

論文98-35S-5-4

# 디스크형태의 해석적영역을 가지는 이산모델 차수축소 (Discrete Model Reduction over Disc-Type Analytic Domains)

吳道昌\*, 丁銀泰\*\*, 李甲來\*\*\*, 朴烘培\*\*\*\*

(Do Chang Oh, Eun Tae Jeung, Kap Rai Lee, and Hong Bae Park)

## 요 약

본 논문에서는 디스크형태의 해석적영역을 가지는 이산모델 차수축소방법을 제안한다. 먼저 표준 양선형사상(standard bilinear mapping)에 의해 설정된 디스크에 대해 Hankel 특이치를 정의하고, 기존의 일반화된 특이섭동 근사(generalized singular perturbation approximation: GSPA)와 직접절단(direct truncation: DT)을 설정된 디스크에 대해 일반화한다. 또한 더 작은 해석적영역을 가지는 저차의 모델은 더 작은  $\infty$ -노름 오차한계치를 가진다는 것을 증명한다. 제안된 방법에 의해 구한 저차의 모델은 원래의 해석적영역을 그대로 가지므로써 선택한 영역안에서 극점을 유지하는 저차의 모델을 얻을 수 있는 장점을 가진다.

## Abstract

This paper is on the discrete model reduction method over disc-type analytic domains. We define Hankel singular value over the disc that is mapped by standard bilinear mapping. And the generalized singular perturbation approximation and the direct truncation are generalized to GSPA and DT over a disc. Furthermore, it is shown that the reduced order model over a smaller domain has a smaller  $\infty$ -norm error bound. And the proposed reduction method is used to obtain the regional pole placement property.

## I. 서 론

이산시간영역의 모델에 대하여 복소평면의  $z = \pm 1$

\* 正會員, 建陽大學校 情報電子工學部  
(Dept. of Elec. Information, Konyang Univ.)  
\*\* 正會員, 昌原大學校 制御計測工學科  
(Dept. of Control and Instrumentation Eng.,  
Changwon National Univ.)  
\*\*\* 正會員, 斗源工業專門大學 컴퓨터應用制御科  
(Dept. of Computer Applied Control, Doowon  
Technical College)  
\*\*\*\* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部  
(School of Electronic and Electrical Engineering,  
Kyungpook National Univ.)

接受日字: 1997年11月28日, 수정완료일: 1998年3月30日

에서 일반화된 특이섭동 근사<sup>[1-3]</sup>(generalized singular perturbation approximation: GSPA)와 직접절단<sup>[4]</sup>(direct truncation: DT)과 같은 차수축소 방법은 이산 모델축소이론에서 잘 알려진 결과이다. 이러한 방법들에서 오차는 단위원 외부(unit circle outside: UCO)에 대한  $L_\infty$ -노름의 의미에서 한계치를 가진다. 최근에는 UCO에 대한  $L_\infty$ -노름 오차한계치를 구하고, 이것을 줄이려는 연구<sup>[2], [3], [5-7]</sup>들이 활발히 이루어지고 있다. 또한 주파수 대역을 고려한 모델축소기법<sup>[3], [6], [8-10]</sup>들이 많이 제시되었다. 그러나 동작신호(working signal) 및 극점(pole)등을 고려한 제한된 주파수영역에서 오차를 작게하는 이산 차수축소법은 아직 제시된 바 없다. 따라서 이러한 연구의 한 접근으로서 디스크형태의 해석적영역을 가지는 이산 모델축소기법을 고려한다. 연속시스템의 경우

Jonckheere 등<sup>[9]</sup>은 복소평면의 우반부로부터 양선형 사상을 이용한 디스크를 정의하고, 이 디스크에 대한 모델 차수축소기법을 제안하였다.

본 논문에서는 복소평면에서 원(circle)으로 제한되는 디스크형태의 해석적영역을 다룬다. 넓은 의미에서는 직선도 하나의 원으로 간주하고, 해석적영역은 이 원의 내부 혹은 외부가 된다. 이 디스크 형태의 해석적영역을 간단히 '디스크  $D$ '라 표현한다. 먼저 디스크  $D$ 로의 표준 양선형사상(standard bilinear mapping)을 정의하고, 이 디스크에 대한 Hankel 특이치를 정의한다. 그리고 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치의 단조성(monotone property)을 증명하며, 차수축소시 해석적영역이 유지됨을 보인다. 결과적으로 일반화된 특이섭동 근사 및 직접절단과 같은 균형시스템에 대한 기존의 차수축소법들을 설정된 디스크에 대한 차수축소법으로 일반화되며, 특별히 디스크  $D$ 에 대한 복소평면의  $z = \pm 1$ 에서 일반화된 특이섭동 근사와 직접절단을 제안한다. 이러한 차수축소법들에서 더 작은 디스크  $D$ 에 대한 처치의 모델은 더 작은  $\infty$ -노움 오차 한계치를 가진다. 제시된 방법에 의하면 제한된 주파수와 천이속도를 가지는 신호집단안에 있는 동작신호를 고려한 차수축소방법의 개발에 접근할 수 있다. 또한 제한된 영역으로 극점을 유지하는 차수축소와 불안정한 이산시스템의 차수축소가 가능하다. 마지막으로 예제를 통하여 제안된 차수축소방법의 타당성을 보인다.

## II. 디스크형태를 가지는 해석적영역으로의 양선형사상

이 장에서는 본 논문에서 필요한 몇가지 정의를 내리고 UCO에서 디스크  $D$ 로의 표준 양선형사상을 정의한다.

### 정의 1

복소평면에서 복소평면으로의 양선형사상은

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

로 정의되고 복소평면안의 어떠한 원이라도 이 양선형사상에 의하여 복소평면안의 임의의 원으로 사상될 수 있다. 여기서  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 는 모두 실수이다.

여기서는 특별히 UCO로부터 하나의 원으로 제한된 디스크  $D$ 로의 사상을 다루며, 디스크  $D$ 는 실축에 대하여 대칭이라 가정한다. 또한 UCO에서 실축에 대해 대칭인 두점은 디스크  $D$ 에서도 실축에 대해 대칭이 되도록 한다. 이를 위해 다음과 같은 표준 양선형사상을 정의한다.

### 정의 2

UCO로부터 디스크  $D$ 로의 양선형사상이

$$h(z) = \frac{(a+b)z + (a-b)}{2z}, \quad h(z) = \frac{(a-b)z + (a+b)}{2}$$

$$h(z) = \frac{(a+1)z + (a-1)}{z+1}, \quad h(z) = \frac{(a-1)z + (a+1)}{z+1} \tag{2}$$

와 같은 형태 중의 하나일때 이것을 표준 양선형사상이라 한다. 여기서  $a$ 와  $b$ 는 실수이고 원형 디스크(circular disc)의 경계와 실축과의 교차점은  $(a, j0)$ 와  $(b, j0)$ 이다. 또한 실축과 직선형 디스크의 직선과의 교점은  $(a, j0)$ 이다.

정의 2의 디스크  $D$ 에 대한 일반화된 개념을 그림 1에서 보인다.

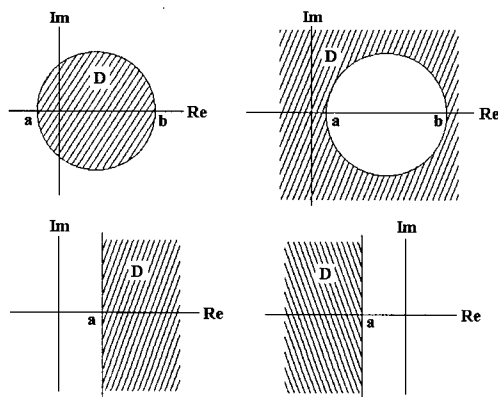


그림 1. 디스크  $D$ 의 일반화된 개념  
Fig. 1. The generalized notion of a disc  $D$ .

위의 표준 양선형사상에 의하면 어떤 두점의 실축에 대한 대칭성을 그대로 유지하며, 디스크  $D$ 에 대해 해석적인 이산함수는 UCO에 대해 해석적인 이산함수로 변환된다. 따라서  $h(z)$ 를 표준 양선형사상이라고 하고 실계수 유리(real rational) 이산 전달함수  $G(z)$ 의 극점이 디스크  $D$ 의 외부에 존재한다고 가정하면  $G(h(z))$ 는 점근적으로 안정(asymptotically stable)한 함수이다. 여기서는 이러한 표준 양선형사상인  $h(z)$ 만

을 다루기로 한다.

### III. 이산시스템에서 디스크 $D$ 에 대한 Hankel 특이치

이 장에서는 이산시스템에서 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치가 정의된다. UCO로부터 특정한 디스크로의 표준 양선형사상은 두가지가 있다. 이 특정한 디스크에 대한 Hankel 특이치는 표준 양선형사상의 선택과는 독립적임을 보인다.

#### 정의 3

전달함수 행렬  $G(z)$ 는 McMillan 차수가  $n$ 이고 디스크  $D$ 에서 제한적(bounded)이며 해석적인 함수라 가정하고,  $h(z)$ 는 표준 양선형사상, 즉  $h(\text{UCO}) = D$ 를 만족한다고 할 때, 디스크  $D$ 에 대한  $G(z)$ 의  $i$ 번째 Hankel 특이치는

$$\sigma_{D,i}(G(z)) := \sigma_i(G(h(z))) \quad (3)$$

로 정의된다. 여기서  $\sigma_i(F(z))$ 는  $F(z)$ 의 표준(UCO)에 대한 Hankel 특이치이다. 따라서  $\|G(z)\|_{HD} := \sigma_1(G(h(z)))$ 는 디스크  $D$ 에 대한  $G(z)$ 의 최대 Hankel 특이치로서 Hankel 노름이다.

#### 보조정리 1 [9]

전달함수 행렬  $G(z)$ 는 McMillan 차수가  $n$ 이고 디스크  $D$ 에서 해석적인 함수이고,  $h(z) = (az + \beta)/(z\gamma + \delta)$ 는  $w = |a\delta - \beta\gamma|^{1/2} > 0$ 을 만족한다고 가정한다. 이때  $(A, B, C, D)$ 가  $G(z)$ 의 최소화구현(minimal realization)이라 하면  $G(h(z))$ 의 최소화구현  $(A_h, B_h, C_h, D_h)$ 는

$$\begin{aligned} A_h &= (aI - \gamma A)^{-1}(\delta A - \beta I), \\ B_h &= w(aI - \gamma A)^{-1}B, \\ C_h &= wC(aI - \gamma A)^{-1}, \\ D_h &= D + wC(aI - \gamma A)^{-1}B \end{aligned} \quad (4)$$

로 표현된다.

보조정리 1은 앞에서 언급했던 특정한 디스크에 대한 Hankel 특이치가 표준 양선형사상의 선택과는 독립적임을 보이는 보조정리 2의 증명을 위해 필요하다.

#### 보조정리 2

UCO에서 특정한 디스크  $D$ 로의 두 양선형사상이

$h_1(z)$ 와  $h_2(z)$ 이고,  $G(z)$ 는 이 특정한 디스크  $D$ 에서 해석적인 전달함수 행렬일때

$$\sigma_i(G(h_1(z))) = \sigma_i(G(h_2(z))) \quad (5)$$

가 만족된다.

#### (증명)

특정한 디스크  $D$ 가 원의 내부 혹은 외부인 두가지 경우들이 있으나, 증명의 과정이 비슷하기 때문에 여기서는 외부인 경우만을 증명한다. 원의 외부인 경우, 두 개의 표준 양선형사상은

$$h_1(z) = \frac{(a-b)z + (a+b)}{2}, h_2(z) = \frac{(b-a)z + (b+a)}{2} \quad (6)$$

로 표현될 수 있다. 보조정리 1로부터  $G(h_1(z))$ 와  $G(h_2(z))$ 의 최소화구현을 얻을 수 있으며 다음과 같은 가제어성(controllability) grammian과 관련된 Lyapunov 방정식

$$(a-b)^{-2}\{2A-(a+b)I\}P_1\{2A-(a+b)I\}^T - P_1 + w^2(a-b)^{-2}BB^T = 0 \quad (7)$$

$$(b-a)^{-2}\{2A-(b+a)I\}P_2\{2A-(b+a)I\}^T - P_2 + w^2(b-a)^{-2}BB^T = 0 \quad (8)$$

을 얻는다. 여기서  $w = |2(a-b)|^{1/2} = |2(b-a)|^{1/2}$ 이고, 식 (7)과 (8)로부터  $P_1 = P_2$ 임을 쉽게 알 수 있다. 비슷한 방법으로  $G(h_1(z))$ 와  $G(h_2(z))$ 의 가관측성(observability) grammian을  $Q_1$ 과  $Q_2$ 로 두면,  $Q_1 = Q_2$ 의 결과를 얻을 수 있다. 따라서  $G(h_1(z))$ 와  $G(h_2(z))$ 의 Hankel 특이치는 동일하다.

위의 보조정리 2로부터 특정한 디스크  $D$ 로의 두가지 양선형사상들중 어떤 것을 선택하여도 Hankel 특이치는 동일함을 알 수 있다. 이러한 사실을 바탕으로 다음장에서는 Hankel 특이치의 단조성을 보인다.

### IV. 디스크 $D$ 에 대한 Hankel 특이치의 단조성

모델 차수축소 오차와 디스크  $D$ 의 크기사이의 상호절충(tradeoff)관계는 중요한 관건이다. 따라서 이 장에서는 디스크  $D$ 의 크기와 관련하여 Hankel 특이치의 단조성을 증명하여 더 작은 해석적영역을 가지는 이산시스템은 더작은 Hankel 특이치를 가짐을 보인다.

**정리 1**

$G(z) = (A, B, C, D)$ 가 UCO에서 해석적인 전달함수 행렬일때

$$\sigma_i(G(z)) \geq \sigma_i(G(h(z))) = \sigma_i(G(rz+r-1)) \quad (9)$$

이다. 여기서  $r$ 은 실수이고  $r \geq 1$ 이다.

**(증명)**

$G(z) = (A, B, C, D)$ 에 대한 Lyapunov 방정식

$$APA^T - P + BB^T = 0 \quad (10)$$

$$A^TQA - Q + C^TC = 0 \quad (11)$$

에서 표준 양선형사상이  $h(z) = rz+r-1$ 로 주어질때  $G(rz+r-1)$ 에 대한 Lyapunov 방정식

$$r^{-2}(A-rI+I)P_h(A-rI+I)^T - P_h + r^{-1}BB^T = 0 \quad (12)$$

$$r^{-2}(A-rI+I)^TQ_h(A-rI+I) - Q_h + r^{-1}C^TC = 0 \quad (13)$$

을 얻는다. 여기서  $P_h$ 와  $Q_h$ 는 각각  $G(rz+r-1)$ 의 가제어성 및 가관측성 grammian이다.  $P_h$ 와 관련된 식 (12)를 식 (10)에 대입하면

$$A(P-P_h)A^T - (P-P_h) + \Phi = 0, \quad (14)$$

$$\Phi = (r-1)AP_h + (r-1)P_hA^T - P_h - (1-2r)P_h + (1-r)BB^T \quad (15)$$

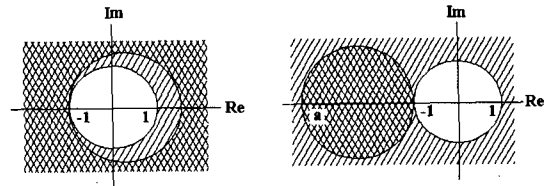
이고 만약  $\Phi \geq 0$ 이라 가정하면, 행렬  $A$ 의 모든 고유치가 단위원의 내부에 있기 때문에  $P-P_h \geq 0$ 을 만족하는  $P$ 와  $P_h$ 가 존재한다. 식 (12)로부터  $(1-r)BB^T$ 를 구하고 이것을 식 (15)에 대입하면

$$\begin{aligned} \Phi &= (r-1)AP_h + (r-1)P_hA^T - P_h - (1-2r)P_h - r^{-1}AP_hA^T + AP_hA^T \\ &\quad + (r-1)r^{-1}AP_h + (r-1)r^{-1}P_hA^T - (r-1)AP_h - (r-1)P_hA^T \\ &\quad - (1-2r)r^{-1}P_h + (1-2r)P_h \\ &= (1-r^{-1})AP_hA^T + (1-r^{-1})AP_h + (1-r^{-1})P_hA^T + (1-r^{-1})P_h \\ &= (A+I)\eta_1P_h(A+I)^T \geq 0, \quad \eta_1 = \frac{r-1}{r}, \quad P_h \geq 0, \quad r > 1 \quad (16) \end{aligned}$$

이다. 따라서  $\Phi \geq 0$ 의 가정이 유효함을 알 수 있다. 또한 만약  $r < 1$ 이면  $\Phi \leq 0$ 이기 때문에  $P_h - P \geq 0$ 을 만족하는  $P$ 와  $P_h$ 가 존재한다. 가관측성 grammian  $Q_h$ 와 관련된 식 (13)에 대해서도 비슷한 방법으로  $Q - Q_h \geq 0$ 을 만족하는  $Q$ 와  $Q_h$ 가 존재함을 보일 수 있다. 따라서  $\sigma_i(G(z)) \geq \sigma_i(G(rz+r-1))$ 이다.

정리 1에서  $h(z) = rz+r-1$ 에 의해 사상된 해석적 영역은 그림 2의 (a)에 나타나 있고, 여기서  $r$ 은 더 큰 원의 반경이고 이 큰 원은 당연히  $G(z)$ 의 모든

극점들을 포함하게 된다. 정리 1과 2는 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치의 단조성을 보이기 위해 필요한 정리들이다.



(a)  $h(z) = rz+r-1$       (b)  $h(z) = \frac{(a-1)z+a+1}{2z}$

그림 2.  $h(z) = rz+r-1$ 와  $h(z) = \frac{(a-1)z+a+1}{2z}$ 에 대한 해석적영역

Fig. 2. The analytic domains for  $h(z) = rz+r-1$  and  $h(z) = \frac{(a-1)z+a+1}{2z}$ .

**정리 2**

$G(z) = (A, B, C, D)$ 가 UCO에서 해석적인 전달함수 행렬일때

$$\sigma_i(G(z)) \geq \sigma_i(G(h(z))) = \sigma_i(G(\frac{(a-1)z+a+1}{2z})) \quad (17)$$

이다. 여기서  $a$ 은 실수이고  $a < -1$ 이다.

**(증명)**

정리 1의 증명과 비슷한 방법으로 증명한다. 보조정리 1로부터 표준 양선형사상이  $h(z) = \frac{(a-1)z+a+1}{2z}$ 일때  $G(h(z))$ 의 최소화구현  $(A_h, B_h, C_h)$ 는

$$\begin{aligned} A_h &= -p(2A+pI+2I)^{-1}, \\ B_h &= -\sqrt{2p}(2A+pI+2I)^{-1}B, \\ C_h &= -\sqrt{2p}C(2A+pI+2I)^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

이고 여기서  $p = -(a+1) > 0$ 이다. 이  $G(h(z))$ 에 대한 Lyapunov 방정식

$$A_hP_hA_h^T - P_h + B_hB_h^T = 0 \quad (19)$$

$$A_h^TQ_hA_h - Q_h + C_h^TC_h = 0 \quad (20)$$

을 얻는다. 여기서  $P_h$ 와  $Q_h$ 는 각각  $G(\frac{(a-1)z+a+1}{2z})$ 의 가제어성 및 가관측성 grammian이고, 식 (18)과 (19)로부터

$$A_hP_hA_h^T + \frac{p+2}{2}AP_h + \frac{p+2}{2}P_hA^T + (p+1)P_h - \frac{p}{2}BB^T = 0 \quad (21)$$

이 만족된다. 식 (10)에 대하여 식 (21)을 빼면

$$A(P - P_h)A^T - (P - P_h) + \Phi = 0, \quad (22)$$

$$\Phi = -\frac{p+2}{2}AP_h - \frac{p+2}{2}P_hA^T - (p+2)P_h + \frac{p+2}{2}BB^T \quad (23)$$

이다. 만약  $\Phi \geq 0$ 이라 가정하면  $P - P_h \geq 0$ 을 만족하는  $P$ 와  $P_h$ 가 존재한다. 식 (21)로부터  $BB^T$ 를 구하고 이것을 식 (23)에 대입하면

$$\Phi = (A+I)\eta_2 P_h (A+I)^T \geq 0, \quad \eta_2 = \frac{p+2}{p} \quad (24)$$

이고, 식 (11)과 (20)의 가관측성 grammian에 대해서도 비슷한 방법으로 보일 수 있다. 따라서  $\sigma_i(G(z)) \geq \sigma_i(G(\frac{(a-1)z+a+1}{2z}))$ 이다.

사상된 해석적영역은 그림 2의 (b)에 나타나 있고, 정리 1과 정리 2를 바탕으로 보조정리 3과 정리 3에서 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치의 단조성을 보인다.

**보조정리 3**

$D_s$ 와  $D_l$ 을 실축에 대해 대칭인 디스크들이라 두고  $G(z)$ 가  $D_s(\subseteq D_l)$ 와  $D_l$ 에서 해석적이라고 가정한다. 또한 그림 2와 같이  $D_s$ 와  $D_l$ 의 경계들이 실축에 공통점을 가질때 이 디스크들에 대한 Hankel 특이치는

$$\sigma_{D_s}(G(z)) \leq \sigma_{D_l}(G(z)) \quad (25)$$

를 만족한다. 여기서 첨자 's'와 'l'은 각각 더 작은 영역과 더 큰 영역을 의미한다.

**(증명)**

먼저  $D_l$ 에서 UCO로의 양선형사상  $h(z)$ 를 구성하면,  $D_s \subseteq D_l$ 이기 때문에  $D_s$ 는 UCO의 부분집합으로 사상된다. 만약 두 원의 공통점이 복소평면의  $-1$ 점에 사상되도록  $h(z)$ 를 선택하면  $D_s$ 의 경계는  $-1$ 점을 가지는 단위원의 외부에 한 원으로 사상된다. 즉  $h(\text{UCO}) = D_l$ 이고  $h(r\text{UCO} + r - 1) = D_s$ 이거나, 그렇지 않으면  $h(\text{UCO}) = D_l$ 이고  $h(\frac{(a-1)\text{UCO} + a + 1}{2\text{UCO}}) = D_s$ 인 두가지 경우들만이 발생되며 여기서  $r(>1)$ 과  $a(<-1)$ 은 실수이다. 여기서  $F(z) := G(h(z))$ 로 두면  $D_l$ 에 대한  $G(z)$ 의 Hankel 특이치는  $\sigma_{D_s}(G(z)) = \sigma_i(G(h(z))) = \sigma_i(F(z))$ 이고  $D_s$ 에 대한

$G(z)$ 의 Hankel 특이치는

$$\sigma_{D_s}(G(z)) = \sigma_i(G(h(rz+r-1))) = \sigma_i(F(rz+r-1)) \quad (26)$$

이거나 그렇지 않으면

$$\sigma_{D_s}(G(z)) = \sigma_i(G(h(\frac{(a-1)z+a+1}{2z}))) = \sigma_i(F(\frac{(a-1)z+a+1}{2z})) \quad (27)$$

로 표현된다. 직선의 오른쪽 혹은 왼쪽으로 표현되는 직선형 디스크에 대해서는  $D_s \subseteq D_l$ 를 만족하는 두 디스크가 복소평면의 무한대에서 공통점을 가진다. 원형 디스크에서와 마찬가지로 이 공통점이 복소평면의  $-1$ 점으로 사상되도록  $h(z)$ 를 선택하면 원형 디스크와 같은 결과를 얻을 수 있다. 따라서 정리 1과 2를 이용하면  $\sigma_{D_s}(G(z)) \leq \sigma_{D_l}(G(z))$ 이 만족됨을 알 수 있다.

정리 3은 보조정리 3에서  $D_s$ 와  $D_l$ 의 경계들이 실축에 공통점을 가진다는 가정을 제거했음에도 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치의 단조성이 성립됨을 보인다.

**정리 3**

$D_s(\subseteq D_l)$ 와  $D_l$ 을 각각 실축에 대해 대칭인 디스크라 두고,  $G(z)$ 가  $D_l$ 에서 해석적이라 가정하면

$$\sigma_{D_s}(G(z)) \leq \sigma_{D_l}(G(z)) \quad (28)$$

를 만족한다.

**(증명)**

$D_s \subseteq D_l$ 이기 때문에  $D_s \subseteq D_m \subseteq D_l$ 을 만족하고 실축에 대해 대칭인 디스크  $D_m$ 이 존재한다.

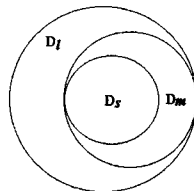


그림 3. 디스크  $D_m$ 의 선택  
Fig. 3. The choice of disc  $D_m$ .

그림 3에서와 같이 이  $D_m$ 의 경계는 두 디스크의 경계와 공통점을 갖도록 설정한다. 이때 보조정리 3으

로부터 Hankel 특이치는

$$\sigma_{D_n}(G(z)) \leq \sigma_{D_m}(G(z)) \leq \sigma_{D_l}(G(z)) \quad (29)$$

를 만족하고 Hankel 노음은  $\|G(z)\|_{HD_s} \leq \|G(z)\|_{HD_l}$ 의 관계를 가진다.

정리 3으로부터 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치는 디스크의 크기에 따라 단조성을 가짐을 알 수 있다. 5장에서는 이러한 성질을 이산 모델차수축소에 적용하고 오차한계치를 구한다.

### V. 디스크 $D$ 에 대한 이산 모델차수축소

이 장에서는 디스크  $D$ 에 대한 이산 균형모델 차수축소를 제한한다. 여기서 균형모델 차수축소는 균형시스템에 대한 직접절단(DT)<sup>[4]</sup>과 복소평면의  $\pm 1$ 점에서의 특이섭동 근사(GSPA)<sup>[1-3]</sup>를 다룬다. 주어진 차수축소기법에 대하여 디스크  $D$ 를 선택하고  $\infty$ -노음 오차한계치를 구한다.

#### 정리 4

디스크  $D$ 가 실축에 대해 대칭이고, 전달함수  $G(z)$ 가 디스크  $D$ 에 대해 제한적이고 해석적일때, 이 디스크  $D$ 에 대한 이산 균형모델 차수축소에 의해 구한 저차의 모델  $G_b(z)$ 도 디스크  $D$ 에 대해 해석적이다.

#### (증명)

UCO로부터 디스크  $D$ 로의 표준 양선형사상을  $h(z)$ 라 두고  $G_b(h(z))$ 를 기존의 균형모델 차수축소법으로 구한  $G(h(z))$ 의 축소모델이라 두면,  $G(z)$ 가 디스크  $D$ 에 대해 해석적이므로 표준 양선형사상의 정의에 따라  $G(h(z))$ 는 UCO에 대해 해석적이어야 한다. 기존의 균형모델 차수축소법에 의하면 UCO에 대해 해석적 성질이 유지되므로  $G_b(h(z))$ 도 UCO에 대해 해석적이고 이것은  $G_b(z)$ 가 디스크  $D$ 에 대해 해석적임을 의미한다.

정리 4로부터 원래의 모델이 디스크  $D$ 에서 해석적이면,  $D$ 에 대한 이산 균형모델 차수축소에 의해 구한 저차의 모델도 디스크  $D$ 에서 해석적임을 알 수 있다. 또한 이것은 디스크  $D$ 의 외부에서 극점을 유지하는 이산 균형모델 차수축소가 가능함을 의미한다. 정리 5

에서는  $\infty$ -노음 오차한계치를 구한다.

#### 정리 5

디스크  $D$ 가 실축에 대해 대칭이고, 전달함수  $G(z)$ 가 디스크  $D$ 에 대해 제한적이고 해석적일때, 디스크  $D$ 에 대한  $G(z)$ 의 Hankel 특이치는

$$\sigma_{D_1} > \sigma_{D_2} > \sigma_{D_3} > \dots > \sigma_{D_n} > 0 \quad (30)$$

이고  $\sigma_{D_i}$ 는  $r_i$ 의 중복성(multiplicity)을 가진다. 이때  $G(z)$ 와  $G_b(z)$  사이의 오차는

$$\sup_{z \in D} \bar{\sigma}(G(z) - G_b(z)) \leq 2(\sigma_{D_{r_1}} + \dots + \sigma_{D_n}) \quad (31)$$

이다. 여기서  $\bar{\sigma}$ 는 최대 특이치이고  $(r_1 + \dots + r_k)$ 는 축소모델의 차수이다.

#### (증명)

UCO로부터 디스크  $D$ 로의 표준 양선형사상을  $h(z)$ 라 둔다.  $\hat{z}$ 를 UCO에 속하는 복소변수로 두고  $z = h(\hat{z})$ 라 가정하면, 기존의 이산 균형모델 차수축소법<sup>[1-5]</sup>으로부터

$$\sup_{\hat{z} \in \text{UCO}} \bar{\sigma}(G(h(\hat{z})) - G_b(h(\hat{z}))) \leq 2(\sigma_{D_{r_1}} + \dots + \sigma_{D_n}) \quad (32)$$

이 만족되고, 또한  $\hat{z} \in \text{UCO}$ 와  $z \in D$ 가 서로 필요충분조건의 관계임을 알 수 있다. 따라서 식 (31)이 만족된다.

정리 3으로부터 만약  $D_s \subseteq D_l$ 이라면 각각의 영역  $D_l$ 과  $D_s$ 에 대한  $\infty$ -노음 오차한계치는

$$E_l = 2(\sigma_{D_{r_1}} + \dots + \sigma_{D_n}) \geq E_s = 2(\sigma_{D_{r_1}} + \dots + \sigma_{D_n}) \quad (33)$$

로 표현된다. 정리 5로부터 디스크의 크기가 작을수록  $\infty$ -노음 오차한계치도 작아짐을 알 수 있다.

여기서 이러한 디스크  $D$ 는 동작신호 및 극점등을 고려하여 제한된 주파수영역으로 선택하여야 한다. 따라서 동작신호의 주파수대역을 고려하여 적절한 디스크를 선택하고 이 디스크가 UCO보다 작을때는 기존의 값보다 작은  $\infty$ -노음 오차한계치를 얻게된다. 그러나 동작신호에 따른 보다 정확한 디스크  $D$ 의 선택에 대한 많은 연구가 필요하다. 또한 극점을 포함한 원을 설정하고 이 원의 외부를 디스크  $D$ 로 선택하면 축소

된 모델의 극점도 이 원의 내부에 유지된다. 극점이 유지되는 영역을 작게 설정하면 할수록  $\infty$ -노음 오차 한계치는 커진다.

불안정한 시스템에 대해서는 불안정한 시스템에서 복소평면의 좌반부에 있는 모든 극점을 포함하도록 원을 복소평면의 좌반부에서 설정하고 이 원의 외부를 디스크  $D$ 로 선택한다. 제시된 디스크  $D$ 에서의 균형 모델 축소기법을 적용하면 저차의 모델을 얻을 수 있다. 그러나 불안정한 극점의 수가 바뀌거나 위치가 바뀌는 문제가 발생하고 이에 관한 연구가 필요하다.

여기서는 모델 차수축소의 알고리즘을 정리하고 간단한 예제를 통하여 제시된 방법을 적용한다.

<알고리즘>

- 단계 1: 동작신호 및 극점등을 고려하여 디스크  $D$ 를 선택한다.
- 단계 2: 주어진 디스크에 대해 표준 양선형사상  $h(z)$ 를 찾는다.
- 단계 3: 보조정리 1을 이용하여  $F(z) = G(h(z))$ 를 구한다.
- 단계 4:  $F(z)$ 에 대해 기존의 균형모델 차수축소기법을 적용하여 저차의 모델  $F_r(z)$ 를 구한다.
- 단계 5:  $h(z)$ 의 역 양선형사상  $h^{-1}(z)$ 를 구하고 디스크  $D$ 에 대한 저차의 모델  $G_r(z) := F_r(h^{-1}(z))$ 를 구한다.

<예제>

7차의 이산 전달함수  $G(z)$ 가

$$G(z) = \frac{0.1551z^7 + 0.3705z^6 + 0.3830z^5 + 0.1886z^4 - 0.0812z^3 - 0.2756z^2 - 0.2631z - 0.0995}{z^7 + 3.0954z^6 + 4.8744z^5 + 4.8110z^4 + 3.0636z^3 + 1.3314z^2 + 0.2325z + 0.0081}$$

이고 DT와  $z = \pm 1$ 에서 GSPA를 이용하여 4차의 모델을 얻고자 한다. 디스크  $D$ 는 실축과의 교차점이  $(-5, j0)$ 와  $(1, j0)$ 가 되는 원의 외부로 선택하였다고 가정한다. 따라서 UCO보다 작은 디스크가 선택되었고, 이 디스크의 경계가 되는 원의 내부는 기존의 극점들을 모두 포함하게 된다. 여기서는 UCO에 대한 기존의 DT 및 GSPA를 디스크  $D$ 에 대해 일반화된 DT 및 GSPA와 비교한다. 그림 4와 5는 표본화주기를  $T = 10[ms]$ 로 두었을때, 기존의 UCO에 해석적영역을 가지는 축소모델들에 대한 주파수응답과 일반화된 디스크  $D$ 에 해석적영역을 가지는 축소모델들에 대한 주파수응답이다.

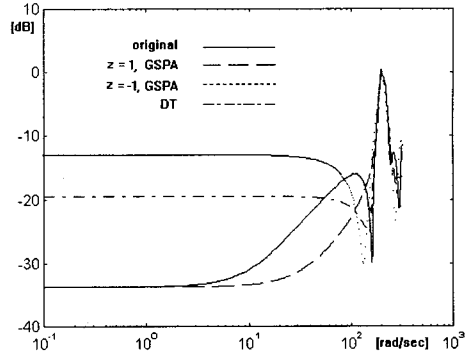


그림 4. UCO에 대해 해석적인 저차의 모델  
Fig. 4. Reduced order models analytic in UCO.

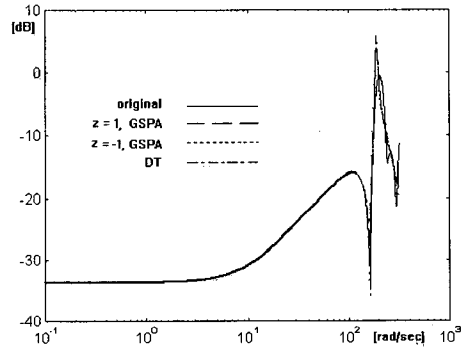


그림 5. 디스크  $D$ 에 대해 해석적인 저차의 모델  
Fig. 5. Reduced order models analytic in the disc  $D$ .

선택된 디스크  $D$ 를 UCO와 비교하면 상대적으로 저주파영역 ( $z = 1$  부근의 복소영역)에서는 해석적영역의 손실이 작고 고주파영역에서는 해석적영역의 손실이 크다. 따라서 그림 5에서 보듯이 저주파영역에서는 작은 오차를 가지고 고주파영역에서는 큰 오차를 가진다.

UCO에 대한 Hankel 특이치는  $(0.543126, 0.491837, 0.140245, 0.120304, 0.096332, 0.068325, 0.064708)$ 이고 UCO에 대한  $\infty$ -노음 오차한계치는 0.458733이다. 반면 디스크  $D$ 에 대한 Hankel 특이치는  $(0.075382, 0.007811, 0.004818, 0.001287, 0.000015, 0.0000004, 0.0000002)$ 이고 디스크  $D$ 에 대한  $\infty$ -노음 오차한계치는 0.00003169이다.

VI. 결 론

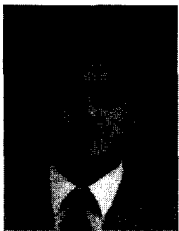
표준 양선형사상에 의해 정의된 디스크  $D$ 에 대해

여 Hankel 특이치를 정의하고 디스크  $D$ 의 크기와 Hankel 특이치 사이에 단조성을 보였다. 직접절단 및 특이섭동 근사와 같은 기존의 균형모델 축소기법들을 동작신호와 극점등을 고려하여 선택된 디스크  $D$ 에 대하여 일반화하였다. 또한 더 작은 해석적영역을 가지는 모델의 축소는 더 작은  $\infty$ -노름 오차한계치가 보장됨을 보였다. 앞으로는 동작신호 및 극점을 고려하여 가장 최적인 디스크  $D$ 의 선택에 관한 연구가 필요하다.

### 참 고 문 헌

- [1] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbational approximation for discrete-time balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 2, pp. 240-242, 1983.
- [2] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Contr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, 1989.
- [3] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "Model reduction via balanced realizations: An extension and frequency weighting techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 7, pp. 687-692, July 1988.
- [4] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, April 1982.
- [5] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "An error bound for a discrete reduced order model of a linear multivariable system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 9, pp. 815-819, 1987.
- [6] K. Zhou, Y. Zheng, and T. Lu, "Stability and error bounds for discrete time frequency weighted balanced truncation," in Proc. 32nd Conf. Decis. Contr., San Antonio, TX, pp. 2927-2928, Dec. 1993.
- [7] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard, "An improved error estimate for reduced-order models of discrete-time systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 3, pp. 317-320, March 1990.
- [8] D. Enns, "Model reduction for control system design," Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics, Stanford, CA, 1984.
- [9] E. Jonckheere and R. Li, "Generalization of optimal Hankel-norm and balanced model reduction by bilinear mapping," *Int. J. Contr.*, vol. 45, no. 5, pp. 1751-1769, 1987.
- [10] J. S. Yang, "output frequency weighted balanced realization like controller order reduction," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 10, no. 2, pp. 269-280, 1994.

### 저 자 소 개



吳道昌(正會員)

1967년 1월 16일생. 1991년 2월, 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993년 2월 동 대학교 대학원 전자공학과 석사 취득. 1997년 2월, 동 대학교 대학원 박사 취득. 1997년 3월 ~ 8월 창원대학교 공과대학 국책 교수. 1997년 8월 ~ 현재, 건양대학교 정보전자공학부 전임강사. 주관심분야는 robust 제어,  $H^\infty$  제어, 모델 및 제어기 차수축소, 대규모시스템제어 등임

李甲來(正會員) 第34卷 S편 第11號 參照

현재 두원공업전문대학 컴퓨터응용제어과 전임강사

丁銀泰(正會員) 第33卷 B편 第5號 參照

현재 창원대학교 제어계측공학과 전임강사

朴烘培(正會員) 第33卷 B편 第5號 參照

현재 경북대학교 전자공학과 교수