0x + D_0u \\ & v_1 = D_{21}^{-T}(C_1x + Rr + D_{12}u) \\ & y = C_2x + r \end{aligned}$$

그리고  $v = -v_1$ 이며 여기서  $T, R, S$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= YC_2'D_{21}^{-T} \\ R &= \frac{1}{2}(D_{11} + D_{11}')D_{21}^{-1} \\ S &= TR + (B_1 - YC_1')D_{21}^{-1} \end{aligned}$$

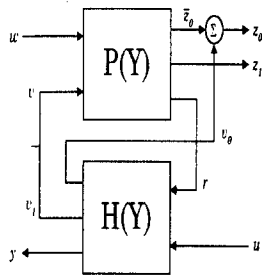


그림 3. 시스템  $\Sigma_{G_2}$ 의 분해 시스템.  
Fig. 3. Decomposed system of  $\Sigma_{G_2}$ .

다음 정리는 시스템  $\Sigma_{G_2}$ 와 정리 3에 있는 상태변수 변환과 쌍대성에 의해서 두 개의 시스템  $\Sigma_{P(Y)}$ 와  $\Sigma_{H(Y)}$ 로 분리될 수 있음을 보여준다.

정리 7 : 시스템  $\Sigma_{G_2}$ 와 그림 3의 연결 시스템을 생각하자. (25)의 대수 리카티 방정식을 만족하고 (26)의  $\bar{A}$ 가 안정한 행렬이 되는 실대칭행렬  $Y$ 가 존재한다고 가정하자. 그러면  $\Sigma_{G_2}$ 의 전달함수  $G_2(s)$ 와 그림 2에서  $(w, u)$ 에서  $(z_0, z_1, y)$ 로의 전달함수는 같다. 또 시스템  $\Sigma_{G_2}$

를 내적안정시키는 제어기  $C$ 는 그림 3을 안정화시키는 제어기  $C$ 와 같다. ■

증명 : 시스템  $\Sigma_{P(Y)}$ 와  $\Sigma_{H(Y)}$ 가 결합된 폐회로 시스템을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - (S + TR)C_2 & -TC_1 \\ (S + TR)C_2 & A + TC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 - (S + TR)D_{21} \\ (S + TR)D_{21} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -TD_{12} \\ B_2 + TD_{12} \end{bmatrix} u \\ z_0 &= [C_0 \quad C_0] \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} + D_0u \\ z_1 &= [C_1 \quad C_1] \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= [C_2 \quad C_2] \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} + D_{21}u \end{aligned}$$

폐회로 시스템의 상태변수  $[\eta' \beta']$ 를  $[(\eta + \beta)' \beta']$ 로 변환하고  $x = \eta + \beta$ 로 치환하면 폐회로 시스템의 상태식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ (S + TR)C_2 & A + TC_1 - (S + TR)C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ (S + TR)D_{21} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 + TD_{12} \end{bmatrix} u \\ z_0 &= [C_0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix} + D_0u \\ z_1 &= [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix} + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= [C_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix} + D_{21}u \end{aligned}$$

위 식에서  $\beta$ 는 가관측하지 않으며  $\beta$ 와 관련된 행렬  $A + TC_1 - (S + TR)C_2$ 는 안정한 행렬이므로 시스템  $\Sigma_{P(Y)}$ 와  $\Sigma_{H(Y)}$ 가 결합된 폐회로 시스템은  $\Sigma_{G_2}$ 와 같아지므로 전달 함수가 같아진다. ■

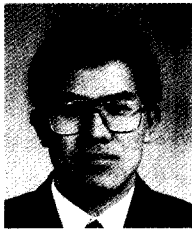
#### IV. 결론

본 논문에서는 양실 시스템의 시간영역에서의 특성을 연구하였다. 양실시스템은 노음 한계 시스템과는 쌍대의 관계에 있는 시스템으로 오래 전부터 시스템의 절대 안정성과 관련하여 많은 연구가 이루어져 왔다. 본 연구에서는 공급률의 개념을 도입하여 시간영역에서 변수치환을 통하여 양실시스템을 노음한계시스템으로 바꿀 수 있으며 또 양실시스템을 다른 양실시스템으로 바꿀 수 있음을 보였다. 이를 통해 ESPR 시스템을 LPR 시스템과 다른 ESPR 시스템의 피드백 연결 시스템으로 분리할 수 있음을 보였다. 이들 결과는  $H_2$ /ESPR 문제의 출력제한 제어기 설계에 적용될 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] W. Sun, P. P. Khargonekar and D. Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 10, pp. 2034-2046, Oct., 1994.
- [2] N. Sakamoto, M. Sigiura, M. Hayashi and M. Suzuki, "Synthesis of  $\gamma$ -positive real feedback systems," *Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2854-2859, Dec., 1996.
- [3] M. G. Safonov, E. A. Jonckheer, M. Verma and D. J. N. Limebeer, "Synthesis of positive real multi-variable feedback systems," *Int. J. of Control*, vol. 45, no. 3, pp. 817-842, 1987.

- [4] D. Shim, "Mixed  $H_2$ /ESPR(Extended strictly positive positive real) control for state-feedback case," *Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3175-3180, Dec., 1994.
- [5] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network analysis and synthesis: a modern systems theory approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [6] J. C. Willems, "Dissipative dynamical systems, Part I: general theory," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 321-351, 1972.
- [7] J. C. Willems, "Dissipative dynamical systems, Part II: linear systems with quadratic supply rates," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 352-393, 1972.
- [8] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, circle and Popov theorems and their application to robust stability," *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2618-2623, Dec., 1991.
- [9] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Robust stabilization with positive real uncertainty: beyond the small gain theorem," *Systems and Control Letters*, (17), pp. 191-208, 1991.
- [10] A. G. J. Macfarlane and I. Postlethwaite, "The generalized Nyquist stability criterion and multi-variable root loci," *Int. J. of Control*, vol. 25, no. 1, pp. 81-127, 1977.
- [11] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug., 1989.
- [12] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, no. 7, pp. 824-837, July, 1989.



#### 심 덕 선

1984년 서울대 제어계측공학과 졸업.  
 1986년 동대학원 석사. 1993년 Univ. of Michigan 항공우주공학과 졸업(공학박사). 1987년 7월~1988년 5월 삼성항공, 1994년 1월~1995년 1월 Univ. of Michigan 전기 및 컴퓨터 공학과 Post-doc, 1995년 3월~현재 중앙대학교 제어계측공학과 부교수, 관심분야는 건설 제어, 최적제어, 관성항법 시스템, GPS 전력 시스템 제어, VLSI 설계 등.