시간지연 선형시스템의 H_∞ 제어

H_∞ Control of Linear Delay Systems

정 은 태, 권 성 하, 김 종 해, 박 홍 배
(Eun-Tae Jeung, Sung-Ha Kwon, Jong-Hae Kim and Hong-Bae Park)

Abstract : This paper presents an H_∞ output feedback controller design method for linear systems with delayed state, delayed control input, and delayed masurement output. Using a Lyapunov functional, the stability for delayed systems is discussed independently of delays. Also, sufficient condition for the existence of H_∞ controllers of any order is given in terms of three linear matrix inequalities(LMIs). Based on positive definite solutions of their LMIs, we briefly explain the way to construct H_∞ controller, which stabilizes time-delay systems independently of delays and guarantees an H_∞ norm bound.

Keywords : time-delay, H_∞ control, LMI, output feedback

I. 서론

1980년대부터 많은 관심을 받아온 H_∞ 제어이론은 1989년 Doyle 등[1]에 의해서 H_∞ 제어기 설계에 대한 효과적인 방법이 제시되었다. 1994년 Gahinet 등[2]과 Iwasaki 등[3]은 선형 행렬 부등식을 기초로하여 일반적인 H_∞ 제어 문제의 해법을 제시하였다. 그들의 주요 결과는 임의의 차수를 가지는 H_∞ 제어기가 존재할 필요충분조건은 세 개의 선형 행렬 부등식으로 주어진다는 것이다. 최근에는 시간지연을 가지는 시스템에 대한 H_∞ 제어에 관한 논문들이 발표되었다. Lee 등[4]은 리카티 부등식을 이용하여 상태에 시간지연이 있는 시스템에 대한 상태궤환 H_∞ 제어기를 설계하였고, Choi 등[5]과 정 등[6]은 상태와 제어입력에 시간지연을 가지는 시스템으로 확장하여 상태궤환 H_∞ 제어기를 설계하였다. 그리고 출력궤환을 이용한 H_∞ 제어기는 정 등[7][8], Ge 등[9]과 Choi 등[10][11]에 의해서 상태에 시간지연을 가지는 시스템에 대하여 설계되었다. 그러나 이러한 제어기 설계 기법들은 상태, 제어입력 및 측정출력에 시간지연을 가지는 시스템에 적용하기가 쉽지 않다. 왜냐하면 폐루프 시스템이 시간지연된 외란을 포함하기 때문이다.

따라서 본 논문에서는 시간지연 시스템의 일반적인 형태인 상태와 제어입력 및 측정출력에 시간지연을 가지는 시스템에 대한 출력궤환 H_∞제어기를 설계한다. Lyapunov 함수를 이용하여 시간지연에 관계없이 시간지연 시스템의 점근적 안정성을 보장하는 충분조건을 유도하고, 시간지연 시스템이 안정하고 H_∞ 노옴 경계를 만족하는 BRL (bounded real lemma)의 충분조건을 제시한다. 그리고 시간지연 시스템에 대한 BRL를 적절히 변형하여, 시간지연 시스템에 대한 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 세 개의 선형 행렬 부등식으로 나타낸다. 제시한 H_∞ 제어기의 타당성을 검증하기 위해 간단한 예제를 보인다.

II. 문제 설정

상태와 제어입력 및 측정출력에 시간지연을 가지는 시스템을 고려한다. 여기서 $x(t)\in R^n$, $w(t)\in R^l$, $u(t)\in R^m$, $z(t)\in R^p$와 $y(t)\in R^q$는 각각 상태, 제곱적분 가능한 외란, 제어입력, 제어하고자 하는 출력과 측정출력이고, $d_i(i=1,2,3)$는 양의 상수인 지연시간이다. $\phi(t)$는 구간 $[-\max(d_1, (d_2+d_3)), 0]$ 에서 정의된 연속 벡터 함수이며, 시간지연 시스템 (1)이 $t=0$에서 동작할때 필요한 초기조건이다. R^n은 n 차원 실수 공간을 의미하며 모든 행렬은 적절한 차원을 가지는 상수행렬이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+A_{d_1}x(t-d_1) \\ &\quad +B_1w(t)+B_2u(t)+B_{d_2}u(t-d_2) \\ z(t) &= C_1x(t)+D_{11}w(t)+D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)+C_{d_3}x(t-d_3)+D_{21}w(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t\in[-\max(d_1, (d_2+d_3)), 0] \end{aligned} \tag{1}$$

그리고 시간지연 시스템 (1)의 H_∞제어기를

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_K\xi(t)+B_Ky(t) \\ u(t) &= C_K\xi(t)+D_Ky(t) \end{aligned} \tag{2}$$

와 같이 두자. 여기서 $\xi(t)\in R^k$는 제어기의 상태이다. 시간지연 시스템 (1)에 제어기 (2)를 적용하였을때 $w(t)$에서 $z(t)$까지의 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_{cl}\eta(t)+A_{cl_1}\eta(t-d_1)+A_{cl_2}\eta(t-d_2) \\ &\quad +A_{cl_3}\eta(t-d_3)+A_{cl_{23}}\eta(t-d_2-d_3) \\ &\quad +B_{cl}w(t)+B_{cl_2}w(t-d_2) \\ z(t) &= C_{cl}\eta(t)+C_{cl_3}\eta(t-d_3)+D_{cl}w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} &\eta(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \qquad A_{cl}=\begin{bmatrix} A+B_2D_KC_2 & B_2C_K \\ B_KC_2 & A_K \end{bmatrix}, \\ &A_{cl_1}=\begin{bmatrix} A_{d_1} & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \qquad A_{cl_2}=\begin{bmatrix} B_{d_2}D_KC_2 & B_{d_2}C_K \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \\ &A_{cl_3}=\begin{bmatrix} B_2D_KC_{d_3} & 0 \\ B_KC_{d_3} & 0_k \end{bmatrix}, \qquad A_{cl_{23}}=\begin{bmatrix} B_{d_2}D_KC_{d_3} & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \\ &B_{cl}=\begin{bmatrix} B_1+B_2D_KD_{21} \\ B_KD_{21} \end{bmatrix}, \qquad B_{cl_2}=\begin{bmatrix} B_{d_2}D_KD_{21} \\ 0_{k\times l} \end{bmatrix}, \\ &C_{cl}=[\,C_1+D_{12}D_KC_2 \;\; D_{12}C_K\,], \\ &C_{cl_3}=[\,D_{12}D_KC_{d_3} \;\; 0_{p\times k}\,], \quad D_{cl}=D_{11}+D_{12}D_KD_{21} \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 시간지연 시스템 (1)에 대한 출력궤환 H_∞ 제어문제는 폐루프 시스템 (3)이 점근적으로 안정하고, $w(t)$에서 $z(t)$까지의 H_∞-노옴이 주어진 $\gamma>0$보다 작거나 같게 하는 출력궤환 제어기 (2)를 설계하는 것이다. 즉, 제어기의 변수 A_K, B_K, C_K와 D_K를 결정하는 문제이다. 따라서 제어기의 변수들을

접수일자 : 1997. 9. 6., 수정완료 : 1998. 1. 7.
정은태, 권성하 : 창원대학교 제어계측공학과
김종해, 박홍배 : 경북대학교 전자전기공학부

$$K := \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix} \tag{5}$$

와 같이 하나의 행렬로 표현하면, 폐루프 시스템의 행렬들은

$$\begin{aligned} &A_{cl} = A_0 + B_{00}KC_{00}, && A_{cl_1} = A_{10}E_{10}, \\ &A_{cl_2} = B_{20}E_{20}KC_{00}, && A_{cl_3} = B_{00}KE_{30}C_{30}, \\ &A_{cl_{23}} = B_{20}E_{20}KE_{30}C_{30}, && B_{cl} = B_0 + B_{00}KD_{20}, \\ &B_{cl_2} = B_{20}E_{20}KD_{20}, && C_{cl} = C_0 + D_{10}KC_{00}, \\ &C_{cl_3} = D_{10}KE_{30}C_{30}, && D_{cl} = D_{11} + D_{10}KD_{20} \end{aligned} \tag{6}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} &A_{00} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, && A_{10} = \begin{bmatrix} A_{d_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &B_{00} = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, && B_{10} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k\times l} \end{bmatrix}, \\ &B_{20} = \begin{bmatrix} B_{d_2} \\ 0_{k\times m} \end{bmatrix}, && C_{00} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \\ &C_{10} = [\, C_1 \quad 0_{p\times k} \,], && C_{30} = [\, C_{d_3} \quad 0_{q\times k} \,] \\ &D_{10} = [\, D_{12} \quad 0_{p\times k} \,], && D_{20} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{k\times l} \end{bmatrix}, \\ &E_{10} = [\, I_n \quad 0_{n\times k} \,], && E_{20} = [\, I_m \quad 0_{m\times k} \,], \\ &E_{30} = [\, I_q \quad 0_{q\times k} \,]^T \end{aligned} \tag{7}$$

이다. (7)은 단지 시간지연 시스템의 행렬들로 구성되어 있고, 폐루프 시스템의 행렬들은 제어기 행렬 K의 어파인(affine) 형태이다. 이러한 제어기 행렬 K를 구하는 방법을 다루기 전에, 본 논문에서 자주 사용하는 행렬 부등식에 관한 내용들을 살펴본다.

보조정리 1 : 적절한 차원을 가지는 임의의 행렬 A, B, C와 양한정 행렬 R에 대하여, 부등식

$$A^*Be^{j\omega} + B^*Ae^{-j\omega} \le A^*RA + B^*R^{-1}B \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &A^*Be^{j\omega(d_1+d_2)} + B^*Ae^{-j\omega(d_1+d_2)} \\ &\qquad + C^*Be^{j\omega d_2} + B^*Ce^{-j\omega d_2} \\ &\le A^*RA + B^*R^{-1}B + C^*RC \\ &\qquad + A^*RCe^{j\omega d_1} + C^*RAe^{-j\omega d_1} \end{aligned} \tag{9}$$

은 모든 $\omega \in$ R에 대해서 성립한다.

증명 : 생략. ■

보조정리 2 : 대칭행렬 Σ와 적절한 차원을 가지는 Π와 Θ에 대해서,

$$\Psi + \Pi K \Theta^T + \Theta K^T \Pi^T < 0 \tag{10}$$

을 만족하는 K가 존재할 필요충분조건은

$$\Pi_\perp^T \Psi \Pi_\perp < 0, \qquad \Theta_\perp^T \Psi \Theta_\perp < 0 \tag{11}$$

이다.

증명 : [2], [3], [13] 참조. ■

III. 시간지연 시스템의 안정성과 H_∞-노옴 경계의 충분조건

이 절에서는 시간지연 시스템 (3)의 안정성에 관한 충분조건을 논하고, 시간지연 시스템 (3)이 안정하고 H_∞-노옴이 γ보다 작거나 같을 충분조건을 제시한다.

보조정리 3 : 시간지연 시스템

$$\begin{aligned} \dot\eta(t) = \; & A_{cl}\eta(t) + A_{10}E_{10}\eta(t-d_1) \\ & + B_{20}E_{20}KC_{00}\eta(t-d_2) \\ & + B_{00}KE_{30}C_{30}\eta(t-d_3) \\ & + B_{20}E_{20}KE_{30}C_{30}\eta(t-d_2-d_3) \end{aligned} \tag{12}$$

을 고려한다. 행렬 부등식

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & PA_{10} & PB_{20} & Q_{14} \\ A_{10}^TP & -R_1 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & -R_2 & 0 \\ Q_{14}^T & 0 & 0 & -Q_{44} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= A_{cl}^TP + PA_{cl} + E_{10}^TR_1E_{10} \\ &\quad + C_{30}^TR_3C_{30} + C_{00}^TK^TE_{20}^TR_2E_{20}KC_{00} \\ Q_{14} &= PB_{00}KE_{30} + C_{00}^TK^TE_{20}^TR_2E_{20}KE_{30} \\ Q_{44} &= R_3 - E_{30}^TK^TE_{20}^TR_2E_{20}KE_{30} \end{aligned}$$

을 만족하는 양한정 행렬 P, R_1, R_2, R_3가 존재하면, 시간지연 시스템 (12)는 시간지연 d_1, d_2, d_3에 관계없이 점근적으로 안정하다.

증명 : Lyapunov 함수를

$$\begin{aligned} &V(\eta, t) \\ &= \eta^T(t)P\eta(t) + \int_{t-d_1}^{t} \eta^T(\tau)E_{10}^TR_1E_{10}\eta(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t-d_2}^{t} [\, C_{00}\eta(\tau) + E_{30}C_{30}\eta(\tau-d_3)]^TK^TE_{20}^T \\ &\qquad \times R_2E_{20}K[\, C_{00}\eta(\tau) + E_{30}C_{30}\eta(\tau-d_3)]d\tau \\ &\quad + \int_{t-d_3}^{t} \eta^T(\tau)C_{30}^TR_3C_{30}\eta(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{14}$$

라 할 때, Lyapunov 함수의 시간에 따른 미분은

$$\frac{dV(\eta, t)}{dt} = \xi(t)Q\xi(t) \tag{15}$$

이고, 여기서

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ E_{10}\eta(t-d_1) \\ E_{20}K[\, C_{00}\eta(t-d_2) + E_{30}C_{30}\eta(t-d_2-d_3)] \\ C_{30}\eta(t-d_3) \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 Lyapunov 함수의 미분이 항상 0보다 작으므로 시간지연 시스템 (12)는 점근적으로 안정하다. ■

시간지연 시스템 (12)의 안정성에 관한 충분조건은 무수히 많다. 왜냐하면 Lyapunov 함수를 어떻게 선정하느냐에 따라 또 다른 충분조건을 만들 수 있기 때문이다. 보조정리 3에서 제시한 안정성의 충분조건은 본 논문의 주요 결과 중의 하나인 보조정리 4를 만들기 위해서 필요하다.

보조정리 4 : 시간지연 시스템 (3)을 고려하고, 행렬 부등식

$$\begin{bmatrix} S & PA_{10} & PB_{20} & C_{00}^TK^TE_{20} & PB_{00}KE_{30} & PB_{cl} & C_{cl}^T \\ A_{10}^TP & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{20}KC_{00} & 0 & 0 & -R_2^{-1} & E_{20}KE_{30} & E_{20}KD_{20} & 0 \\ E_{30}^TK^TB_{00}^TP & 0 & 0 & E_{30}^TK^TE_{20}^T & -R_3 & 0 & E_{30}^TK^TD_{10}^T \\ B_{cl}^TP & 0 & 0 & D_{20}^TK^TE_{20}^T & 0 & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & 0 & 0 & 0 & D_{10}KE_{30} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

을 만족하는 양한정 행렬 P, R_1, R_2, R_3이 존재한다고 가정한다. 여기서

$$S = A_{cl}^TP + PA_{cl} + E_{10}^TR_1E_{10} + C_{30}^TR_3C_{30} \tag{17}$$

이다. 이때

1) 폐루프 시스템 (3)은 시간지연에 관계없이 점근적으로 안정
2) $\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty \le \gamma$

을 만족한다. 여기서

$$T_{zw}(j\omega) = D_{cl} + \tilde{C}(j\omega)\Phi(j\omega)\tilde{B}(j\omega) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\Phi(j\omega) &:= (j\omega I - A_{cl} - A_{cl_1}e^{-j\omega d_1} - A_{cl_2}e^{-j\omega d_2} \\ &\quad - A_{cl_3}e^{-j\omega d_3} - A_{cl_{23}}e^{-j\omega(d_2+d_3)})^{-1}\end{aligned}$$

$$\tilde{B}(j\omega) := B_{cl} + B_{cl_2}e^{-j\omega d_2}$$

$$\tilde{C}(j\omega) := C_{cl} + C_{cl_3}e^{-j\omega d_3}$$

이다.

증명 : 1) 행렬 부등식 (16)은

$$\begin{bmatrix} S & PA_{10} & PB_{20} & C_{00}^TK^TE_{20}^T & PB_{00}KE_{30} \\ A_{10}^TP & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ E_{20}KC_{00} & 0 & 0 & -R_2^{-1} & E_{20}KE_{30} \\ E_{30}^TK^TB_{00}^TP & 0 & 0 & E_{30}^TK^TE_{20}^T & -R_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

을 의미하고, 행렬 부등식 (19)는 행렬 부등식 (13)과 등가이다.

2) 행렬 부등식 (16)을 등가적으로

$$\begin{aligned}&A_{cl}^TP + PA_{cl} + PA_{10}R_1^{-1}A_{10}^TP + E_{10}^TR_1E_{10} \\ &+ \gamma^{-1}C_{cl}^TC_{cl} + C_{30}^T\tilde{R}_3^{-1}C_{30} + \gamma^{-1}(\gamma^{-1}C_{cl}^TD_{cl} + PB_{cl}) \\ &\times (I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}(\gamma^{-1}C_{cl}^TD_{cl} + PB_{cl})^T \\ &+ \gamma^{-1}PB_{cl_2}(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}B_{cl_2}^TP \\ &+ PB_{20}\tilde{R}_2^{-1}B_{20}^TP + \gamma^{-1}C_{cl_3}^T(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}C_{cl_3} \\ &+ (Q_2 + Q_1E_{30}\tilde{R}_3E_{30}^TQ_3^T)^TE_{20}^T\tilde{R}_2E_{20} \\ &\times (Q_2 + Q_1E_{30}\tilde{R}_3E_{30}^TQ_3^T) \\ &+ PB_{20}E_{20}Q_1E_{30}\tilde{R}_3E_{30}^TQ_1^TE_{20}^TB_{20}^TP \\ &+ Q_3E_{30}\tilde{R}_3E_{30}^TQ_3^T < 0\end{aligned} \tag{20}$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned}\tilde{R}_2 &= [R_2^{-1} - \gamma^{-1}E_{20}KD_{20}(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1} \\ &\quad \times D_{20}^TK^TE_{20}^T - Q_1KE_{30}\tilde{R}_3E_{30}^TK^TQ_1^T]^{-1} > 0\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3 &= [R_3^{-1} - \gamma^{-1}E_{30}^TK^TD_{10}^T \\ &\quad \times (I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}D_{10}KE_{30}]^{-1} > 0\end{aligned} \tag{22}$$

$$Q_1 = K + \gamma^{-2}KD_{20}(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}D_{cl}^TD_{10}K \tag{23}$$

$$\begin{aligned}Q_2 &= KC_{00} + \gamma^{-1}KD_{20}(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1} \\ &\quad \times (\gamma^{-1}C_{cl}^TD_{cl} + PB_{cl})^T\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}Q_3 &= PB_{00}K + \gamma^{-1}C_{cl}^TD_{10}K + \gamma^{-2}(\gamma^{-1}C_{cl}^TD_{cl} \\ &\quad + PB_{cl})(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}D_{cl}^TD_{10}K\end{aligned} \tag{25}$$

이다. 부등식 (20)의 좌변을 $\tilde{L}$로 정의하고 양변에

$$\begin{aligned}&j\omega P + A_{cl_1}^TPe^{j\omega d_1} + PA_{cl_1}e^{-j\omega d_1} + A_{cl_2}^TPe^{j\omega d_2} \\ &+ PA_{cl_2}e^{-j\omega d_2} + A_{cl_3}^TPe^{j\omega d_3} + PA_{cl_3}e^{-j\omega d_3} \\ &+ A_{cl_{23}}^TPe^{j\omega(d_2+d_3)} + PA_{cl_{23}}e^{-j\omega(d_2+d_3)}\end{aligned} \tag{26}$$

을 더하고 $\tilde{C}(j\omega)$의 정의와 보조정리 1을 이용하면

$$\begin{aligned}&\tilde{L} + W_1(j\omega) + \gamma^{-1}\tilde{C}^*(j\omega)\tilde{C}(j\omega) \\ \le\ &(\Phi^*(j\omega))^{-1}P + P\Phi^{-1}(j\omega) \\ &-(\gamma^{-1}\tilde{C}^*(j\omega)D_{cl} + P\tilde{B}(j\omega))(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1} \\ &\times(\gamma^{-1}\tilde{C}^*(j\omega)D_{cl} + P\tilde{B}(j\omega))^*\end{aligned} \tag{27}$$

와 같이 표현될 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned}W_1(j\omega) &:= [A_{10}^TPe^{j\omega d_1} - R_1E_{10}]^* \\ &\quad \times R_1^{-1}[A_{10}^TPe^{j\omega d_1} - R_1E_{10}]\end{aligned} \tag{28}$$

이고, 이는 모든 $\omega \in \mathrm{R}$에 대하여 $W_1(j\omega) \ge 0$을 의미한다. (27)의 앞과 뒤에 각각 $\tilde{B}^*(j\omega)\Phi^*(j\omega)$와 $\Phi(j\omega)\tilde{B}(j\omega)$을 곱한 후, 양변에

$$\begin{aligned}&\gamma^{-1}[D_{cl}^TD_{cl} + D_{cl}^T\tilde{C}(j\omega)\Phi(j\omega)\tilde{B}(j\omega) \\ &\quad + \tilde{B}^*(j\omega)\Phi(j\omega)\tilde{C}^*(j\omega)D_{cl}] - \gamma I\end{aligned}$$

을 더하여 정리하면

$$\begin{aligned}&\gamma^{-1}T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega) - \gamma I \\ \le\ &-\tilde{B}^*(j\omega)\Phi^*(j\omega)[\tilde{L} + W_1(j\omega)]\Phi(j\omega)\tilde{B}(j\omega) \\ &-[\tilde{B}^*(j\omega)\Phi^*(j\omega)(\gamma^{-1}\tilde{C}^*(j\omega)D_{cl} + P\tilde{B}(j\omega)) \\ &-\gamma(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})]\gamma^{-1}(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1} \\ &\times[\tilde{B}^*(j\omega)\Phi^*(j\omega)(\gamma^{-1}\tilde{C}^*(j\omega)D_{cl} + P\tilde{B}(j\omega)) \\ &-\gamma(I - \gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})]^*\end{aligned} \tag{29}$$

이다. (29)의 우변은 모든 $\omega \in \mathrm{R}$에 대하여 음반한정 (negative semidefinite)이므로 $\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty \le \gamma$. ■

보조정리 4의 증명에서 Riccati 부등식 (20)은 시간지연에 관계된 항을 제외하고는 시간지연이 없는 선형시스템에 대한 BRL의 Riccati 부등식과 유사하다. 즉, 보조정리 4는 시간지연 시스템 (3)이 시간지연에 관계없이 점근적으로 안정하고 H_∞-노옴이 주어진 γ보다 작거나 같을 충분조건을 제시한 것이다.

IV. H_∞ 제어기가 존재할 충분조건

앞 절에서 제시한 보조정리 4의 결과를 이용하여, 시간지연 시스템 (3)에 대한 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 제시하고, 선형행렬 부등식으로부터 H_∞ 제어기를 어떻게 설계하는지를 간략히 설명한다.

행렬 부등식 (16)의 조건을 등가적으로

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^TP + PA_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^T & PA_{10} & PB_{20} & C_{00}^TK^TE_{20} & PB_{00}KE_{30} & E_{10}^T & C_{30}^T \\ B_{cl}^TP & -\gamma I & D_{cl}^T & 0 & 0 & D_{20}^TK^TE_{20}^T & 0 & 0 & 0 \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & D_{10}KE_{30} & 0 & 0 \\ A_{10}^TP & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{20}KC_{00} & E_{20}KD_{20} & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & E_{20}KE_{30} & 0 & 0 \\ E_{30}^TK^TB_{00}^TP & 0 & E_{30}^TK^TD_{10}^T & 0 & 0 & E_{30}^TK^TE_{20}^T & -R_3 & 0 & 0 \\ E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} & 0 \\ C_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{30}$$

와 같이 나타낼 수 있고, (7)을 이용하여 행렬 부등식 (30)은

$$\Sigma + \Lambda\Pi K\Theta^T + \Theta K^T\Pi^T\Lambda < 0 \tag{31}$$

으로 표현된다. 여기서

$$\Lambda = diag\{P,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I\}, \tag{32}$$

$$\Pi = [B_{00}^T\ \ 0\ \ D_{10}^T\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ E_{20}^T\ \ 0\ \ 0]^T, \tag{33}$$

$$\Theta = [C_{00}\ \ D_{20}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ E_{30}\ \ 0]^T \tag{34}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_{00}^TP+PA_{00} & PB_{10} & C_{10}^T & PA_{10} & E_{10}^T & PB_{20} & 0 & 0 & C_{30}^T \\ B_{10}^TP & -\gamma I & D_{11}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{10} & D_{11} & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{10}^TP & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{10} & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{20}^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_3 & 0 \\ C_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_3^{-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

이다. 보조정리 2를 이용하여, (31)을 만족하는 제어기 변수 K가 존재할 필요충분조건은 부등식

$$\Pi_\perp^T \Lambda^{-1}\Sigma\Lambda^{-1}\Pi_\perp < 0, \quad (36)$$

$$\Theta_\perp^T \Sigma \Theta_\perp < 0 \quad (37)$$

을 만족하는 것이다. (36)과 (37)의 행렬 부등식을 간단히 하기 위해서, P와 P^{-1}를

$$P=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & ? \end{bmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} X & M \\ M^T & ? \end{bmatrix} \quad (38)$$

와 같이 분해한다. 여기서 $X, Y \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $M, N \in \mathbf{R}^{n\times k}$이고 ?는 관심없는 부분이다. 그리고 $[B_{00}^T \ D_{10}^T \ E_{20}^T]^T$와 $[C_{00} \ D_{20} \ E_{30}]^T$의 직교보를 각각 $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -B_2 \\ 0 & 0 & I & -D_{12} \end{bmatrix}^T$와 $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -C_2^T \\ 0 & 0 & I & -D_{21}^T \end{bmatrix}^T$으로 선택하면, Π와 Θ의 직교보는

$$\Pi_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & I&0&0&0&0&0 \\ 0 & I & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&I&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&I&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&I&0&0 \\ -B_2^T & -D_{12}^T & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&I&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&0&I \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\Theta_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & I & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & I&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&I&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&I&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&I&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&I&0 \\ -C_2 & -D_{21} & 0&0&0&0&0&0 \\ 0 & 0 & 0&0&0&0&0&I \end{bmatrix} \quad (40)$$

이다. (36)과 (37)의 부등식에 (35), (38), (39)와 (40)을 대입하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} & B_1 & X & XC_{d_3}^T \\ \hat{X}_{12}^T & -\gamma I - D_{12}R_2^{-1}D_{12}^T & D_{11} & 0 & 0 \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} & 0 \\ C_{d_3}X & 0 & 0 & 0 & -R_3^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & C_1^T & YA_{d_1} & YB_{d_2} \\ \hat{Y}_{12}^T & -\gamma I - D_{21}^TR_3D_{21} & D_{11}^T & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I & 0 & 0 \\ A_{d_1}^TY & 0 & 0 & -R_1 & 0 \\ B_{d_2}^TY & 0 & 0 & 0 & -R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \hat{X}_{11} &= XA^T + AX + A_{d_1}R_1^{-1}A_{d_1}^T \\ &\quad - B_2R_2^{-1}B_2^T + B_{d_2}R_2^{-1}B_{d_2}^T \\ \hat{X}_{12} &= XC_1^T - B_2R_2^{-1}D_{12}^T \\ \hat{Y}_{11} &= A^TY + YA + R_1 - C_2^TR_3C_2 + C_{d_3}^TR_3C_{d_3} \\ \hat{Y}_{12} &= YB_1 - C_2^TR_3D_{21} \end{aligned}$$

이다. (41)과 (42)의 행렬 부등식으로부터 시간지연 시스템에 대한 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 직접적으로 얻을 수 있다.

정리 1 : 주어진 γ에 대하여, 행렬 부등식 (41)과 (42) 그리고

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (43)$$

을 만족하는 양한정 행렬 R_1, R_2, R_3, X, Y가 존재하면, 시간지연 시스템 (1)에 대한 H_∞ 제어기가 존재한다. 더욱이 (41)-(43)을 만족하는 어떤 (X, Y)에 대하여

$$Rank(I-XY) = k \leq n \quad (44)$$

이면, 차수가 k인 H_∞ 제어기가 존재한다.

증명 : (38)을 만족하는 양한정 행렬 P가 존재할 필요충분조건은 $X-Y^{-1} \geq 0$이고, 이 부등식은 (43)과 등가이다. 나머지 증명은 이미 앞에서 언급하였다. ■

정리 1은 시간지연 시스템 (1)에 대한 H_∞ 제어기를 구한 것이 아니라 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 제시한 것이다. 그리고 (41)과 (42)는 X와 Y에 대해 선형 행렬 부등식이지만 R_1, R_2, R_3에 대해서는 선형 행렬 부등식이 아니기 때문에, (41)-(43)을 만족하는 X, Y, R_1, R_2, R_3을 동시에 찾을 수 없다. 그러나 (41)은 $X, Y, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}$에 대해 선형 행렬 부등식이고 (42)는 X, Y, R_1, R_2, R_3에 대해 선형 행렬 부등식이다. 그러므로 (41)을 만족하는 R_1, R_2, R_3의 범위를 구하고 (42)를 만족하는 R_1, R_2, R_3의 범위를 구하면, 이 두 범위의 교집합 내에 (41)-(43)을 만족하는 R_1, R_2, R_3가 존재할 가능성이 많다. 즉, 두 범위의 교집합이 존재한다는 것은 (41)-(43)을 만족하는 R_1, R_2, R_3가 존재할 필요조건이다. 따라서 H_∞ 제어기 변수 K를 구하기 위해서, 교집합 내에 있는 양한정 행렬 R_1, R_2, R_3에 대해서 (41)-(43)을 만족하는 (X, Y)를 찾고,

$$MN^T = I - XY \quad (45)$$

을 만족하는 전열계수(fullcolumnrank) 행렬 $M, N \in \mathrm{R}^{n\times k}$을 구한다. 그 다음에 선형 방정식

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \tag{46}$$

으로부터 유일한 해 P를 얻을 수 있다. Y가 양한정 행렬이고 M이 전열계수이면 (46)은 항상 풀려질 수 있다 [14]. (31)은 K에 대해서 선형 행렬 부등식이므로, (31)을 만족하는 어떠한 K도 시간지연 시스템 (1)에 대한 H_∞ 제어기가 될 수 있다.

V. 예제

본 논문에서 제시한 H_∞ 제어기 설계 방법의 타당성을 간단한 예를 통하여 살펴보기 위해

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \;\; 3], \quad C_{d_3} = [0.5 \;\; 0.2], \quad D_{21} = 0.5$$

의 시스템 행렬을 가지는 시간지연 시스템 (1)을 고려한다. $\gamma = 1$, $R_1 = r_1 I_2$라 두면

$$0.0233 I_2 < R_1 < 2.4329 I_2,$$
$$0.0184 < R_2 < 2.1789,$$
$$0.0764 < R_3 < 37.2535$$

와 같은 범위 내에 (41)-(43)을 만족하는 R_1, R_2, R_3가 존재한다. 따라서 $R_1 = I_2$, $R_2 = 0.1$, $R_3 = 5$로 선택한 경우, (41)-(43)을 만족하는 양한정 행렬 X와 Y 중에 한 쌍은

$$(X, Y) = \left(\begin{bmatrix} 0.6086 & -0.2115 \\ -0.2115 & 0.4974 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6.7458 & 4.5657 \\ 4.5657 & 5.5060 \end{bmatrix} \right)$$

이다. 본 예제에서는 ellipsoid 알고리듬을 이용하여 선형 행렬 부등식을 풀었다. 그리고 (45)를 만족하는 전열계수 행렬들 중에 하나는

$$(M, N) = \left(\begin{bmatrix} -0.9302 & -0.3671 \\ -0.3671 & 0.9302 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.3010 & 0 \\ 1.7858 & -0.1267 \end{bmatrix} \right)$$

이다. (46)으로부터 양한정 행렬 P는

$$P = \begin{bmatrix} 6.7458 & 4.5657 & 2.3010 & 0 \\ 4.5657 & 5.5060 & 1.7858 & -0.1267 \\ 2.3010 & 1.7858 & 1.0990 & 0.0018 \\ 0 & -0.1267 & 0.0018 & 0.0685 \end{bmatrix}$$

이고, 선형 행렬 부등식 (31)을 만족하는 제어기 변수 K는

$$K = \begin{bmatrix} -1.3192 & -0.5932 & -1.0177 \\ -2.0631 & -3.0105 & 2.6837 \\ 14.5698 & 14.5582 & -19.8572 \end{bmatrix}.$$

이다.

VI. 결론

본 논문에서는 출력궤환을 이용하여 상태와 제어입력 및 측정출력에 시간지연을 가지는 선형 시스템에 대한 H_∞ 제어기를 설계하였다. 이러한 시간지연 시스템에 대한 안정성 판별을 위한 충분조건을 Lyapunov 함수로부터 유도하였고, 시간지연 폐루프 시스템이 안정하고 H_∞ 노옴 경계를 만족할 충분조건을 행렬 부등식을 이용하여 나타내었다. 그리고 상태, 제어입력과 측정출력에 시간지연을 가지는 시스템에 대한 출력궤환 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 세 개의 선형 행렬 부등식으로 제시하였다. 시간지연에 관계없이 점근적으로 안정하고 주어진 H_∞ 노옴 경계를 만족하는 H_∞ 제어기는 세 개의 선형 행렬 부등식의 양한정 해들을 이용하여 나타내었다.

참고문헌

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug., 1989.

[2] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.

[3] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general H_∞ control problem : LMI existence conditions and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, Aug., 1994.

[4] J. H. Lee, S. W. Kim and W. H. Kwon, "Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 159-162, Jan., 1994.

[5] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, no. 6, pp. 917-919, June, 1995.

[6] 정은태, 이갑래, 이재명, 박홍배, "시간지연을 가지는 선형 시스템에 대한 상태궤환 H_∞ 제어," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제2권, 제1호, 1996. 3.

[7] 정은태, 오도창, 박홍배, "상태지연 선형시스템에 대한 출력되먹임 H_∞ 제어기 설계," 제어·자동화·시스템공학회 논문지, 제3권, 제2호, 1997. 4.

[8] E. T. Jeung, J. H. Kim and H. B. Park, "H_∞ output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42, 1998(will be published).

[9] J.-H. Ge and P. Frank, "H_∞ control via output feedback for state delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 64, no. 1, pp. 1-7, May, 1996.

[10] H. H. Choi and M. J. Chung, "Observer-based H_∞ controller design for linear time-delay systems," *Automatica*, vol. 32, no. 7. pp. 1073-1075, July, 1996.

[11] H. H. Choi and M. J. Chung, "An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 737-739, April, 1997.

[12] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, *Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, Systems and Control Series, Amsterdam, vol. 9, 1987.

[13] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, vol. 15, 1994.

[14] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMI's," *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, Brighton, U.K., pp. 1245-1250, Dec., 1991.

정 은 태

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 3권 제 2호 참조.

김 종 해

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 4권 제 1호 참조.

박 홍 배

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 2권 제 1호 참조.

권 성 하

1954년 4월 26일생. 1977년 고려대학교 전기공학과 공학사. 1981년, 1986년 동 대학원 전기공학과 공학석사, 공학박사. 1985년~현재 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 전임강사, 조교수, 부교수, 교수. 1993년~현재 창원대학교 공과대학장, 기획연구실장, 중앙도서관장. 주관심분야는 가변구조 제어, 적응제어, 견실제어 등.