

# 다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화제어시스템의 동적 리셋 와인드업 방지 방법과 모터제어에의 응용

## Dynamical Anti-Reset Windup Method for Saturating Control Systems with Multiple Controllers and Multiloop Configuration and its Application to Motor Control Systems

박종구, 최종호  
(Jong-Koo Park and Chong-Ho Choi)

**Abstract** : This paper presents a dynamical anti-reset windup (ARW) compensation method for saturating control systems with multiple controllers and/or multiloop configuration. By regarding the difference of controller states in the absence and presence of saturating actuators as an objective function, the dynamical compensator which minimizes the objective function is derived in an integrated fashion. The proposed dynamical compensator is a closed form of plant and controller parameters. The resulting dynamics of compensated controller reflects the linear closed-loop system. The proposed method guarantees total stability of the resulting system. The effectiveness of the proposed method is illustrated by applying it to a servo motor control system. The paper is an extension of the results in Park and Choi[1].

**Keywords** : saturation, dynamical anti-reset windup, multiple controller, multiloop system

### I. 서론

실제 제어환경에 수반된 시스템에서 비선형 요소는 다양한 형태로 나타나며 그 가운데에서도 포화현상은 가장 흔히 접하게 되는 비선형에 속한다. 포화 비선형 그 자체는 비교적 간단한 비선형에 속하지만, 많은 경우 대상 시스템의 성능을 현저히 저하시킬 뿐만 아니라 경우에 따라 안정도에 문제를 일으키기도 하는 등 여러 가지 시스템에 심각한 영향을 미칠 수 있다. 즉 실제 제어 시스템에서는 포화요소를 고려하여 제어기를 구성하여야 한다.

포화현상이 시스템에 미치는 부적절한 현상을 'reset windup'이라 하고, 이를 방지하는 구조를 'anti-reset windup(ARW)' 구조라 한다. 표준적이며 실제적인 ARW 보상 방법은 대상 플랜트에 대해 포화현상을 고려하지 않고 제어기를 설계한 다음, 포화현상으로 인한 부정적인 영향을 보상하기 위하여 적절한 보상구조를 채택하는 방법이다. 이러한 보상방법을 '2단계 설계기법'이라 한다[2].

2단계 설계기법은 오래전부터 사용되어 오던 방법으로 서 초창기에는 기술자의 경험에 의존하거나 많은 양의 시뮬레이션을 통한 시행착오 방법을 통하여, 특정한 시스템에 적합한 특정한 보상구조를 설계하는데 머물렀다. 그러나 근래에 많은 연구자들이 포화요소를 갖는 제어 시스템에 대한 일반적인 보상방법을 마련하는 것에 관심을 기울여 왔다[1]-[7]. 최근의 연구결과 중에서 Park과 Choi[1],[6]는 동적 보상방법을 도입한 ARW 보상방법을 제시한 바 있다. 본 논문에서는 이전의 보상법을 보다 일반화시킨 방법을 제시하고자 한다. 제시될 방법은 다중 제어기를 포함한 시스템, 다중 루우프로 갖는 시스템 등

제어기의 위치 및 구조에 관계없이 적용할 수 있는 확장된 ARW 방법이다. 정적 보상기법을 사용하여 다중 제어기 및 다중 루우프로 시스템의 리셋 와인드업 방지 구조를 제시한 결과는 참고 문헌 [8]에 제시되어 있다. 정적 보상기법에 비하여 동적 보상기법은 안정도를 보다 명확히 언급할 수 있으며, 포화 현상시 제어기의 상태변수의 왜곡으로 인한 문제(state positioning problem)[4]를 완전히 해결할 수 있다. ARW 보상방법을 다루는 여타 논문과 마찬가지로 2 단계 설계 절차에서의 첫 단계, 즉 포화요소가 존재하지 않는다고 가정한 상태에서의 다변수 선형 제어 시스템에 대한 만족할 만한 응답특성을 주는 선형 제어기는 이미 존재한다고 가정한다. 본 논문은 두 번째 단계에 초점을 맞춘다. 즉 포화 상황에서 성능저하를 완화하기 위하여, 효과적인 동적 보상기를 추가로 설계하는 것이 목적이다.

### II. 다중 제어기로 구성된 포화 제어시스템 및 문제의 설정

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템을 대표하여 두 개의 제어기  $K_A(s)$ ,  $K_B(s)$ 로 구성된 포화 제어 시스템을 고려하면 그림 1과 같이 도시할 수 있다. 예를 들어 출력 측정 시스템이 동특성을 가지고 있는 경우에 이와 같은 형태로 정돈할 수 있으며 관측자의 동특성도 이와 같이 모델링할 수 있다. 여기서 플랜트와 제어기는 다음과 같은 최소의(minimal) 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

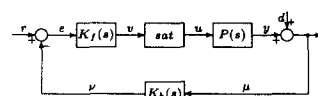


그림 1. 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템.  
Fig. 1. Saturating control systems with multiple controllers.

접수일자 : 1997. 1. 23., 수정완료 : 1998. 3. 6.

박종구 : 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부

최종호 : 서울대학교 전기공학부, ERC-ACI, ASRI

※ 이 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 신진교수연구비에 의하여 연구되었습니다.

- 플랜트  $P(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + Bu(t), & (1) \\ y(t) &= Cx_p(t) + Du(t), & (2) \\ u(t) &= \text{sat}(v(t)). & (3) \end{aligned}$$

- 제어기  $K_f(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cf}(t) &= F_f x_{cf}(t) + G_f e(t), & (4) \\ v(t) &= H_f x_{cf}(t) + L_f e(t), & (5) \\ e(t) &= r(t) - v(t). & (6) \end{aligned}$$

- 제어기  $K_b(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cb}(t) &= F_b x_{cb}(t) + G_b \mu(t), & (7) \\ v(t) &= H_b x_{cb}(t) + L_b \mu(t), & (8) \\ \mu(t) &= y(t) + d(t). & (9) \end{aligned}$$

여기서  $r(t) \in R^n$ 는 기준입력,  $u(t) \in R^m$ 는 제어입력,  $y(t) \in R^n$ 는 출력,  $v(t) \in R^m$ 는 제어기의 출력,  $d(t) \in R^n$ 는 외부교란,  $x_p(t) \in R^p$ 는 플랜트의 상태변수, 그리고  $x_{cb}(t) \in R^{q_1}$ 와  $x_{cf}(t) \in R^{q_2}$ 는 제어기들의 상태변수이다. 상태방정식을 구성하는 상수행렬들은 입출력 및 상태변수에 상응하는 차수를 갖으며  $\text{sat}(\cdot)$ 는 포화 비선형 함수를 의미한다.

Park과 Choi[1]의 ARW 구조를 응용한 보상된 제어기의 구조는 그림 2에 도시하였다. 그림 2에서 포화 비선형은 플랜트의 일부이기 때문에 포화 비선형의 출력  $u(t)$ 는 센서를 통해 측정하거나 수학적 모델링을 통해 예측하거나 해서 얻는다. 그림 2는 이와 같은 의미를 내포한다. 블록  $N$ 은 대상 시스템이 다변수 시스템일 경우 제어 입력 신호의 방향성 보상을 위해 도입한 것으로서, 제어 입력 신호 중에 어느 하나가 포화되었을 때 그 방향성을 유지하면서 신호의 크기를 조정하는 기능을 하는데[2], 본 논문에서 제시하는 방법과 함께 사용하는 것이 바람직하다. 블록  $N$ 을 도입하더라도,  $v(t)$ 에서  $u(t)$ 까지는 또다른 포화함수이므로 본 논문에서 설계하려는 보상기에 영향을 주지 않는다. 여기서 보상된 제어기들의 동특성은 다음과 같다.

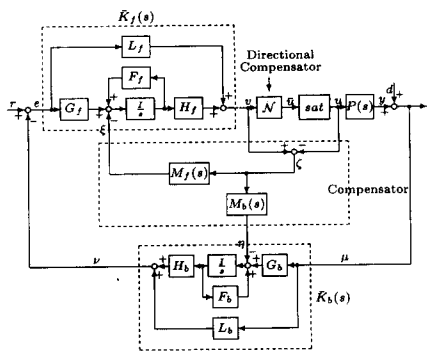


그림 2. 동적 ARW 구조를 채택한 포화 제어 시스템.  
Fig. 2. Saturating control systems adopting the dynamical anti-reset windup structure.

- 보상된 제어기  $\bar{K}_f(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cf}(t) &= F_f x_{cf}(t) + G_f e(t) - \xi(t), & (10) \\ v(t) &= H_f x_{cf}(t) + L_f e(t), & (11) \\ e(t) &= r(t) - v(t). & (12) \end{aligned}$$

- 보상된 제어기  $\bar{K}_b(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cb}(t) &= F_b x_{cb}(t) + G_b \mu(t) - \eta(t), & (13) \\ v(t) &= H_b x_{cb}(t) + L_b \mu(t), & (14) \\ \mu(t) &= y(t) + d(t). & (15) \end{aligned}$$

여기서  $\xi(t) \in R^{q_1}$ ,  $\eta(t) \in R^{q_2}$ 는 보상 신호로서 그것의 동특성은 다음과 같다.

- 동적 보상기  $M_f(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{df}(t) &= \Phi_f x_{df}(t) + \Gamma_f \zeta(t), & (16) \\ \xi(t) &= \Sigma_f x_{df}(t) + \Lambda_f \zeta(t), & (17) \\ \zeta(t) &= v(t) - u(t). & (18) \end{aligned}$$

- 동적 보상기  $M_b(s)$ 의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{db}(t) &= \Phi_b x_{db}(t) + \Gamma_b \zeta(t), & (19) \\ \eta(t) &= \Sigma_b x_{db}(t) + \Lambda_b \zeta(t). & (20) \end{aligned}$$

여기서  $\Phi_f, \Gamma_f, \Sigma_f, \Lambda_f, \Phi_b, \Gamma_b, \Sigma_b$  그리고  $\Lambda_b$  등은 설계변수로서 포화 현상시 전체 시스템이 잘 동작하도록 적절히 선정하여야 한다. 설계목적은 설계변수를 적절히 선정하여 구동기가 포화되었을 때의 응답특성을 포화요소가 존재하지 않았을 때의 시스템이 보이는 응답특성에 가능한 한 비슷하게 유지시키는 것이다. 동적 보상기의 설계는 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미치므로 적절한  $\Phi_f, \Gamma_f, \Sigma_f, \Lambda_f, \Phi_b, \Gamma_b, \Sigma_b$  그리고  $\Lambda_b$  등을 선정하는 합당한 방법이 요구된다. 다음절에서는 이에 관해 다룬다.

### III. 통합된 동적 ARW 보상기의 설계

포화현상이 일어났을 때 시스템의 루우프는 실질적으로 끊어지는 상태가 되기 때문에 제어기의 출력특성은 플랜트에 전혀 전달되지 않는다. 따라서 제어기는 자체의 개루우프 동특성에 따라 작동하게 됨으로서, 전체적인 시스템의 유기적인 특성과 유리된다. 이러한 유리된 제어기의 동특성은 부적절한 제어신호를 발생시키고, 결국 폐루우프 시스템의 성능을 저하시키는 요인이 된다.

이러한 고찰에 의거하여 Park과 Choi[1],[6]는 포화현상이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우의 시간에 따른 시스템의 상태변수 차이를 성능평가의 척도로 삼아 효율적인 ARW 보상방법을 제시한 바 있다.

본 논문에서는 이러한 개념을 확장하여 그림 2의 ARW 구조에서 동적 보상기  $M_f(s), M_b(s)$ 를 설계한다. 설계 목적을 효율적으로 달성하기 위하여 먼저 제어기  $K_f(s)$ 와 제어기  $K_b(s)$ 를 통합하여 다룬다. 앞서 기술된 (2), (4)-(9)로부터 다음과 같은 통합된 제어기 식을 얻는다.

- 통합된 제어기의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2 r(t), & (21) \\ v(t) &= Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2 r(t), & (22) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} x_c(t) &:= \begin{bmatrix} x_{cf}(t) \\ x_{cb}(t) \end{bmatrix}, & F &:= \begin{bmatrix} F_f & -G_f H_b \\ 0 & F_b \end{bmatrix}, & (23) \\ G_1 &:= \begin{bmatrix} G_f L_b \\ -G_b \end{bmatrix}, & G_2 &:= \begin{bmatrix} G_f \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &:= [H_f \quad -L_f H_b], & (24) \\ L_1 &:= L_f L_b, & L_2 &:= L_f \end{aligned}$$

이다. 이때 보상된 제어기  $\bar{K}_f(s)$ 와  $\bar{K}_b(s)$ 를 통합하여 기술하면 다음과 같다.

- 보상된 통합 제어기의 동특성 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2 r(t) - \varphi(t) & (25) \\ v(t) &= Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2 r(t), & (26) \\ \mu(t) &= y(t) + d(t), & (27) \end{aligned}$$

여기서  $\varphi(t) := (\xi^T(t), \eta^T(t))^T$ 이며  $M_f(s), M_b(s)$ 의 통합된 동적 보상기를  $M(s)$ 라 할 때, 그의 동특성은 다음

과 같다.

• 통합된 동적 보상기  $M(s) = (M_f^T(s), M_b^T(s))^T$  의 동특성 :

$$\dot{x}_d(t) = \Phi x_d(t) + \Gamma \zeta(t), \quad (28)$$

$$\varphi(t) = \Sigma x_d(t) + \Lambda \zeta(t), \quad (29)$$

여기서  $x_d(t) := (x_{df}^T(t), x_{db}^T(t))^T$  이고

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_f & 0 \\ 0 & \Phi_b \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ \Gamma_b \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_f & 0 \\ 0 & \Sigma_b \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_f \\ \Lambda_b \end{bmatrix} \quad (31)$$

이다.

$x_c(t)$ 와  $\tilde{x}_c(t)$ 를 각각 포화 요소가 없었을 때와 있을 때의 제어기의 상태 변수라 하자. 그러면  $x_c(t)$ 와  $\tilde{x}_c(t)$ 의 차이를 성능평가함수로 삼자. 성능평가함수를  $J_1$ 이라 할 때 동적 보상기와 관계된 문제 설정은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\min_{M(s)} J_1 = \int_0^\infty \|x_c(t) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt \quad (32)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는 유클리디안 노름(Euclidean norm)이다.

위의 (32)를 최적화하는 동적 보상기를 구하기 위해서 사전 작업으로서 플랜트의 동특성 (1)과 통합된 보상 제어기의 (25)를 포화 비선형의 동작여부에 따라 통합하여 다시 기술한다.

• 포화요소가 존재하지 않을 때의 페루우프 시스템의 동특성 : 앞의 (1)-(3), (21), (22) 그리고  $u(t) = v(t)$ 로부터 다음의 식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_p(t) \end{bmatrix} = A_l \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} + G_r r(t) + G_d d(t), \quad (33)$$

여기서

$$A_l := \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$P := F - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} H$$

$$Q := -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C$$

$$R := B(I + L_1 D)^{-1} H$$

$$S := A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C$$

$$G_r := \begin{bmatrix} G_2 - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} L_2 \\ B(I + L_1 D)^{-1} L_2 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$G_d := \begin{bmatrix} -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] \\ -B(I + L_1 D)^{-1} L_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

이다.

• 포화요소가 존재할 때의 페루우프 시스템의 동특성 : 앞서 기술된 (1)-(3), (25)-(29)로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_d(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} = A_{sat} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_d(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$+ \begin{bmatrix} (G_2 - \Lambda L_2)r(t) - (G_1 - \Lambda L_1)d(t) \\ + [\Lambda(I + L_1 D) - G_1 D]sat(\tilde{v}(t)) \\ \Gamma L_2 r(t) - \Gamma L_1 d(t) - \Gamma(I + L_1 D)sat(\tilde{v}(t)) \\ Bsat(\tilde{v}(t)) \end{bmatrix}$$

여기서

$$A_{sat} = \begin{bmatrix} F - \Lambda H & -\Sigma & -(G_1 - \Lambda L_1)C \\ \Gamma H & \Phi & -\Gamma L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (38)$$

이다. 기호 “ $\sim$ ”는 해당 변수가 포화 요소가 존재할 때

의 변수라는 것을 의미한다. 포화함수  $sat(\cdot)$ 가 선형영역에서 동작하는 경우 (37)은 (33)으로 된다.

$M(t)$ 를 (28)과 (29)에 기술된 동적 보상기에서,  $\zeta(t)$ 로부터  $\varphi(t)$ 로의 임펄스 응답행렬이라 하자. 즉

$$M(t) := \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\Lambda + \Sigma(sI - \Phi)^{-1}\Gamma\} \quad (39)$$

이라 하자. 여기서  $\mathcal{L}^{-1}$ 는 라플라스 역변환을 의미한다. 그러면 (25)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2 r(t) - M(t) * (v(t) - u(t)), \quad (40)$$

여기서 “ $*$ ”는 컨벌루션 연산(convolution operator)을 의미한다.

따라서 (1), (2), (3), (26), (27)과 (40)으로부터 포화요소가 존재할 때의 페루우프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} = A_{aw}(t) \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$+ \begin{bmatrix} [G_2 - M(t) * L_2]r(t) - [G_1 - M(t) * L_1]d(t) \\ + [M(t) * (I + L_1 D) - G_1 D]sat(\tilde{v}(t)) \\ Bsat(\tilde{v}(t)) \end{bmatrix}$$

여기서

$$A_{aw}(t) := \begin{bmatrix} F - M(t) * H & -[G_1 - M(t) * L_1]C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (42)$$

이다. 위 식에서  $[G_2 - M(t) * L_2]r(t)$ 는  $G_2 r(t) - M(t) * (L_2 r(t))$ 를 의미하며, \*에 관계된 나머지 식들도 비슷하게 정의된다.

그림 2에서 플랜트  $P(s)$ 가 불안정한 시스템이라면, 포화요소를 가진 제어 시스템을 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 왜냐하면 제어입력의 제한 때문에 목적하는 위치에 상태변수를 근접시킬 수 없는 그러한 상태값이 항상 존재하기 때문이며, 이는 포화되었을 때 되먹임 루우프가 실질적으로 끊어지는 상태가 된다는 것을 고려한다면 쉽게 이해할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 개루우프적으로 안정한 플랜트만을 다룬다. 이를 포함하여 보상행렬을 설계할 때 필요한 가정을 다음과 같이 한다.

A.1) 시스템 행렬  $A$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

A.2) 포화요소가 없을 때의 선형 제어기  $K_f(s)$ ,  $K_b(s)$ 는 성능과 안정도 면에서 만족할 만한 특성을 준다.

A.3) 선형 페루우프 플랜트의 시스템 행렬  $S = A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

가정 A.1)과 A.2)는 ARW 문제에서 표준적인 것이다. 가정 A.2)는 포화요소가 존재하지 않는다는 가정 아래 기존의 효과적인 설계기법 (예를 들어, PI, LQG/LTR,  $H_\infty$  등) 중의 하나로써 선형 페루우프 시스템의 성능과 안정도를 고려하여, 제어기의 구성요소 (즉  $F_f, F_b, G_f, G_b, H_f, H_b, L_f$  그리고  $L_b$ )들이 미리 설계되어 있다는 것을 의미한다. 가정 A.3)는 기술적인 이유에서 필요한 것으로서, 동적 보상을 설계하기 전에 이 조건을 확인할 수 있다. 가정 A.3)에 관계된 제어기의 매개변수는  $L_1 = L_f L_b$  뿐이다. 따라서 시스템이 이 조건을 만족시키지 않는다면  $L_1$ 을 조정하거나, 제어기를 재 설계하면 된다. 매개의 시스템에서 가정 A.3)은 그리 제한적인 조건이 아니다.

정리 1 : 그림 2와 같은 동적 되먹임 ARW 구조에서, 시스템이 가정 A.1)-A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성

능평가함수 (32)를 최소화시키는 동적 보상기  $M_f^*(s)$ ,  $M_b^*(s)$ 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M_f^*(s) = G_f L_b \times \Delta(s), \quad M_b^*(s) = -G_b \times \Delta(s), \quad (43)$$

여기서

$$\Delta(s) := P(s)[I + L_1 P(s)]^{-1} \quad (44)$$

$$:= \Lambda_\delta + \Sigma_\delta (sI - \Phi_\delta)^{-1} \Gamma_\delta,$$

$$\Phi_\delta := A - B(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b C, \quad (45)$$

$$\Gamma_\delta := B(I + L_f L_b D)^{-1}, \quad (46)$$

$$\Sigma_\delta := [I - D(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b C], \quad (47)$$

$$\Lambda_\delta := D(I + L_f L_b D)^{-1} \quad (48)$$

이다. 이를 상태 공간식으로 나타내면

$$\dot{x}_\delta(t) = \Phi_\delta x_\delta(t) + \Gamma_\delta \zeta(t), \quad (49)$$

$$\varphi(t) = G_1 \Sigma_\delta x_\delta(t) + G_1 \Lambda_\delta \zeta(t) \quad (50)$$

이다. 즉

$$x_{df}(t) = x_{db}(t) = x_\delta(t), \quad (51)$$

$$\Phi_f^* = \Phi_b^* = \Phi_\delta, \quad (52)$$

$$\Gamma_f^* = \Gamma_b^* = \Gamma_\delta, \quad (53)$$

$$\Sigma_f^* = G_f L_b \Sigma_\delta, \quad \Sigma_b^* = -G_b \Sigma_\delta, \quad (54)$$

$$\Lambda_f^* = G_f L_b \Lambda_\delta, \quad \Lambda_b^* = -G_b \Lambda_\delta \quad (55)$$

이다.

증명 : Parseval의 정리에 의하여 성능평가함수  $J_1$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \| \widehat{x}_c(s) - \widehat{x}_c(s) \|^2 ds, \quad (56)$$

여기서 “ $\widehat{\phantom{x}}$ ”는 해당변수의 라플라스 변환을 의미하며,  $s, s = \sigma + j\omega$ 는 복소변수이다. 포화요소가 없을 때의 페루우프 시스템의 라플라스 변환은, (33)으로부터

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_c(s) \\ \widehat{x}_p(s) \end{bmatrix} = (sI - A_l)^{-1} G_r \widehat{r}(s) \quad (57)$$

$$+ (sI - A_l)^{-1} G_a \widehat{d}(s) + (sI - A_l)^{-1} \begin{bmatrix} x_c(0) \\ x_p(0) \end{bmatrix}$$

과 같다. 여기서  $A_l, G_r, G_a$ 는 (34),(35),(36)에 각각 주어져 있으며,  $(x_c^T(0), x_p^T(0))^T$ 는 초기상태이다.

$A_l$ 은 포화요소가 없는 페루우프 시스템의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 A.2)에 의하여 안정행렬이므로, 모든  $Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A_l)$ 의 역행렬은 존재한다. 또한 가정 A.3)에 의하여  $S$ 는 안정행렬이므로, 모든  $Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - S)$ 의 역행렬은 존재한다. 따라서 분할된 행렬의 역행렬 보조정리[9]를 적용하면

$$(sI - A_l)^{-1} \quad (58)$$

$$= \begin{bmatrix} -X(s) & -X(s)Q(sI - S)^{-1} \\ -(sI - S)^{-1}RX(s) & -W(s) \end{bmatrix}$$

이고, 여기서

$$X(s) := -[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R]^{-1}, \quad (59)$$

$$W(s) := -(sI - S)^{-1} + (sI - S)^{-1}RX(s)Q(sI - S)^{-1} \quad (60)$$

이다.

마찬가지로 포화요소가 있을 때의 페루우프 시스템의 라플라스 변환은 (41)로부터

$$\begin{bmatrix} \widehat{x}_c(s) \\ \widehat{x}_p(s) \end{bmatrix} = [sI - A_{aru}(s)]^{-1} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} [G_2 - M(s)L_2] \widehat{r}(s) - [G_1 - M(s)L_1] \widehat{d}(s) \\ + [M(s)(I + L_1 D) - G_1 D] \text{sat}(\widehat{v}) \\ B \text{sat}(\widehat{v}) \end{bmatrix} \\ & + [sI - A_{aru}(s)]^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{x}_c(0) \\ \widehat{x}_p(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서  $(\widehat{x}_c^T(0), \widehat{x}_p^T(0))^T$ 는 초기상태이고,

$$sI - A_{aru}(s) = \begin{bmatrix} sI - [F - M(s)H] & [G_1 - M(s)L_1]C \\ 0 & sI - A \end{bmatrix} \quad (62)$$

이다.

가정 A.1)에 의하여 플랜트의 시스템 행렬  $A$ 는 안정행렬이므로, 모든  $Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A)$ 는 특이행렬이 아니다. 잠정적으로 모든  $Re[s] \geq 0$ 에서  $sI - [F - M(s)H]$ 가 특이행렬이 아니라 가정한다. 이와 같은 가정 아래에서는  $sI - A_{aru}(s)$ 가 역행렬을 갖는다는 것이 보장된다. 먼저 성능평가함수  $J_1$ 을 최소화시키는  $M^*(s)$ 를 구한 다음, 이 특별한 해에 대하여  $sI - [F - M^*(s)H]$ 가 특이행렬이 아님을 보인다.

앞의 (62)에 분할된 행렬의 역행렬 정리[9]를 적용하면

$$[sI - A_{aru}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}(s) & \mathcal{S}_{12}(s) \\ \mathcal{S}_{21}(s) & \mathcal{S}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\mathcal{S}_{11}(s) := \{sI - [F - M(s)H]\}^{-1}$$

$$\mathcal{S}_{12}(s) := -\mathcal{S}_{11}(s)[G_1 - M(s)L_1]C$$

$$\mathcal{S}_{21}(s) := 0$$

$$\mathcal{S}_{22}(s) := (sI - A)^{-1}$$

이다. 위의 (58),(63)을 (57),(61)에 각각 대입하고  $(x_c^T(0), x_p^T(0))^T = (\widehat{x}_c^T(0), \widehat{x}_p^T(0))^T$ 라는 사실로부터,

$$\begin{aligned} \widehat{x}_c(s) - \widehat{\widehat{x}}_c(s) &= \mathcal{E}_1(s) \widehat{r}(s) + \mathcal{E}_2(s) \widehat{d}(s) \\ &+ \mathcal{E}_3(s) \text{sat}(\widehat{v}) + \mathcal{E}_4(s) x_c(0) + \mathcal{E}_5(s) x_p(0) \end{aligned} \quad (64)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(s) &:= -X(s)[G_2 - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} L_2] \\ &- X(s)Q(sI - S)^{-1} B(I + L_1 D)^{-1} L_2 \\ &- \mathcal{S}_{11}(s)(G_2 - M(s)L_2), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(s) &:= X(s)G_1[I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] \\ &+ X(s)Q(sI - S)^{-1} B(I + L_1 D)^{-1} L_1 \\ &+ \mathcal{S}_{11}(s)(G_1 - M(s)L_1), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(s) &:= -\mathcal{S}_{12}(s)B \\ &- \mathcal{S}_{11}(s)[M(s)(I + L_1 D) + G_1 D], \end{aligned} \quad (67)$$

$$\mathcal{E}_4(s) := -X(s) - \mathcal{S}_{11}(s), \quad (68)$$

$$\mathcal{E}_5(s) := -X(s)Q(sI - S)^{-1} + \mathcal{S}_{12}(s) \quad (69)$$

와 같이 정의된다.

$\mathcal{E}_3(s) = 0$ 이 되는  $M_l(s)$ 를 구하여 보자. 그러면

$$\begin{aligned} [G_1 - M_l(s)L_1]C(sI - A)^{-1}B \\ - [M_l(s)(I + L_1 D) - G_1 D] = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

이 성립해야 하며, 이를 만족시키는  $M_l(s)$ 는

$$\begin{aligned} M_l(s) &= G_1[D + C(sI - A)^{-1}B] \\ &\times [(I + L_1 D) + L_1 C(sI - A)^{-1}B]^{-1} \\ &= G_1 P(s)[I + L_1 P(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (71)$$

를 얻는다. 위의 (71)에 역행렬 보조정리[9]와 다음의 항등식

$$\begin{aligned} [I + C(sI - A)^{-1}B(I + L_1 D)^{-1}L_1]^{-1}C(sI - A)^{-1} \\ = C(sI - A)^{-1}[I + B(I + L_1 D)^{-1}L_1 C(sI - A)^{-1}]^{-1} \\ = C\{sI - [A - B(I + L_1 D)^{-1}L_1 C]\}^{-1} \end{aligned} \quad (72)$$

을 대입하여 정리하면

$$M_f(s) = G_1 D(I + L_1 D)^{-1} + G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C \times \{sI - [A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C]\}^{-1} B(I + L_1 D)^{-1} \quad (73)$$

를 얻는다. 위의 (73)을 (65), (66), (68), (69)의  $M(s)$  자리에 대입하면  $\mathcal{E}_1(s) = 0$ ,  $\mathcal{E}_2(s) = 0$ ,  $\mathcal{E}_4(s) = 0$ ,  $\mathcal{E}_5(s) = 0$ 을 얻는다. 따라서 (73)은  $\min J_1 = 0$ 으로 성능평가함수를 최소화시킨다. 즉  $M_f(s)$ 는  $J_1$ 을 최소화시키는 해  $M^*(s)$ 이다.

위의 (73)에 (23), (24)를 대입하면

$$M_f^*(s) = G_f L_b D(I + L_f L_b D)^{-1} + G_f L_b [I - D(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b] C \times \{sI - [A - B(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b C]\}^{-1} \times B(I + L_f L_b D)^{-1}, \quad (74)$$

$$M_b^*(s) = -G_b D(I + L_f L_b D)^{-1} - G_b [I - D(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b] C \times \{sI - [A - B(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b C]\}^{-1} \times B(I + L_f L_b D)^{-1} \quad (75)$$

를 얻는다.  $\Phi_\delta$ ,  $\Gamma_\delta$ ,  $\Sigma_\delta$ ,  $\Lambda_\delta$ 를 (45)-(48)로 정의할 때, 위의 (74), (75)와 (16)-(20)을 비교하면 정리의 결과를 얻는다.

이제 동적 보상기가 (73)의 전달함수를 가질 때, 모든  $\text{Re}[s] \geq 0$ 에서  $sI - [F - M^*(s)H]$ 가 특이행렬이 아님을 증명하자. 가정 (A.2)로부터 포화요소가 없을 때의 폐루우프 방정식 (33)의 시스템 행렬  $A_1$ 은 안정행렬이므로 모든  $\text{Re}[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A_1)$ 은 특이행렬이 아니다. 따라서 행렬식(determinant) 정리[9]로부터

$$\begin{aligned} \det(sI - A_1) &= \det \left( \begin{bmatrix} sI - P & -Q \\ -R & sI - S \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(sI - S) \det \{ (sI - P) - Q(sI - S)^{-1} R \} \\ &= \det(sI - S) \det \{ sI - [F - M^*(s)H] \} \\ &\neq 0 \quad \text{모든 } \text{Re}[s] \geq 0 \end{aligned} \quad (76)$$

이 성립한다. 그러므로 모든  $\text{Re}[s] \geq 0$ 에서  $\det \{ sI - [F - M^*(s)H] \} \neq 0$ 이다. ■

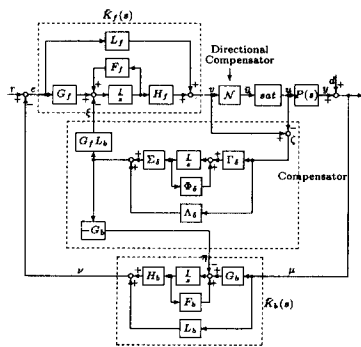


그림 3. 통합된 동적 ARW 구조를 채택한 포화 제어시스템.

Fig. 3. Saturating control systems adopting the unified dynamical anti-reset windup structure.

정리 1의 결과는 그림 3과 같이 도식할 수 있다. 동적 보상기의 구성요소인  $\Phi_\delta$ ,  $\Gamma_\delta$ ,  $\Sigma_\delta$ ,  $\Lambda_\delta$ 는 제어기  $K_f(s)$ ,  $K_b(s)$  그리고 플랜트  $P(s)$ 의 구성요소의 결합으로 결정되지만 그의 차수는 플랜트의 차수와 동일하다.

ARW 구조의 채택 이유는 포화요소가 동작할 때, 즉  $u(t)$ 와  $u^*(t)$  사이에 차이가 발생할 때 제어를 보상하여 시스템의 성능저하를 완화하는 것이다. 그러나 동적 보상을 ARW 구조로 사용한다면, 구동기가 포화상태에서 벗어난 후에도 오랫동안 제어기에 영향을 미칠 수 있으며, 이 경우에는 오히려 제어기에 좋지 않은 영향을 미칠 수 있다. 동적 보상방법에 의하여 비록 제어기의 상태변수를 포화 요소가 없는 시스템에서의 제어기의 상태변수값에 유지시켜 줄 수 있지만, 포화상태에서 벗어난 후에는 이와같은 것이 성능 면에서는 최선이 아닐 수 있다. 그 이유는 포화현상에서 벗어나는 순간, 제어기의 상태변수는 선형 시스템의 그것과 같지만, 플랜트의 상태변수는 선형 시스템의 그것과 달라져 있기 때문이다. 그러나 가정 A.2)에 의하여 선형 제어기는 이러한 새로운 상황아래에서 적절한 제어신호를 생성해낼 것이다. 이러한 이유 때문에, 구동기가 포화상태에서 벗어난 후에는 보상작용을 중지시켜 선형 시스템으로 동작하도록 하는 것이 바람직하다. 이는 구동기가 포화상태에서 벗어날 때마다 동적 보상기의 상태변수를  $x_\delta(t) = 0$ 으로 초기화시킴으로써 실현시킬 수 있다. 구동기가 포화상태에서 벗어난 후에 시스템의 특성으로 인하여 다시 포화현상이 발생하면 동적 보상은 또다시 ARW 작용을 수행한다.

이러한 재초기화 과정을 채택하는 경우, 제시된 동적 보상기  $M^*(s) = G_1 A(s)$ 는 다음과 같은 성능평가함수  $J_2$ 를  $J_2 = 0$ 으로 최소화시킨다

$$\min_{M(s)} J_2 = \int_{t \in E} \|x_c(t, i) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt, \quad (77)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는 유클리디안 노름(Euclidean norm)이고,  $E$ 는 측정 가능한 집합(measurable set)으로  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ,  $E_i = \{t | t \in [t_{s_i}, t_{e_i}]\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ 로 정의된다.  $t_{s_i}$ 와  $t_{e_i}$ 는 각각  $i$ 번째 포화가 시작되는 시간과 끝나는 시간을 의미한다. 목적함수 내의 상태변수  $x_c(t, i)$ ,  $t \in E_i$ 는 원래부터의 포화되지 않은 시스템에서의 제어기의 상태변수가 아니라,  $(x_c^T(t_{e_{(i-1)}}, x_b^T(t_{e_{(i-1)})))^T = (\hat{x}_c^T(t_{e_{(i-1)}}, \hat{x}_b^T(t_{e_{(i-1)})))^T$ 를 초기상태로 하여  $t_{e_{(i-1)}}$  이후에 선형 폐루우프 시스템 (33)이 발전해 나갈 제어기의 상태변수이다. 동적 보상기의 초기화 과정은  $t_{e_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ 에서 매번 일어나므로, 각각의 포화구간  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ 을 분리해서 다룰 수 있다. 예를 들어 구간  $E_2$ 를 고려하자. 여기서 정리 1의 결과를 적용하면 모든  $t$ ,  $t \in E_2$ 에 대하여  $\tilde{x}_c(t) = x_c(t, 2)$ 를 만족한다. 마찬가지로  $\tilde{x}_c(t) = x_c(t, i)$ ,  $t \in E_i$ ,  $i \geq 3$ 가 성립한다. 따라서 정리 1의  $M^*(s)$ 와 재초기화 과정을 도입하면 성능평가함수  $\min J_2 = 0$ 으로 최소화시킨다. 시스템이 포화되지 않은 구간에서는  $\tilde{x}_c(t) = x_c(t, i)$ 이다. 이로부터 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 2 : 대상 시스템이 가정 A.1)-A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 동적 보상기  $M^*(s)$ 와 재초기화 과정을 도입한 포화 시스템은 다음의 성능평가함수  $J_3$ 를  $\min J_3 = 0$ 으로 최소화시킨다.

$$J_3 = \int_0^{\infty} \|x_c(t, i) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt, \quad (78)$$

여기서  $x_c(t, i)$ 는,  $t \in E_i$ ,  $t_{e_{(i-1)}}$  이후에 선형 폐루우프

시스템 (33)이 발전해 나갈 제어기의 상태변수이다.

제시된 동적 되먹임 보상기를 가진 ARW 구조는, 포화되었을 때의 제어기의 상태변수를 포화요소가 없었을 때 발전해 나갈 제어기의 상태변수값에 유지시켜주는 역할을 한다. 이는 제어기의 입출력 특성을 포화요소가 없는 시스템에서의 그것에 유지시킨다는 의미는 아니다. 제시된 ARW 구조는 제어기의 상태변수를 보정할뿐이다. 제시된 동적 보상방법으로 제어기의 상태변수는 포화현상으로 인한 영향을 받지 않지만, 제어기의 고주파 이득행렬  $L_f, L_b$  등은 포화현상의 영향을 제어기의 입출력에 반영한다.

**IV. 다중 루우프 포화 제어 시스템의 리셋 와인드업 방지**

다중 루우프 포화 제어 시스템을 대표하여 그림 4와 같은 내외 루우프로 구성된 시스템을 고려할 수 있으며 임의의 다중 루우프 시스템은 이 시스템을 확장하면 된다.

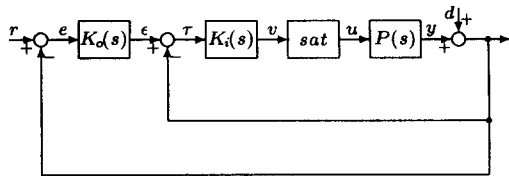


그림 4. 다중 루우프 포화 제어 시스템.  
Fig. 4. Multiloop control systems with saturating actuators.

플랜트의 상태 방정식은 (1)-(3)과 동일하며 제어기들의 상태방정식은 다음과 같다.

- 내측 제어기  $K_i(s)$ 의 동특성 :

$$\dot{x}_{ci}(t) = F_{ci}x_{ci}(t) + G_{ci}\tau(t), \tag{79}$$

$$v(t) = H_{ci}x_{ci}(t) + L_{ci}\tau(t), \tag{80}$$

$$\tau(t) = \epsilon(t) - \mu(t), \tag{81}$$

$$\mu(t) = y(t) + d(t). \tag{82}$$

- 외측 제어기  $K_o(s)$ 의 동특성 :

$$\dot{x}_{co}(t) = F_{co}x_{co}(t) + G_{co}\epsilon(t), \tag{83}$$

$$\epsilon(t) = H_{co}x_{co}(t) + L_{co}\epsilon(t), \tag{84}$$

$$e(t) = r(t) - \mu(t). \tag{85}$$

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템에서와 마찬가지로 관측자 형태의 포화 보상기법을 도입한다. 앞의 2절 및 3절의 보상기 설계절차를 참조하면, 다중 루우프 포화 시스템에 대한 동적 보상기를 얻을 수 있으며, 그림 5에 이를 도시하였다.

정리 3 : 그림 5와 같은 동적 되먹임 ARW 구조에서, 시스템이 가정 A.1)-A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성능평가함수 (32)를 최소화시키는 동적 보상기는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M_i^*(s) = G_{i}(I + L_o) \times \nabla(s), \quad M_o^*(s) = G_o \times \nabla(s), \tag{86}$$

여기서

$$\nabla(s) := P(s)[I + L_i(I + L_o)P(s)]^{-1} \tag{87}$$

$$:= \Lambda_o + \Sigma_o(sI - \Phi_o)^{-1}\Gamma_o,$$

$$\Phi_o := A - B(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}L_i(I + L_o)C, \tag{88}$$

$$\Gamma_o := B(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}, \tag{89}$$

$$\Sigma_o := [I - D(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}L_i(I + L_o)]C, \tag{90}$$

$$\Lambda_o := D(I + L_i(I + L_o)D)^{-1} \tag{91}$$

이다. 이를 상태 공간식으로 나타내면

$$\dot{x}_\rho(t) = \Phi_\rho x_\rho(t) + \Gamma_\rho \zeta(t), \tag{92}$$

$$\xi(t) = G_i(I + L_o)\Sigma_\rho x_\rho(t) + G_i(I + L_o)\Lambda_o \zeta(t), \tag{93}$$

$$\eta(t) = G_o \Sigma_\rho x_\rho(t) + G_o \Lambda_o \zeta(t) \tag{94}$$

이며,  $\xi(t)$ 와  $\eta(t)$ 는 각각 내(inner) 제어기와 외(outer) 제어기에 대한 ARW 보상신호이다.

증명 : 정리 1과 유사한 과정을 거쳐 유도되므로 여기서는 생략한다. ■

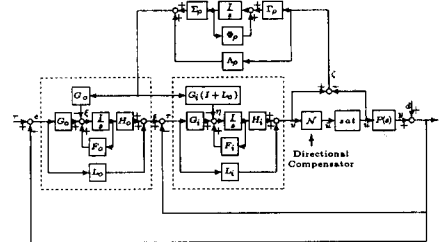


그림 5. 동적 ARW 구조를 채택한 다중 루우프 포화 제어 시스템.

Fig. 5. Multiloop control systems with saturating actuators adopting a dynamic anti-reset windup structure.

정리 1 및 정리 3의 결과를 결합하면, 임의의 다중 제어기 및 다중 루우프 포화 제어 시스템에 대한 동적 포화 보상기를 유도할 수 있다.

**V. 보상된 전체 시스템의 안정도**

포화요소를 가진 제어 시스템에서의 안정도 문제란, 포화되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 되기 때문에, 제어기가 개루우프적으로 불안정한 경우 (예를 들어 PI 제어기) 그것의 상태변수들이 임의로 크게 발산해 버릴 수 있다는 것에 초점이 맞추어져 있다. 따라서 포화요소를 포함한 제어 시스템의 안정도를 다룰 때에는 플랜트 출력의 안정도 보다 다소 강한 조건인 시스템 내부의 상태변수의 안정도 문제를 다루는 것이 일반적이다 [2]-[6]. 본 논문에서도 전체적 안정도(total stability)[9]에 관해 언급한다. 전체적으로 안정된 시스템은, 제한된 에너지를 갖는 입력이 인가될 경우, 출력뿐만 아니라 모든 상태변수들이 제한된 에너지를 갖는다는 개념으로, 다른 말로 하면 BIBS(bounded-input bounded-state) 안정도에 해당된다.

본 절에서 안정도에 대한 언급은 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템에 한하나, 다중 루우프 제어 시스템 또한 유사한 결과를 얻을 수 있다. 먼저 정리 1의 결과인 통합된 동적 보상기  $\mathcal{A}(s)$ 를 고려할 때, 포화요소가 존재할 때의 페루우프 시스템의 동특성은 (37)과 (44)-(48)로부터 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_\delta(t) \\ \tilde{x}_\rho(t) \end{bmatrix} = A_{ni} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_\delta(t) \\ \tilde{x}_\rho(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (G_2 - G_1 \Lambda_\delta L_2) r(t) - (G_1 - G_1 \Lambda_\delta L_1) d(t) \\ + [G_1 \Lambda_\delta (I + L_1 D) - G_1 D] \text{sat}(\tilde{v}(t)) \\ \Gamma_\delta L_2 r(t) - \Gamma_\delta L_1 d(t) - \Gamma_\delta (I + L_1 D) \text{sat}(\tilde{v}(t)) \\ B \text{sat}(\tilde{v}(t)) \end{bmatrix} \tag{95}$$

여기서

$$A_{ni} = \begin{bmatrix} F - G_1 \Lambda_\delta H & -G_1 \Sigma_\delta & -(G_1 - G_1 \Lambda_\delta L_1) C \\ \Gamma_\delta H & \Phi_\delta & -\Gamma_\delta L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \tag{96}$$

이다. 기호 “ $\sim$ ”는 해당 변수가 포화 요소가 존재할 때의 변수라는 것을 의미한다.

앞의 (33)과 (95)의 상태변수 방정식은 전혀 다른 시스템을 기술한 것이 아니라, 그림 3의 ARW 구조에서 포화 요소의 동작양식에 따라 같은 대상 시스템을 다르게 표현한 것에 불과하다. 실제로 (95)는 포화요소가 선형영역에서 동작하는 경우 (33)으로 된다. 따라서 대상 시스템의 안정도 문제는 (95)로 표현된 상태변수 방정식이 안정할 것인가 하는 문제에 귀결된다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 4 : 그림 3과 같은 포화요소를 가진 제어 시스템이 아래 조건을 만족시킨다 하자.

1. 포화요소가 존재하지 않을 때의 선형 시스템이 가정 A.1)~A.3)을 만족시킨다.
2. 동적 보상기가 (44)~(48)로 설계되었다.

그러면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

증명 :  $\Phi_\delta$ 는 동적 보상기의 시스템 행렬로서, 이는 포화요소가 없을 때의 페루우프 플랜트의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 A.3)에 의하여 안정행렬이므로, 동적 보상기 자체는 개루우프적으로 안정하다. 앞의 (45)~(48)을 (96)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$A_{nl} = \begin{bmatrix} F - G_1 A_\delta H - G_1 \Sigma_\delta - (G_1 - G_1 A_\delta L_1) C \\ \Gamma_\delta H & \Phi_\delta & -\Gamma_\delta L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P & Q & -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C \\ R & S & -B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_l & -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (97)$$

여기서  $A_l$ 은 (34)에 주어져 있다. 위의 (97)로부터 제시된 동적 보상기를 채택하는 경우  $A_{nl}$ 의 고유치는  $A_l$ 과  $A$ 의 고유치로 구성되어 있음을 알 수 있는데, 가정 A.1)과 A.2)에 의하여  $A_l$ 과  $A$ 는 각각 안정한 고유치를 가지므로,  $A_{nl}$ 은 안정행렬이다.

동적 보상기에 대한 재초기화 과정이 사용되지 않는다면,  $A_{nl}$ 이 안정행렬이고  $sat(\cdot)$ 이 유계 함수라는 것으로부터, (95)가 안정하므로 포화요소를 가진 제어 시스템의 안정도는 보장된다. 그러나 동적 보상기의 재초기화 과정이 사용된다면, 이 과정에 의한 영향을 고려하여야 한다.

$x(t) := (x_c^T(t), x_\delta^T(t), x_p^T(t))^T$ 를 재초기화 과정이 사용될 때의 시스템의 상태변수라 하고  $\tilde{x}(t) := (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_\delta^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T$ 를 재초기화 과정이 사용되지 않을 때의 시스템의 상태변수라 하자. 그리고  $t_{e_i}$ ,  $i=1, 2, \dots$ 를  $i$ 번째의 재초기화되는 시간, 즉  $i$ 번째의 포화작용에서 벗어나는 시간이라 하자.

먼저 재초기화 과정의 최소의 시간간격이 0보다 크다고 가정하자. 즉  $t_{e_i} - t_{e_{i-1}} = \gamma_i \geq \gamma$ ,  $i=1, \dots, n$ 라 하자. 여기서  $\gamma(>0)$ 는 유한한 상수이고,  $n$ 은 시간간격  $[0, t]$ 에서 일어나는 재초기화 과정의 수효이다. 또한  $\bar{x}(t) := (0^T, x_\delta^T(t), 0^T)^T$ 라 정의하자. 그러면  $x(t)$ 와  $\tilde{x}(t)$  사이의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{i=1}^n e^{A_n(t-t_{e_i})} \bar{x}(t_{e_i})$$

$$= \tilde{x}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t e^{A_n(t-\tau)} \bar{x}(\tau) \delta(\tau - t_{e_i}) d\tau$$

$$= \tilde{x}(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^n e^{A_n(t-\tau)} \bar{x}(\tau) \delta(\tau - t_{e_i}) d\tau, \quad (98)$$

여기서  $\delta(\cdot)$ 는 델타 함수(delta function)이다.

위 (98)의 양변에 벡터 노름을 취한 다음, 노름 부등식을 적용하면

$$\|x(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| + \int_0^t \sum_{i=1}^n \|e^{A_n(t-\tau)}\| \|\bar{x}(\tau)\| \delta(\tau - t_{e_i}) d\tau \quad (99)$$

를 얻는다. 이때 다음의 관계식이 성립한다.

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|x(t)\|, \quad (100)$$

$$\|e^{A_n(t-\tau)}\| \leq K_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (101)$$

여기서  $K_1 > 1$ 이고  $\alpha(>0)$ 는  $-\alpha = \max_i \text{Re}[\lambda_i(A_{nl})]$ 로 정의된다. 위의 (100)과 (101)을 (99)에 대입하면

$$\|x(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| + \int_0^t \sum_{i=1}^n K_1 e^{-\alpha(t-\tau)} \|\bar{x}(\tau)\| \delta(\tau - t_{e_i}) d\tau \quad (102)$$

가 성립한다. 이때

$$\lambda(\tau) := \sum_{i=1}^n K_1 e^{-\alpha(\tau-t_{e_i})} \delta(\tau - t_{e_i}) \quad (103)$$

라 하면

$$\int_0^t \lambda(\tau) d\tau = K_1 \sum_{i=1}^n e^{-\alpha(t-t_{e_i})} \leq c_1 < \infty \quad (104)$$

를 만족한다. 여기서  $c_1$ 은 유한한 상수이다.

위의 (102)에 Bellman-Gronwall의 부등식 보조정리를 적용하면

$$\|x(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| + \int_0^t \lambda(\tau) \|\tilde{x}(\tau)\| e^{\int_\tau^t \lambda(\theta) d\theta} d\tau \quad (105)$$

$$= \|\tilde{x}(t)\| + \sum_{i=1}^n K_1 e^{-\alpha(t-t_{e_i})} \|\tilde{x}(t_{e_i})\| e^{\int_{t_{e_i}}^t \lambda(\theta) d\theta}$$

을 만족한다. 이때 동특성 (95)가 안정하므로, 그의 상태변수  $\tilde{x}(t)$ 는 유한하다. 즉  $\|\tilde{x}(t)\| \leq c_2 < \infty$ , 여기서  $c_2$ 는 유한한 상수이다. 따라서

$$\|x(t)\| \leq c_2 + \sum_{i=1}^n K_1 e^{-\alpha(t-t_{e_i})} c_2 e^{c_1} \leq c_3 < \infty \quad (106)$$

이다. 여기서  $c_3$ 는 유한한 상수이다. 그런데  $n$ 은 기껏해야 선형적으로 증가하므로,  $t \rightarrow \infty$ 일때  $\|x(t)\|$ 는 유한하다. 이제 어떤 시간 간격동안  $\max_i \gamma_i (= t_{e_i} - t_{e_{i-1}}) = 0$ 이라 하자. 이는 그 시간 구간에서 무한 번의 재초기화가 일어난다는 것을 의미한다. 그러면 그 시간 간격 동안에는  $x_\delta(t) = 0$ ,  $\dot{x}_\delta(t) = 0$ , 그리고  $v(t) = u(t)$ 이다. 이것이 의미하는 것은 그 시간 간격동안에는 실질적으로 동적 보상기가 아무런 역할도 못하게 되어, 결국 포화되지 않은 페루우프 시스템으로 동작한다는 것을 뜻한다. 그런데 이때에는 가정 A.2)에 의하여 시스템의 안정도는 보장받는다. 그러므로 제시된 동적 보상 방법을 채택하는 경우 시스템은 전체적으로 안정하다. ■

구동기가 포화되었을 경우 되먹임 루우프는 실질적으로 끊어지게 되어, 시스템의 개루우프적인 응답 특성이 그대로 드러난다. 따라서 제어기 자체가 불안정한 시스템인 경우, 포화현상이 발생하면, 상태변수들이 임의로 발산해 버릴 수 있다. 그러나 제시된 보상방법이 채택되는 경우, 대부분의 대상 제어 시스템이 만족시키는 가정

A.1)-A.3)을 충족시키기만 하면, 제어기의 상태변수는 항상 유한하다는 것을 의미한다.

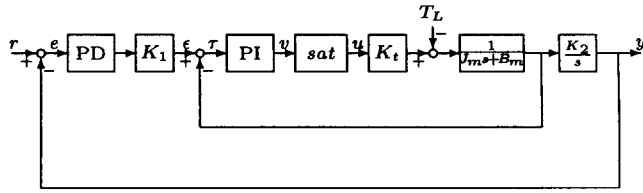


그림 6. 서보모터 제어 시스템.  
Fig. 6. A servo motor control system.

**VI. 서보모터 제어시스템에의 응용**

본 절에서는 제시된 ARW 방법을 서보모터 제어 시스템에 적용하여 그 유용성을 살펴보도록 한다. 속도루우프와 위치루우프로 구성된 서보모터 제어 시스템을 모델링하면 그림 6과 같다.

속도루우프는 외란 제거 성능을 갖게 하기 위해서 PI 제어기를 사용하는데, 실제 시스템에서는 최대 전류의 출력이 제한되어 있으므로 이 리미터의 입력이 제한값을 넘는 경우 적분기의 내부 상태(state)가 매우 커지게 되는 리셋 와인드업 현상이 일어난다. 제어기의 비례 이득과 적분기의 이득이 모델링 오차와 외란에 미치는 영향을 고려하여 PI 제어기를 설계하는 방법은 참고문헌 [10]에 있다.

위치루우프는 단순히 비례제어기만을 사용할 수 있으나 작업특성에 따라서는 미분이득을 함께 사용한 PD 제어기가 보다 우수한 성능을 보인다[11]. 직선보간 및 원호보간에 대한 윤곽오차 해석을 바탕으로 위치루우프에서의 PD 제어기를 설계하는 방법은 참고문헌 [11]에 있다. 참고문헌 [10], [11]에서 설계된 매개변수들은 표 1과 같다.

표 1. 그림 6에서 사용된 매개변수들의 수치.  
Table 1. Parameter values used in Fig. 6.

매개변수	의미	값
$K_{pd}$	위치루우프 비례이득	2.0
$K_{pd}$	위치루우프 미분이득	0.00624
$K_{sp}$	속도루우프 비례이득	1.3
$K_{si}$	속도루우프 적분이득	5.005
$K_t$	토크상수	1.2054 (N · m/A)
$K_1$	D/A 변환기 상수	$(2\pi/60) \times (1000/2047)$
$K_2$	인코더 상수	$24000/(2\pi)$
$J_m$	모터 및 이송테이블의 관성질량	$2.29 \times 0.00376(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
$B_m$	모터 및 이송테이블의 점성마찰계수	$\cong 0$ (N/m/sec)

그림 6과 같은 전류 리미터를 포함한 서보모터 제어 시스템에서 포화현상으로 인한 부정적인 영향을 감소시키기 위해서는 그림 5와 같이 내측루우프뿐만 아니라 외측루우프 제어기까지 같이 보상해 주어야 우수한 보상 효과를 기대할 수 있다. 앞서의 ARW 해석에서 알 수 있듯이 보상기는 기준입력이나 외란과 관계없이 설계할 수 있으므로 그림 6에서  $T_L=0, r=0$ 이라 놓고 동적 ARW 보상기를 설계할 수 있다.

모터와 토크상수를 결합하여 플랜트로 고려했을 때, 다

음과 같은 상태공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_p(t) = -\frac{B_m}{J_m} x_p(t) + K_t u(t), \quad y(t) = \frac{1}{J_m} x_p(t).$$

내측루우프제어기인 PI 제어기, 그리고 인코더, D/A 변환기, 그리고 PD 제어기를 결합한 형태를 외측루우프제어기라 할 때, 각각의 상태공간 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci}(t) &= K_{si} \tau(t), \\ v(t) &= x_{ci}(t) + K_{sp} \tau(t), \\ \dot{x}_{co}(t) &= -(-\phi(t)), \\ \epsilon(t) &= -K_1 K_{pd} K_2 x_{co}(t) + K_1 K_{pd} K_2 (-\phi(t)), \\ \tau(t) &= \epsilon(t) - \phi(t). \end{aligned}$$

동적 ARW 보상기는 정리 3의 결과를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_i^*(s) &= K_{si}(1 + K_1 K_{pd} K_2) \times \nabla(s), \\ M_o^*(s) &= -1 \times \nabla(s), \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \nabla(s) &:= \Sigma_\rho(sI - \Phi_\rho)^{-1} \Gamma_\rho, \\ \Phi_\rho &:= -B_m/J_m - K_t K_{sp}(1 + K_1 K_{pd} K_2)/J_m, \\ \Gamma_\rho &:= K_t, \\ \Sigma_\rho &:= 1/J_m \end{aligned}$$

이다. 예제 시스템은 가정 A.1)-A.3)을 만족하므로 정리 4에 의하여 안정도를 보장받는다. 그림 7에 제시한 동적 ARW 방법을 적용한 구조를 도시하였다. 서보모터 제어 시스템의 경우 인코더와 모터 축은 일체화되어 있으므로 그 사이에 보상신호  $\eta$  를 인가할 수 없다. 따라서 실제적인 동적 ARW 방법을 적용한 서보모터 시스템은 보상신호  $\eta$  를 적분기  $K_2/s$ 에 통과시킨 신호를 인코더 출력 측에 인가하면 된다.

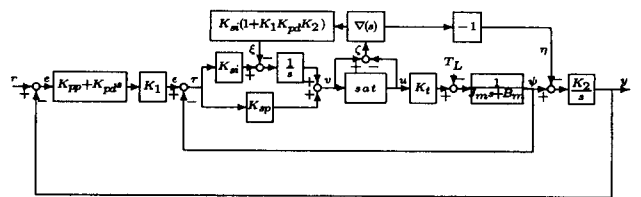


그림 7. 제시한 동적 ARW 방법을 적용한 서보모터 제어 시스템.

Fig. 7. The servo motor control system adopting the proposed dynamic ARW method.

기준입력은  $r(t) = 1000$ (펄스),  $t \geq 0$ 라 하였는데, 이는 15.0°C의 축 회전각에 해당한다. 전류 리미터의 제한값은  $\pm 5$ (A)로 가정한다. 그림 8에 각각 전류 리미터의 제한이 없는 선형 시스템의 출력  $y(t)$ 와 전류 리미터의 출력  $u(t)$ 를 실선으로 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다. 그런데 전류 제한값이 존재한다면 제어 입력이 초기에 130(A) 이상으로서 전류 제한값  $\pm 5$ (A)를 상당히 상회하므로 포화 현상이 발생되어 시스템의 성능을 현저히 저하시키게 된다. 이를 그림 8의 파선으로 도시하였다. 이때 제시한 동적 ARW 보상방법을 적용한 경우 그림 8의 점선에서 볼 수 있는 바와 같이 선형 시스템의 응답 특성을 보다 근접하게 추종한다. 참고로 보통의 서보팩에서와같이 내측루우프만 ARW 구조를 적용한 결과도 그림 8에 일점쇄선으로 도시하였다. 표 2에 각각의 경우에 대해 시스템 응답의 최대피크  $M_p$ , 상승시간(rise time)  $t$ , 그리고 안정시간(settling



time)  $t_s$ 을 정리하였다. 기존의 서보팩의 경우처럼 내루우프인 속도 루우프에만 ARW 구조를 적용한 경우는 표 2에서 알 수 있듯이 성능향상의 결과가 미미하다. 따라서 보다 나은 출력 특성을 얻기 위해서는 본 논문에서 제시한 것처럼 내측루우프뿐만 아니라 외측 루우프까지 함께 ARW 구조를 적용하여야 한다. 표 2의 결과를 보면 그 효용성을 확인할 수 있다.

표 2. 서보 시스템의 응답특성에 대한 성능해석.

Table 2. Performance analysis for the responses of the servo system.

	$M_p$ (%)	$t_r$ (ms)	$t_s$ (ms)
선형 시스템	2.49	9	18
보상하지 않은 포화 시스템	46.8	25	77
제시된 보상방법을 사용한 포화 시스템	2.56	15	28
내루우프만 보상구조를 적용한 포화 시스템	41.1	25	73

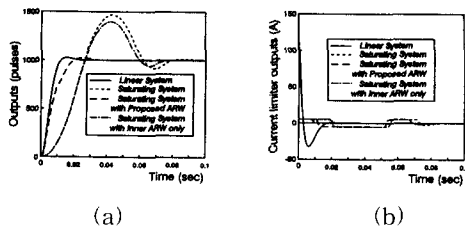


그림 8. 서보 시스템의 응답 특성. (a) 시스템 출력  $y(t)$ , (b) 전류 리미터의 출력  $u(t)$ .

Fig. 8. Responses of the servo system. (a) system outputs  $y(t)$ , (b) Current limiter outputs  $u(t)$ .

VII. 결론

본 논문은 다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화 제어 시스템에서의 동적 ARW 보상방법을 연구하였다. 포화요소가 존재하지 않는다고 가정한 상태에서의 다변수 선형 제어 시스템에 대한 만족할 만한 응답특성을 주는 선형 제어기가 이미 구성되어 있는 경우, 포화 상황에서 성능저하를 완화하기 위하여 추가적인 동적 보상기를 효과적으로 설계하는 방법을 기술하였다. 제시된 동적 ARW 보상구조의 선형은 표준적인 ARW 구조인 Astrom과 Wittenmark의 관측자 기법구조를 응용한 형태이다. 본 논문의 ARW 보상 방법은 Park과 Choi[1]의 방법을 확장한 방법으로서 임의의 제어 구조에 적용할 수 있는 보상방법이다.

제시된 동적 보상기는 기준 입력이나 외부교란 그리고 포화치 등에 무관하게 결정되며, 제어기와 플랜트의 매개 변수들로서 명시적으로 표현되는 형태를 갖기 때문에, 2 단계 설계기법에서 미리 선형 제어기가 설계되어 있기만 하면 직접적으로 쉽게 구할 수 있다. 제시된 보상방법의 역할은 포화 현상시 제어기의 상태변수를 포화 요소가 없었을 때의 제어기가 가질 상태변수에 그대로 유지시키는 것이다.

기존의 ARW 방법이 안정도 보장 면에서 문제가 있었던 데 반하여, 제시된 동적 보상방법은 전체적 안정도를 비교적 넓은 대상 시스템에 대하여 보장해 준다. 따라서 제시된 방법은 성능향상과 안정도 보장을 동시에 만족시키는 보상방법이다. 또한 설계과정이 간단하기 때문에 실제적인 응용성을 가지고 있다. 제시된 방법을 서보모터 제어시스템에 적용하여 그 방법의 유용성을 살펴보았다.

참고문헌

- [1] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1635-1640, Sept., 1995.
- [2] J.-K. Park and C.-H. Choi, "A Compensation method for improving the performance of multi-variable control systems with saturating actuators," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 9, no. 1, pp. 305-323, 1993.
- [3] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems : Theory and Design*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1984.
- [4] R. Hanus, M. Kinnaert and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method," *Automatica*, vol. 23, no. 6, pp. 729-739, 1987.
- [5] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari and C. N. Nett, "A unified framework for the study of anti-windup designs," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869-1883, Dec., 1994.
- [6] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1055-1072, June, 1997.
- [7] K. S. Walgama and J. Sternby, "Inherent observer property in a class of anti-windup compensators," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 3, pp. 705-724, 1990.
- [8] 박종구, 최종호, "다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화 제어 시스템의 정적 리셋 와인드업 방지 방법," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, vol. 2, no. 4, pp. 248-256, 1996.
- [9] T. Kailath, *Linear systems*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.
- [10] 최종호, 임혁, "서보모터 속도 제어기의 이득조정제에 관한 보고서," 연구보고서, 서울대학교 제어 및 시스템 연구실, 1996.
- [11] 나일주, 최종호, 장태정, 최병갑, 송오석, "머시닝센터를 위한 윤곽오차 분석 및 PID 제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, vol. 3, no. 1, pp. 32-39, 1997.



**박 종 구**

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동 대학원 석사(1989), 동 대학원 박사 (1993). 1995년~현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 조교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 실시간 제어 시스템, 시스템

통합 환경.



**최 종 호**

1970년 서울대 공대 기계공학과 졸업. 미국 Univ. of Florida 산업 및 시스템 공학과 석사(1976), 동 대학원 전기공학과 박사(1978). 현재 서울대 공대 전기공학부 교수. 관심분야는 뉴럴 네트워크, 시스템 식별, 적응제어, 모션 제

어 등.