論文98-35S-3-10

컨벡스 최적화를 이용한 상태변수에 시간지연을 가진 선형시스템의 출력궤환 H_∞ 제어기설계

(An Output Feedback Controller Design for Linear Systems with State Delay via Convex Optimization)

柳 爽 桓 *

(Seog-Hwan Yoo)

요 약

이 논문은 상태변수에 시간지연을 가진 선형시불변 시스템의 출력 궤환 H_∞ 제어문제를 취급한다. 제안된 출력궤환 제어기는 선형시불변 시스템과 시간지연 연산자의 하위 선형분수변환으로 표시된다. 출력궤환 제어기가 존재할 충분조건을 선형행렬 부등식의 형태로 제시하며 이 충분조건은 실 유리함수의 제어기가 존재할 조건보다 비제한적이다. 제안하는 방법의 효용성을 수치예를 통하여 예시하였다.

Abstract

This paper deals with an output feedback H_∞ control problem for linear time invariant systems with state delay. The proposed output feedback controller is represented by the lower linear fractional transformation of a linear time invariant system and a delay operator. Sufficient conditions for the existence of the output feedback controller are given in the form of linear matrix inequalities which are less conservative than those for the existence of a rational output feedback controller. We also present a numerical example to demonstrate the efficacy of the proposed method.

I. 서 론

선형 시간지연 시스템의 안정화문제는 많은 공정제어 시스템이 시간지연 시스템으로 모델되므로 실제적인 면에서 아주 중요한 제어문제이다. 또한 시간지연항은 제어시스템의 불안정을 야기하고 제어성능을 열화시키는 중요한 요인이 되므로 이론적인 면에서도 큰 흥미를 끌고 있다. 따라서 시간지연 시스템의 제어에 관한 연구가 많은 관심을 끌고 있으며, 최근에는 H_∞ 제어기 설계기법을 시간지연 시스템에 적용한 시간지연 시스템의 견실한 제어기 설계기법이 많이 연구되고 있다.[1-4] 특히 [1-3]에서는 무기억 상태궤환 제어법칙(memoryless state feedback control law)을 사용하고, [4]에서는 출력궤환을 이용하여 시간지연 시스템을 견실 안정화하는 방법이 제시되었다.

시간지연 시스템을 위한 무기억 상태궤환 제어기 설계의 경우에는 제어기의 존재조건이 컨벡스한 선형 행렬부등식(Linear Matrix Inequality)으로 주어지므로 최근 널리 연구가 된 선형행렬 부등식의 해법[5]을 사용하여 쉽게 제어기를 합성할 수 있다. 그러나 출력궤환 제어기 설계의 경우에는 제어기의 존재를 보장하

* 正會員, 大邱大學校 情報通信工學部

(Taegu Univ. School of Computer and Communication)

※ 이 논문은 1997학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.

接受日字: 1997年10月7日, 수정완료일: 1998年2月20日

는 충분조건이 컨벡스 하지가 않는 행렬 부등식으로 주어져 해를 구하기가 어렵다. 이런 이유로 통상 결정해야 할 설계변수 중 일부를 임의로 설계자가 결정하여 컨벡스한 행렬부등식으로 변환한 후 해를 구하게 되는데 그 결과 설계가 필요이상으로 제한적(conservative)이 된다.

본 연구에서는 시간지연 시스템을 안정화하기 위한 출력 궤환 H_∞ 제어기 설계를 위해 비제한적(less conservative)인 설계조건을 얻은 후 컨벡스 최적화 기법을 사용하여 제어기를 합성하는 설계방법을 제시하고자 한다. 비제한적인 설계조건을 얻는 대가로 설계된 제어기는 제어기의 상태변수에 플랜트의 지연시간과 동일한 상태지연을 포함한다.

이를 위한 접근 방법으로 최근 활발히 연구되고 있는 선형분수 변환(linear fractional transformation, LFT) [6,7] 을 이용하여 시간지연 시스템을 시간지연 항이 없는 시스템으로 변환후 관측기기반 제어기 설계법을 사용하여 출력궤환 제어기를 설계한다.

R^n은 n차원의 실 벡터공간(real vector space)이며 주어진 행렬 A에 대해 A^T는 A의 전치행렬을 A^{-1}은 A의 역행렬을 의미하고, $A^\perp$는 A의 left annihilator를 $A>0(<0)$은 A가 양 한정(음 한정) 행렬을 의미한다. I_n은 $n\times n$ 단위행렬이고 0은 영행렬을 나타내고 문맥상 차원을 쉽게 알 수 있는 경우에는 아래 첨자를 생략한다. $M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}$일 때 Q에 대한 M의 상위 선형분수변환(upper LFT) $F_u(M,Q)$는 $F_u(M,Q)=M_{22}+M_{21}Q(I-M_{11}Q)^{-1}M_{12}$이고 하위 선형분수변환(lower LFT) $F_l(M,Q)$는 $F_l(M,Q)=M_{11}+M_{12}Q(I-M_{22}Q)^{-1}M_{21}$이다. u를 입력으로 하고 z를 출력으로 하는 폐루프 전달함수를 T_{zu}라 표기하고 $\|T_{zw}\|_\infty$는 T_{zu}의 H_∞ 노옴이다.

Ⅱ. 문제의 설정

다음의 상태변수에 시간지연항를 가진 선형시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+A_dx(t-h)+B_1w+B_2u \\ z &= C_1x+D_{11}w+D_{12}u \\ y &= C_2x+D_{21}w+D_{22}u \end{aligned} \tag{1}$$

초기조건:

$$x(t)=\theta(t),\quad t\in[-h\ \ 0] \tag{2}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$는 상태변수, $w(t)\in R^{m1}$는 외부외란신호, $u(t)\in R^{m2}$는 제어입력, $z(t)\in R^{p1}$ 는 오차신호, $y(t)\in R^{p2}$는 출력변수, $h>0$는 시간지연이고 $\theta(t)$는 연속인 시간함수이다. A, A_d, $\cdots$,D_{22}는 적절한 차원을 가진 상수행렬이다. 또한 시간 지연시스템 (1)은 다음의 조건을 만족한다고 가정한다.

가정 :

1) $(A,\ B_2)$, $(C_2,\ A)$는 가안정하고 가검출하다.
2) $D_{12}^TC_1=0,\ D_{12}^TD_{12}=I$
3) $B_1D_{21}^T=0,\ D_{21}D_{21}^T=I$
4) $D_{11}=0,\ D_{22}=0$

위의 가정 1)은 안정한 출력궤환 제어기를 설계하기 위한 필요조건이고 가정 2)와 3)은 단지 수식전개의 간략화를 위해 도입되었으며 가정 2)와 3)을 충족하지 않는 경우에도 본 연구에서 제시된 방법을 사용할 수 있으며 단지 수식전개만 복잡하여 진다. 가정 4)를 만족하지 않는 경우, [8]의 루프 천이법(Loop Shifting Technique)을 사용하여 가정 4)가 만족되게 변환할 수있다.

본 연구에서는 다음의 설계사양을 충족하는 출력궤환 제어기를 설계한다.

설계사양 :

1) $w(t)\equiv 0$일 때 시간지연시스템 (1)이 점근적으로 안정하고
2) $\theta(t)\equiv 0$, $t\in[-h,\ 0]$일 때 $\|T_{zw}\|_\infty\le\gamma$를 만족한다.

위의 제어문제를 풀기 위해 그림 1과 같은 형태의 폐루프 시스템을 구성한다. 그림 1에서 Δ_h는 h초 시간지연 연산자이고 시간지연 시스템 (1)은 $F_u(G(s),\Delta_h)$으로 표현되어 있으며 $G(s)$는 다음과 같다.

$$G(s)=\left[\begin{array}{c|ccc} A & A_d & B_1 & B_2 \\ \hline I_n & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{3}$$

출력궤환 제어기는 $F_l(K(s), \Delta_h)$의 형태로 주어지며 제어기에도 시간지연항이 포함되어 제어기의 전달함수가 실 유리함수가 아니다.

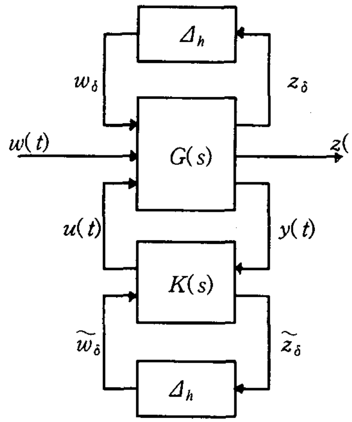

그림 1. 시간지연 시스템의 LFT 표현
Fig. 1. LFT Representation of Linear Time Delay System.

그림 1의 제어시스템에서 설계사양을 충족하는 $K(s)$를 구하기 위해 그림 1을 [7]에서와 같이 그림 2에 등가적으로 표현한다. 그림 2에서는 제어기에 연결된 시간지연 연산자를 이동시켜 $K(s)$는 시스템 $F_u(G_a(s), \Delta_{hh})$에 연결된 제어기로 표현한다. 여기에서 $\Delta_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta_h & 0 \\ 0 & \Delta_h \end{bmatrix}$이고 확장 시스템 $G_a(s)$는 그림 2에서 점선으로 구획지어진 부분이다.

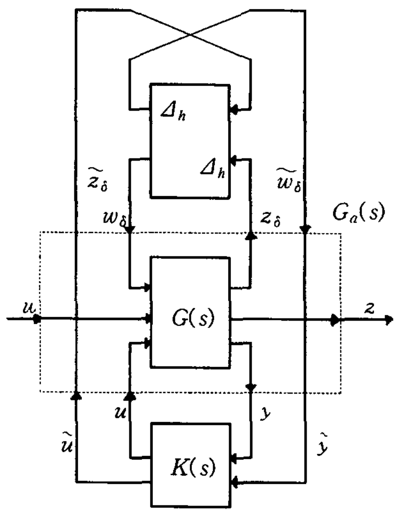

그림 2. 등가시스템
Fig. 2. Equivalent System.

$w_0 = [w_\delta^T \ \ \widetilde{w}_\delta^T]^T$, $z_0 = [z_\delta^T \ \ \widetilde{z}_\delta^T]^T$, $u_a = [u^T \ \ \widetilde{u}^T]^T$ 및 $y_a = [y^T \ \ \widetilde{y}^T]^T$는 확장 시스템 $G_a(s)$의 등가 외부외란 신호, 등가 오차신호, 등가 제어입력 , 등가 출력변수이다. $G_a(s)$의 상태공간 구현은 다음과 같이 주어진다.

$$
G_a(s) := \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_{0a} & B_{1a} & B_{2a} \\ \hline C_{0a} & D_{00a} & D_{01a} & D_{02a} \\ C_{1a} & D_{10a} & D_{11a} & D_{12a} \\ C_{2a} & D_{20a} & D_{21a} & D_{22a} \end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|cc:c:cc} A & 0 & A_a & B_1 & B_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline C_1 & 0 & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ \hdashline C_2 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4}
$$

따라서 제어문제는 그림 2의 시스템 $F_u(G_a(s), \Delta_{hh})$와 출력궤환 제어기 $K(s)$가 연결된 폐루프 시스템이 설계사양을 충족하도록 $K(s)$를 설계하는 문제로 귀착된다.

Ⅲ. 관측기 기반 제어기합성

그림 2에서 설계할 $K(s)$의 상태공간 구현이 다음과 같다고 가정한다.

$$
K(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ \hline C_{k1} & D_{k11} & D_{k12} \\ C_{k2} & D_{k21} & D_{k21} \end{array}\right] \tag{5}
$$

그러면 그림 1의 출력 궤환 제어기 $F_l(K(s), \Delta_h)$는 다음의 상태공간 구현을 갖는다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_k &= A_k x_k + B_{k1} y + B_{k2} \widetilde{w}_\delta \\
u_k &= C_{k1} x_k + D_{k11} y + D_{k12} \widetilde{w}_\delta \\
\widetilde{z}_\delta &= C_{k2} x_k + D_{k21} y + D_{k22} \widetilde{w}_\delta \\
\widetilde{w}_\delta &= \widetilde{z}_\delta (t-h)
\end{aligned} \tag{6}
$$

$F_l(K(s), \Delta_h)$가 잘 정의되기 위해서는 $D_{k22} = 0$이어야 함을 (6)에서 관찰할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 $F_l(K(s), \Delta_h)$가 잘 정의되기 위해 strictly proper한 $K(s)$를 합성하고자 하며 $K(s)$의 상태공간 구현을 다

음과 같은 관측기의 형태로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k = & \ Ax_k + B_{0a}K_0x_k + B_{1a}K_1x_k + B_{2a}K_2x_k \\ & + L(y_a - C_{2a}x_k - D_{20a}K_0x_k - D_{21a}K_1x_k) \\ u_a = & \ K_2x_k \end{aligned} \tag{7}$$

여기에서 K_0x_k는 w_0를 K_1x_k는 u를 추정하기 위한 항이며 설계사양을 충족하도록 K_0, K_1, K_2및 L을 결정한다. 제어기 (7)을 (4)의 $G_a(s)$에 적용할 때 폐루프 시스템은 $e = x_k - x$라 정의하면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = & \ F\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + G_0 w_0 + G_1 u \\ z_0 = & \ H_0\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ z = & \ H_1\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ w_0 = & \ z_0(t-h) \end{aligned} \tag{8}$$

이 되며 여기에서

$$F = \begin{bmatrix} A + B_{2a}K_2 & B_{2a}K_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = (B_{0a} - LD_{20a})K_0 + (B_{1a} - LD_{21a})K_1,$$

$$\begin{aligned} F_4 = & \ A + (B_{0a} - LD_{20a})K_0 + (B_{1a} - LD_{21a})K_1 \\ & - LC_{2a} \end{aligned}$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} B_{0a} \\ LD_{20a} - B_{0a} \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} B_{1a} \\ LD_{21a} - B_{1a} \end{bmatrix},$$

$$H_0 = [\ C_{0a} + D_{02a}K_2 \ \ D_{02a}K_2],$$

$$H_1 = [\ C_{1a} + D_{12a}K_2 \ \ D_{12a}K_2].$$

이 된다.

시간지연 시스템 (1) 혹은 폐루프 시스템 (8)이 설계사양을 충족하도록 하는 출력 궤환 제어기의 존재조건을 다음 정리에서 기술한다.

정리 1 : 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 다음의 행렬 방정식 (9)와 행렬부등식 (10)과 (11)을 만족하는 양한정 행렬 Q_1, Q_2, R_3, S_3가 존재하면 시간지연 시스템 (1)의 설계사양을 충족하는 출력궤환 제어기가 존재한다.

1) $$\begin{aligned} & Q_1A^T + AQ_1 + A_dS_3A_d^T + \gamma^{-2}B_1B_1^T \\ & - B_2B_2^T + Q_1(C_1^TC_1 + \varepsilon I)Q_1 \\ & + Q_1S_3^{-1}Q_1 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

2) $$\begin{aligned} & A^TQ_2 + Q_2A + Q_2A_dR_3^{-1}A_d^TQ_2 + R_3 \\ & + \gamma^{-2}Q_2B_1B_1^TQ_2 + C_1^TC_1 \\ & - \gamma^2C_2^TC_2 + \varepsilon I < 0 \end{aligned} \tag{10}$$

3) $$Q_1Q_2 > I, \quad R_3S_3 > I \tag{11}$$

(증명) 시간지연 시스템의 H_∞ 노옴 제약조건 [4]을 시스템 (8)에 적용하면

$$\begin{aligned} M = & \ F^TP + PF + H_0^TRH_0 + H_1^TH_1 \\ & + PG_0R^{-1}G_0^TP + \gamma^{-2}PG_1G_1^TP < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

을 충족하는 양한정 행렬 P, R이 존재하면 폐루프 시스템 (8)은 설계사양을 충족한다. 따라서 $M<0$이 되는 양 한정 행렬 P, R이 존재하도록 K_0, K_1, K_2, L을 결정한다. 이를 위하여

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix}, \quad RS = I$$

라 정의한다. 여기에서 M, P, R, S의 부분 행렬의 크기는 F, G_0, G_1 등의 부분 행렬의 크기에 적합하도록 결정된다.

(8)에서 정의된 행렬을 행렬 부등식 (12)에 대입하여 정리하면 M_2는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_2 = & \ P_1B_{2a}K_2 + K_0^T(B_{0a} - LD_{20a})^TP_2 \\ & + K_1^T(B_{1a} - LD_{21a})^TP_2 \\ & + (C_{0a} + D_{02a}K_2)^TRD_{02a}K_2 \\ & + K_2^TD_{12a}^TD_{12a}K_2 \\ & + P_1B_{0a}R^{-1}(LD_{20a} - B_{0a})^TP_2 \\ & - \gamma^{-2}P_1B_{1a}B_{1a}^TP_2 \end{aligned} \tag{13}$$

$M_2 = 0$이 되도록 K_0, K_1, K_2, L을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} K_0 = & \ R^{-1}B_{0a}^TP_1, \quad K_1 = \gamma^{-2}B_{1a}^TP_1, \\ K_2 = & \ -(D_{02a}^TRD_{02a} + D_{12a}^TD_{12a})^{-1} \\ & \cdot (D_{02a}^TRC_{0a} + B_{2a}^TP_1) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} L = & \ \{B_{0a}R^{-1}D_{20a}^T + P_2^{-1}(C_{2a}^T + P_1B_{0a}R^{-1}D_{20a}^T)\} \\ & \cdot (D_{20a}R^{-1}D_{20a}^T + \gamma^{-2}D_{21a}D_{21a}^T)^{-1} \end{aligned}$$

M_1을 계산하여 (14)에서 정의된 K_0, K_1, K_2, L을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} M_1 = & \ A^TP_1 + P_1A + P_1B_{0a}R^{-1}B_{0a}^TP_1 \\ & + \gamma^{-2}P_1B_{1a}B_{1a}^TP_1 + C_{0a}^TRC_{0a} \\ & + C_{1a}^TC_{1a} - (D_{02a}^TRC_{0a} + B_{2a}^TP_1)^T \\ & \cdot (D_{02a}^TRD_{02a} + D_{12a}^TD_{12a})^{-1} \\ & \cdot (D_{02a}^TRC_{0a} + B_{2a}^TP_1) \end{aligned} \tag{15}$$

이 된다. $Q_2 = P_1 + P_2$라 정의하고 M_3를 계산하여 $M_1 + M_3$를 구하면

$$
\begin{aligned}
M_1+M_3= {} & A^TQ_2+Q_2A+Q_2B_{0a}R^{-1}B_{0a}^TQ_2 \\
& +\gamma^{-2}Q_2B_{1a}B_{1a}^TQ_2++C_{0a}^TRC_{0a} \\
& +C_{1a}^TC_{1a}-(Q_2B_{0a}R^{-1}D_{20a}^T+C_{2a}^T) \\
& \cdot(D_{20a}^TR^{-1}D_{20a}^T+\gamma^{-2}D_{21a}D_{21a}^T)^{-1} \\
& \cdot(D_{20a}R^{-1}B_{0a}^TQ_2+C_{2a})
\end{aligned}
\tag{16}
$$

이 된다. (4)에서 정의된 B_{0a}, B_{1a}, $\cdots, D_{21a}$를 (15)와 (16)에 대입하여 간략히 하면

$$
\begin{aligned}
M_1= {} & A^TP_1+P_1A+P_1A_dS_3A_d^TP_1 \\
& +P_1(\gamma^{-2}B_1B_1^T-B_2B_2^T)P_1 \\
& +C_1^TC_1+S_3^{-1}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
M_1+M_3= {} & A^TQ_2+Q_2A+Q_2A_dR_3^{-1}A_d^TQ_2 \\
& +R_3+\gamma^{-2}Q_2B_1B_1^TQ_2 \\
& +C_1^TC_1-\gamma^2C_2^TC_2
\end{aligned}
\tag{18}
$$

을 얻는다. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해

$$
\begin{aligned}
M_1+\varepsilon I= {} & A^TP_1+P_1A+P_1A_dS_3A_d^TP_1 \\
& +P_1(\gamma^{-2}B_1B_1^T-B_2B_2^T)P_1 \\
& +C_1^TC_1+S_3^{-1}+\varepsilon I \\
= {} & 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
& M_1+M_3+\varepsilon I=A^TQ_2+Q_2A \\
& \quad +Q_2A_dR_3^{-1}A_d^TQ_2+R_3 \\
& \quad +\gamma^{-2}Q_2B_1B_1^TQ_2+C_1^TC_1 \\
& \quad -\gamma^2C_2^TC_2+\varepsilon I<0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

은 $M<0$을 보장한다. (19)에서 $Q_1=P_1^{-1}$라 정의하고 $Q_1(M_1+\varepsilon I)Q_1$을 계산하면

$$
\begin{aligned}
& Q_1A^T+AQ_1+A_dS_3A_d^T+\gamma^{-2}B_1B_1^T-B_2B_2^T \\
& \quad +Q_1(C_1^TC_1+\varepsilon I)Q_1+Q_1S_3^{-1}Q_1=0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

을 얻는다.

F는 양한정 행렬이므로 $P_1>0$, $P_2>0$에서 $Q_1>0$이고 $Q_2-Q_1^{-1}>0$의 제약조건을 얻는다. R, S의 부분행렬 중 R_3와 S_3만 제약조건 (20)과 (21)에 관련되므로 $RS=I$가 되기 위해 $R_3S_3>I$의 조건을 얻는다. 증명 끝.

제어기를 합성하기 위해서는 정리 1에서 행렬 방정식 (9)와 행렬부등식 (10)-(11)의 해를 구하여 (14)에 대입하면 제어기 파라메터 K_0, K_1, K_2, L을 얻는다.

최근 활발히 연구가 되고있는 컨벡스 최적화기법을 사용한 (9)-(11)의 방정식과 부등식의 해법을 기술한다. 행렬 방정식 (9)는 리카티 형태의 방정식과 부등식의 관계로부터

$$
\begin{aligned}
& \widehat{Q}_1A^T+A\widehat{Q}_1+A_dS_3A_d^T+\gamma^{-2}B_1B_1^T-B_2B_2^T \\
& \quad +\widehat{Q}_1(C_1^TC_1+\varepsilon I)\widehat{Q}_1+\widehat{Q}_1S_3^{-1}\widehat{Q}_1<0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

을 만족하는 양한정 행렬 $\widehat{Q}_1$이 존재하면 리카티 형태의 방정식 (9)을 만족하는 양한정 행렬 Q_1이 존재하며 $Q_1>\widehat{Q}_1$이다. [9] 따라서 (9)-(11)을 만족하는 해를 구하는 문제는 다음의 컨벡스 최적화문제로 귀착된다.

컨벡스 최적화문제 : 다음의 컨벡스 제약조건 (23)-(24)을 만족하고 $trace(Q_1)$을 최대화하는 Q_1, Q_2, R_3, S_3를 구하여라.

$$
\begin{bmatrix} \phi_1 & Q_1 & Q_1 \\ Q_1 & -(C_1^TC_1+\varepsilon I)^{-1} & 0 \\ Q_1 & 0 & -S_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{23}
$$

$$
\begin{bmatrix} \phi_2 & Q_2B_1 & Q_2A_d \\ B_1^TQ_2 & -\gamma^2 I & 0 \\ A_d^TQ_2 & 0 & -R_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{24}
$$

$$
\begin{bmatrix} Q_1 & I \\ I & Q_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} R_3 & I \\ I & S_3 \end{bmatrix} > 0 \tag{25}
$$

여기에서

$$
\begin{aligned}
\phi_1= {} & Q_1A^T+AQ_1+A_dS_3A_d^T \\
& +\gamma^{-2}B_1B_1^T-B_2B_2^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2= {} & A^TQ_2+Q_2A+R_3+C_1^TC_1 \\
& -\gamma^2C_2^TC_2+\varepsilon I
\end{aligned}
$$

이다.

컨벡스 최적화문제의 해를 (14)에 대입하면 상태공간에서 (7)식으로 표현되는 $K(s)$의 파라메터를 다음과 같이 얻는다.

$$
K_0=\begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} A_d^TQ_1^{-1}, \tag{26}
$$

$$
K_1=\gamma^{-2}B_1^TQ_1^{-1}, \tag{27}
$$

$$
K_2=-\begin{bmatrix} B_2^TQ_1^{-1} \\ R_1^{-1}R_2 \end{bmatrix}, \tag{28}
$$

$$
L=(Q_2-Q_1^{-1})^{-1}[\,\gamma^2C_2^T \;\; Q_2A_dS_2^TS_1^{-1}] \tag{29}
$$

다음 실 유리함수(real rational function)로만 표현되는 출력 궤환 제어기의 설계와 비교한다. [4]에서 제시된 방법을 사용하면 제어기가 존재할 충분조건

은 다음 (30)-(32)를 만족하는 해의 존재 여부로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} N_{CD} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & XB_1 & XA_d \\ B_1^T X & -\gamma^2 I & 0 \\ A_d^T X & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{CD}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} N_{BD} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & YC_1^T & Y \\ C_1 Y & -I & 0 \\ Y & 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{BD}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \text{ 이고 } SR = I \tag{32}$$

여기에서

$$N_{BD} = \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp}, N_{CD} = \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp},$$

$$M_1 = A^T X + XA + R + C_1^T C_1,$$

$$M_2 = YA^T + AY + \gamma^{-2} B_1 B_1^T + A_d S A_d^T$$

이다. 그러나 (32)에 있는 $SR=I$의 조건 때문에 행렬부등식 (30) - (32)는 컨벡스하지가 않으며 해를 구하기가 아주 어렵다. 통상적으로 S나 R중 어느 한개를 임의로 정하여 컨벡스한 선형 행렬 부등식으로 만든후 해를 구하지만 필요 이상으로 제한적이 된다.

Ⅳ. 수치예

본 연구에서 제시된 방법의 타당성을 입증하기 위하여 간단한 수치예를 들어 효용성을 입증한다. 시간지연 시스템 (1)이 다음과 같이 주어졌다 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_2 = [1\ \ 0],\ D_{21} = [0\ \ 1]$$

제약조건 (23)-(25)를 만족하는 컨벡스 최적화문제를 [5]의 방법을 사용하여 해를 구한 결과 달성할 수 있는 최소의 H_∞ 노옴은 근사적으로 $\gamma_{opt} \approx 1.1338$이고 이때의 $K(s)$는

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ \hline C_{k1} & D_{k11} & D_{k12} \\ C_{k2} & D_{k21} & D_{k21} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|ccc} -7.64 & 1.45 & 8.42 & -1.87 & 5.38 \\ -4.62 & -1.58 & 0.901 & 0.028 & -0.079 \\ \hline -0.57 & -0.58 & 0 & 0 & 0 \\ -0.29 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.13 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

를 얻었다. 따라서 출력궤환 제어기는

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_{k1} y + B_{k2} C_{k2} x_k(t-h) \\ u &= C_{k1} x_k \end{aligned} \tag{33}$$

의 상태공간 구현을 얻는다. 실유리 함수의 출력 궤환 제어기의 경우 행렬부등식 (30)-(32)에서 $S=R=I$라 두었을 때 최소 달성가능한 H_∞노옴은 근사적으로 $\gamma_{opt} \approx 2.4163$이었으며 본 연구에서 제시한 설계법은 상당히 비제한적임을 알 수있다.

Ⅴ. 결 론

선형 시간지연 시스템을 위한 출력 궤환 H_∞ 제어기를 설계하였다. 제안된 출력 궤환 H_∞ 제어기는 시간 지연시스템을 점근 안정화시키고 폐루프 시스템의 H_∞노옴을 기 설정된 값 이하로 유지한다. 제어기가 존재할 충분조건은 선형 행렬 부등식으로 주어지며 제어기를 합성하기 위하여 컨벡스 최적화 기법을 사용하였다. 제안된 제어기는 통상적인 시간지연 시스템의 실 유리함수인 H_∞ 제어기와는 달리 제어기의 상태공간 구현에서 시간지연항을 포함하여 플랜트에 적용하기가 다소 복잡하다. 그러나 그 대가로 비제한적인 설계조건을 얻을 수가 있어 폐루프 시스템의 H_∞ 노옴을 훨씬 더 낮은 값으로 유지할 수가 있다. 따라서 본 연구에서 제시된 설계법은 불확실성이 큰 시간지연 시스템의 견실안정화에 적합하며 수치예를 통해 효용성을 입증하였다.

참 고 문 헌

[1] S. Phoojaruenchanachai and F. Furuta, "Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time varying state delays", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 1022-1026, 1992.

[2] J. H. Lee, S. W. Kim and W. H. Kwon,

"Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39, pp. 159-162, 1994.

[3] M. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi, "Quadratic stabilization of continuous time systems with state delay and norm bounded time varying uncertainties", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39, pp. 2135-2139, 1994.

[4] 정은태, 오도창, 박홍배, "상태지연 선형시스템에 대한 출력되먹임 H_∞ 제어기 설계", 제어,자동화,시스템공학회지, 제3권, 2호, pp. 109-113, 1997

[5] A. Nemirovskii and P. Gahinet, "The projective method for solving linear matrix inequalities", Proceedings of American Control Conference, pp.840-844, Baltimore, Maryland, June 1994.

[6] W. M. Lu, K. Zhou and J. C. Doyle, "Stabilization of uncertain linear systems : An LFT Approach", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 41, No. 1, pp. 50-65, 1996.

[7] P. Apkarian and P. Gahinet, "A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, No. 5, May 1995.

[8] B. A. Bamieh and J. B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with applications to H_∞ sampled data control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, No. 4, pp. 418-435, 1992.

[9] X. Xin and T. Mita, "The design of strictly proper H_∞ controllers for general generalized plants via LMI", Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 1009-1014, Kobe, Japan, December 1996.

저 자 소 개

柳 奭 桓(正會員) 第34卷 S編 第11號 참조
현재 대구대학교 정보통신공학부 교수