

자기성 유체 계면의 선형안정성에 관한 연구

박 창 호** · 주 상 우* · 이 상 천*

(1997년 3월 26일 접수)

A Linear Analysis of Interfacial Instabilities of Ferrofluids

Chang H. Park, Sang W. Joo and Sang C. Lee

Key Words : Ferrofluid(자기성 유체), Magnetic(자기성), Instability(불안정성), Stability Analysis (안정성 해석), Interface(계면)

Abstract

Surface motion of a magnetic fluid is studied by a linear stability analysis. When a thin horizontal magnetic-fluid layer is placed on a nonmagnetic substrate, with a vertical magnetic field applied, the surface of the ferrofluid layer can be severely corrugated, due to the normal-field instability. Based on conservation laws, it is shown that the normal-field instability of thin ferrofluid layers is a long-wave instability and that it is analogous to the interfacial mode of the thermocapillary instability in a thin horizontal layer heated from below.

1. 서 론

자기성 유체는 자기장에 반응하는 유체를 말한다. 지금까지 알려진 모든 물질들은 용융점보다 낮은 온도에서 강자성(ferromagnetism)을 잃기 때문에 현재 알려진 모든 자기성 유체는 인위적으로 제조된 것이다. 일반적으로 사용되는 자기성 유체는 한 계에서 자성질점들간의 거리가 매우 짧은(거의 수백 Å) 콜로이드 자성 유체이다. 콜로이드 자기성 유체는 일반적으로 자성을 가진 질점들이 유체에 떠 있게 되는데, 이러한 유체에 지속적인 자성을 띠게 하기 위해서는 유체의 질점들의 크기와 운반유체의 적당한 선택이 요구된다.

최근 새로운 제조기술의 발달로 윤활, 완전 누수 막음장치(Zero-leakage sealing), 공기-수분 흡수기, 분리장치, 고도의 정밀 분사장치, 전기기계 시스템 등 많은 곳에서 자기성 유체를 사용하고 있고

현재 많은 공학에 응용되고 있다. 특히 자기성 유체는 일반 유체와는 달리 유체 내에 자기장을 형성할 수 있으므로 축 막음장치에 아주 유용하게 사용되고 있으며, 자기성 유체를 이용하면 중력의 방향과 크기를 임의적으로 조절할 수 있어 무중력 실험에도 유용하게 사용되고 있다.

앞에서 언급한 사용예의 자기성 유체들은 변형률을 무시할 수 있는 용기에 담겨 있는 경우보다는 공기 또는 다른 유체와 자유계면을 이루고 있는 경우가 훨씬 많다. 이러한 자유계면은 유동장과 자기장에 따라 변형될 수 있다. 그리고 자기성 유체에서 자기장의 강도가 임계강도를 넘어서면 Rayleigh-Bnard의 열적대류에 의한 불안정성과와 같은 육각형의 세포들이 나타난다. 하지만 자기성 유체는 열적대류에서와는 달리 유체 내부에서 실질적인 유동은 일어나지 않는다. 이 자기성 유체는 자기장의 방향으로 진행하며 중력 및 표면 장력에 의한 에너지뿐만 아니라 비자기화 에너지가 최소가 되는 상태에서 평형을 이룬다.

Cowley & Rosensweig⁽³⁾는 실험을 통해서 자기

* 회원, 영남 대학교 기계공학부

** 영남대학교 대학원 기계공학부

성 유체의 표면물결의 진폭은 자기장의 강도가 증가할수록 커지며, 이 진폭의 최고점을 막연히 'markedly setaceous'라 불리는 형태로 나타난다는 것을 보였다. 그리고 Barkov & Barkovsky⁽¹⁾는 위상 기하학적 불안정성(topological instability)을 이용하여 얇은 계면에서 수직면의 불안정성으로 인하여 표면파의 성장은 계면의 파단(rupture)을 일으키며, 그 결과 자성 유체 방울들이 발생하여 방울들 사이에 찢지 않는 부분이 나타나며, 강도가 낮은 자기장에 대해서는 방울들의 크기가 일정하지만, 강도를 높일수록 방울의 반지름은 점점 더 작아지며 자기장의 임계강도를 넘어가면 방울들이 더 작은 방울들로의 분산이 발생하는 현상과 부차적인 불안정성(secondary instability)이 나타난다는 것을 보여 주었다. 그리고 Boudouvis & Scriven⁽²⁾ 등은 수직으로 자기장이 작용하는 자기성 유체의 계면이 평평한 상태에서 변형을 일으켜 여러 가지의 분기점들을 가지는 임계 자기장의 강도를 밝혀냈다.

실제 사용되는 자기성 유체 계면은 온도의 구배에 의한 영향도 받는다. 예를 들어 보통유체의 자연대류보다 자기성 유체의 열·자기적 대류에 의한 열전달이 훨씬 높아 열전달 유체로 사용되기도 한다. 자기성 유체의 온도구배는 부력이나 thermocapillarity와 같은 부차적인 불안정성을 발생시키며, 이 유체의 자기화의 분포도 온도변화에 따라 변하므로 새로운 불안정성들의 메카니즘을 제공한다.

유체 계면의 불안정성의 메카니즘은 공학적으로 큰 의미를 가진다. 즉 계면의 불안정성을 이해함으로써 유체 계면의 거동을 우리는 이해할 수 있다. 이러한 계면의 불안정성을 아끼시키는 요인은 크게 두 가지의 형태가 존재한다.

첫 번째는 중력에 의한 밀도차이로 인해 부력이 발생해서 계면이 불안정해지는 경우로서 이를 Rayleigh-Bnard 불안정성이라 한다.

두 번째의 경우는 유체와 공기가 만나는 계면에서의 표면장력의 구배에 의해서 발생하는 불안정성으로 이러한 경우를 Thermocapillary 불안정성이라 한다. 이 두 번째의 경우는 계면의 불안정성이 중력과는 무관한 것이다. 그리고 이 두 번째의 경우 다시 두 가지의 형태(mode)로 나뉘어진다. 그 첫 번째가 열대류가 분명한 경우에 발생하는 Pearson형태의 불안정성이고, 두 번째는 아주 얇

은 두께의 유체의 경우 표면장력에 의해서 짧은 파수는 없어지기 때문에 열대류의 영향이 작아지게 되는 long-wave형태의 계면의 변형에 의해서 발생하는 불안정성이다. 지금까지 많은 연구자들이 이러한 일반 유체(Newtonian 유체)에 대해서 많은 연구들을 수행하였다. 따라서 불안정성의 형태(mode)를 알면 앞에서 언급한 많은 연구수행에서 정보를 얻기가 수월해지고, 또한 불안정성의 메카니즘을 이미 알려진 유사한 불안정성의 결과로부터 잘 이해할 수 있다. 즉 어떠한 조건에서 계면이 불안정해지는가를 알아냄으로써 계면의 거동을 조절할 수 있는 조건을 찾아낼 수 있을 것이다. 따라서 자기성 유체 계면의 거동에 영향을 주는 이와 같이 서로 연관된 불안정성의 요인들에 대한 연구와 계면의 불안정성이 어떤 형태를 나타내는지 아는 것은 매우 중요하며 학문적으로도 매우 흥미로운 일이다. 그리고 이러한 불안정성이 어떠한 형태인지를 알기 위해서는 계면의 선형해석을 수행하여야 한다.

본 논문에서는 수직으로 일정한 크기의 자기장이 작용하는 수평으로 놓여 있는 정지한 자기성 유체에 대하여 선형 안정성 해석을 수행하고, 온도구배가 있는 일반유체의 thermocapillary에 의해 발생하는 안정성 해석을 서로 비교하여 보고한다.

본 논문에서 소개될 내용은 다음과 같다. 2장에서는 먼저 자기장 강도의 지배 방정식인 Ampere 법칙과 Maxwell 방정식과 자기성 유체의 연속방정식과 운동량 보존방정식들과 이 식들에 주어진 경계조건들을 유도한다. 3장에서는 자기성 유체의 기본 상태 방정식을 구하고 이 기본상태에 단순한 조화 함수 형태의 외란이 가해진 식을 선형화 시키고 선형 해석을 통한 중립 안정성 선도에 필요한 식과 중립 안정성 선도를 구한 다음 Joo⁽³⁾가 보고한 온도 구배가 있는 일반 유체의 선형 안정성 해석을 서로 비교한다. 그리고 마지막으로 4장에서는 결론에 대해서 토론한다.

2. 방정식의 유도

Fig. 1에 도시화 된 것과 같이 비자성 강체 수평 평판 위에 평균 두께가 d 인 자기성 유체가 놓여 있고, 그 위가 비자기성 기체인 공기로 이루어진 시스템에 대하여 생각한다. 또 세기가 H_0 인 균일한 자기장이 자기성 유체의 수직방향으로 분포되어

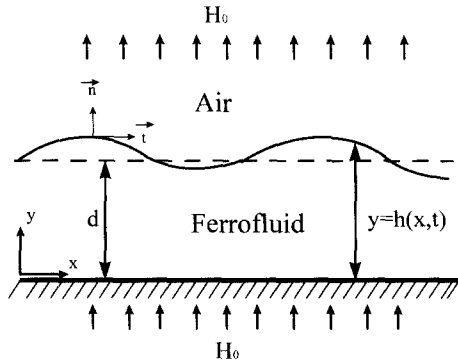


Fig. 1 Ferrofluids configuration.

있다. 자기성 유체 계면은 시간과 위치에 따라 변화 할 수 있고, 좌표축을 밀면 평판에 고정시킬 때 계면의 위치를 $y=h(x, t)$ 로 나타낸다. 비자기성 매개체인 평판과 공기에서의 도자율(magnetic permeability)은 $\mu=\mu_0=4\pi\times 10^{-7}H/m$ 으로 일정하고, 자화력 \vec{M} 은 0이 된다. 그리고 자기성 유체에서의 도자성(μ)은 비자기성 매개체에서의 도자성(μ_0)보다 크다. 그리고 자기성 유체는 비압축성 유체로서 점도(η)와 밀도(ρ)는 일정하다고 가정한다.

이 계(system)에서 유체의 점성차원을 기초로 하여 길이, 시간, 속도, 압력을 각각 $d, \frac{d^2}{\nu}, \frac{\nu}{d}, \frac{\rho\nu^2}{d^2}$ 로 무차원화 하면 자화력은

$$\vec{M} = x\vec{H}$$

이고, 평행한 자기장 사이의 유도 자기력은

$$\vec{E} = \mu\vec{H} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

이다. 여기서 $x=(\mu/\mu_0)-1$ 은 자화율(susceptibility)을 μ 는 도자율을 나타낸다. 이 시스템에서 자기성 유체의 자기장에 의한 지배 방정식은 Ampere 법칙과 Maxwell 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\Delta \times \vec{H} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta \cdot \vec{E} = 0 \tag{2}$$

여기서 도자성(μ)이 상수인 경우 자기장은 포텐셜 ϕ 를 도입하여 자기장을 $\vec{H}=\Delta\phi$ 로 표시할 수 있기 때문에 식(1)과 (2)에서 자기장의 지배방정식은 공기, 자기성 유체 그리고 평판 모두에서 다음과 같은 Laplace 방정식이 된다 :

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{3}$$

$$\nabla^2 \phi^A = 0 \tag{4}$$

$$\nabla^2 \phi^B = 0 \tag{5}$$

여기서 위첨자가 없는 것은 자기성 유체를 나타내고, 위첨자 A와B는 각각 공기와 평판을 나타낸다. 자기성 유체의 유동은 연속 방정식

$$\Delta \cdot \vec{u} = 0 \tag{6}$$

과 운동량 보존 방정식은

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\Delta p + \Delta^2 \vec{u} + \frac{H_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \Delta \cdot (\Delta\phi)^2 \tag{7}$$

로 표시되는데, 여기서 매개변수

$$H_0^2 = \frac{\mu d^2 \bar{H}_0^2}{\rho \nu^2}$$

는 자기장의 강도를 나타낸다.

매개변수

$$a = \frac{\mu}{\mu_0}$$

는 자기성 유체에서 도자성의 척도이다.

그리고 경계조건으로는 계면 $y=h(x, t)$ 에서 유도 자기장의 수직성분과 자기장의 접선성분은 연속이어야 하므로 다음과 같다 :

$$[[\vec{n} \cdot \vec{B}]] = 0 \tag{8}$$

$$[[\vec{n} \times \vec{H}]] = 0 \tag{9}$$

여기서 \vec{n} 은 계면에서 외향 단위법선 벡터이고, 이중괄호는 계면에서의 각각의 양의 차이를 나타낸다. 계면 $y=0$ 에서 자기성 유체는 밀면 평판에 고정되어 있기 때문에 경계조건 (8)식과 (9)식은 $\vec{j} \cdot \vec{B} = \mu_0 H_0$ 와 $\vec{j} \times \vec{H} = 0$ 으로 되고, 바닥에서 자기장은 자기성 유체와 분리(independent)되어 있다.

자기성 유체의 압축성과 중력을 무시하고 유체의 질점들 상호간에는 작용이 없다고 가정하면 응력장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{\sigma} = -\left(p + \frac{\mu_0}{2} H^2\right) \vec{\delta} + \eta[\Delta \vec{u} + (\Delta \vec{u})^T] + \mu \vec{H} \vec{H} \tag{10}$$

따라서 계면 $y=h(x, t)$ 에서 경계조건 중 수직 응력 도약조건(normal stress jump condition)은

$$p + \frac{H_0^2}{2a} (\Delta\phi^2 - (\Delta\phi^A)^2) + \frac{2}{1+H_x^2} [u_x (H_x^2 - 1) - (u_y$$

$$+v_x)H_x] + \frac{H_0^2}{1+H_x^2}[(\phi_x^A h_x - \phi_y^A)^2 - (\phi_x h_x - \phi_y)^2]$$

$$= \frac{3S}{(1+h_x^2)^{3/2}} h_{xx} \quad (11)$$

로 나타난다. 여기서 매개변수

$$S = \frac{\gamma d}{3\rho v^2}$$

는 표면장력(surface tension) γ 의 척도가 된다. 계면에서 자기성 유체와 공기간의 전단응력 도약조건(shear stress jump condition)은 다음과 같다:

$$(u_x + u_y)(1 - h_x^2) - 4\mu_x h_x + H_0^2 A_1 = H_0^2 A_2 \quad (12)$$

여기서 $A_1 = \phi_x \phi_y (1 - h_x^2) - h_x (\phi_x^2 - \phi_y^2)$, $A_2 = \phi_x^A \phi_y^A (1 - h_x^2) - h_x ((\phi_x^A)^2 - (\phi_y^A)^2)$ 를 나타낸다.

계면의 위치를 결정짓는 운동조건(kinematic condition)은

$$h_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy = 0 \quad (13)$$

로 표현되며, 이 조건은 임의의 시간에 계면 위에 있던 유체 입자는 항상 그 계면 위에 남는다는 것을 의미한다.

바닥($y=0$)에 대한 점착조건은

$$\vec{u} = 0 \quad (14)$$

이다.

3. 선형안정성 해석

먼저 기본 상태의 해를 구하기 위해서 움직임이 없는 평평한 상태의 계면을 가지는 자기성 유체에 대하여 생각하면 자기성 유체의 속도 성분 (u , v)는 $(0, 0)$ 이 되고 자기성 유체의 계면의 위치 h 는 1이므로 비자기성 매개체인 평판과 공기에서의 자기장의 크기는

$$\vec{H} = H_0 \hat{j} \quad (15)$$

이고, 자기성 유체 내에서 자기장의 크기와 압력은

$$\vec{H} = \frac{H_0}{a} \hat{j}, \quad P = \frac{H_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (16)$$

로 나타난다.

위에서 구한 기본 상태 방정식에서 보듯이 매개변수 a 는 항상 1보다 크므로 압력 P 는 항상 0보다 큰 값을 가지게 된다.

여기서 자기성 유체 계면의 선형 안정성의 해를 구하기 위해서 앞에서 구한 기본 상태에 무한소의 크기를 가진 단순한 조화 함수 형태의 외란을 가하는 것을 다음과 같은 식들로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} + \delta e^{ikn + \sigma t} \varphi(y) \\ u &= 0 + \delta e^{ikn + \sigma t} U(y) \\ v &= 0 + \delta e^{ikn + \sigma t} V(y) \\ &\vdots \\ h &= 1 + \delta e^{ikn + \sigma t} \eta_0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 k 는 외란 파수(disturbance wavenumber)를, σ 는 복소수 형태의 성장률(complex growth rate)을, 그리고 σ 는 1보다 아주 작은 크기를 나타낸다.

위의 단순한 조화 함수들을 지배방정식 (3)~(7)식과 경계조건들 (8)~(14)식에 대입한 다음 δ 에 대하여 선형화 시키면 자기성 유체의 강도를 나타내는 (3)식은 다음과 같이 된다:

$$(D^2 - k^2) \varphi = 0 \quad (18)$$

여기서 D^2 는 y 에 대하여 2차 미분을 나타낸다. 그리고 계면인 평판에서 자기장의 강도를 나타내는 (4)식과 공기에서의 자기장의 강도를 나타내는 (5)식은 다음과 같다:

$$(D^2 - k^2) \varphi^A = 0 \quad (19)$$

$$(D^2 - k^2) \varphi^B = 0 \quad (20)$$

자기성 유체의 운동량 보존 방정식인 (7)식은

$$[D^2 - (\sigma + k^2)](D^2 - k^2) V = 0 \quad (21)$$

이고, 계면에서의 자기장의 경계조건인 (8)식과 (9)식은

$$a\varphi' - (\varphi^A)' = 0 \quad (22)$$

이고, 자기성 유체의 경계조건인 수직응력 도약조건(normal stress condition)인 (11)식은

$$\varphi - \varphi^A - (1-a)H_0\eta_0 = 0 \quad (23)$$

이 된다. 그리고 자기성 유체의 계면에서 경계조건으로 전단응력 도약조건(shear stress condition)인 (12)식은

$$V'' + k^2 V - \left(1 - \frac{1}{a}\right) k^2 H_0^2 \eta_0 = 0 \quad (24)$$

이 되고, 계면의 운동조건인 (13)식은

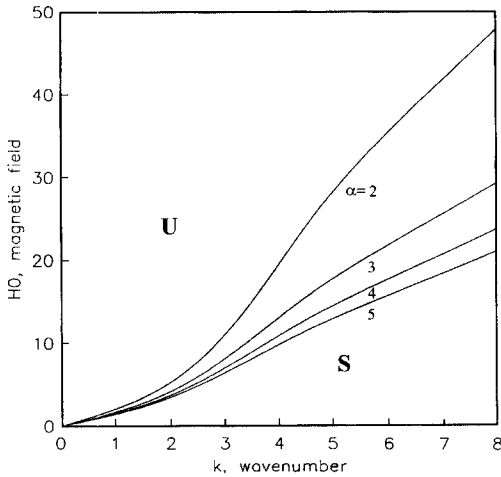


Fig. 2 Wavenumber vs. Magnetic field.

$$V = -\sigma\eta_0 \quad (25)$$

이 된다. 마지막으로 점착조건인 (14)식과 연속방정식에서

$$V(0) = V'(0) = 0 \quad (26)$$

이 된다.

여기서 복소수 형태의 성장률 σ 의 실수부 σ_r 이 양수이면 우리가 가한 외란의 크기가 시간에 따라 지수 함수적으로 무한히 증가함을 나타낸다. 그러므로 중립 안정성 선도는 σ_r 가 0이 되는 경우가 된다.

따라서 앞의 식에서 $\sigma_r = 0$ 으로 놓고, 지배 방정식(19)~(21)식과 경계조건(22)~(26)식들을 이용하여 자기장의 속도 $V(y)$ 와 자기장의 강도 $\phi(y)$ 를 구한 후 중립안정성 선도를 그리면 아래 Fig. 2와 같은 형태가 된다.

위의 Fig. 2에서 보는 것과 같이 x축은 외란 파수(wavenumber)를 y축은 자기장의 크기(magnetic field)를 나타낸다. 중립 안정성 선도에서 자기성 유체의 외란 파수가 0에서부터 안정한 영역과 불안정한 영역이 구분됨을 볼 수 있는데, 이와 같이 중립 안정성 선도에서 외란 파수가 0에서부터 시작되는 이러한 불안정성을 long-wave instability 혹은 $k=0$ instability라 한다. 그리고 중립 안정성 선도에서 자기성 유체와 자기장의 도자성의 차이 α 가 크면, 즉 자기성 유체의 도자성 μ 가 커지면 안정한 영역이 점차적으로 줄어든다는 것을 보여

주고 있다.

다음은 자기성 유체의 선형해석과 온도구배가 있는 일반 유체의 선형 해석을 서로 비교해 보기로 한다. 먼저 유체의 운동량 보존 방정식인 (21)식과 (A. 1)식에서와 같이 자기성 유체와 일반 유체에서 완전히 같은 식으로 나타난다. 그리고 (3.4)식의 자기장의 지배방정식은 자기장의 함수형태의 미분 방정식으로, (A. 2)식의 온도구배가 있는 일반 유체의 thermocapillary에 의한 에너지 방정식은 온도의 함수형태의 미분 방정식으로 나타나지만, 이 두 식도 서로 유사함을 볼 수 있다. 그리고 전단응력 도약 조건인 (24)식과 (A. 3)식도 매우 비슷한 것을 볼 수 있으며, 마지막으로 계면의 운동조건을 나타내는 (25)식과 (A. 4)식은 완전히 같은 형태를 나타냄을 볼 수 있다. 따라서 자기성 유체와 thermocapillary에 의한 유체의 계면의 움직임은 매우 유사하다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 수직으로 균일한 자기장이 작용하는 수평으로 놓여 있는 자기성 유체의 선형 안정성에 대한 연구를 수행하였다. 우리는 이 논문에서 자기성 유체를 선형해석을 통하여 중립안정성 선도를 구하였으며, 자기성 유체 계면의 안정성이 자기장의 크기와 외란파수에 의해 어떻게 변화하는지를 보여 주었다.

그리고 본 논문에서 자기성 유체의 선형해석을 통하여 얇은 계면을 가지는 자기성 유체의 계면은 long-wave의 형태의 계면(interface)의 변형에 의한 불안정성을 나타낸다는 것을 볼 수 있다. 이것은 thermocapillary에 의한 불안정성과 아주 유사한 형태를 나타낸다는 것을 알 수 있다. 즉 자기성 유체의 계면의 불안정성을 야기시키는 요인은 중력에는 무관한 표면장력의 구배에 의해 발생한다는 것을 알 수 있다. 따라서 자기성 유체의 불안정성은 자기성 유체에 온도의 구배를 줌으로써 조절할 수 있을 것이다.

앞으로 우리는 자기성유체의 온도 구배를 주어 불안정성을 조절할 수 있는 조건에 대하여 계속적으로 연구 할 것이다.

후기

본 연구는 영남대학교 자유공보 연구비의 지원에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Barkov YuD, Berkovsky, Magn. Gidrodin (USSR), 1980, "Instabilites of Magnetic Fluid Leading to Rupture." Vol. 3, pp. 11~14
- (2) Boudouvis AG, Rosenweig RE, 1993, "Sensitivity Analysis of Hysteresis in Deformation of Ferro Fluid Drops." *J. Magn. Mater.*, Vol. 122, pp. 254~258
- (3) Cowley MD, Rosensweig RE, 1967, "The Interfacial Stability of a Ferro Magnetic Fluid." *J. Fluid Mech.*, Vol. 30, pp. 671~688
- (4) S. W. Joo, 1995, "Marangoni Instabilites in Liquid Mixtures With Soret Effects." *J. Fluid Mech.*, Vol. 293, pp. 127~145.

부록

Joo⁽⁵⁾가 보고한 온도 구배가 있는 유체의 thermocapillary에 의한 선형해석을 수행한 식들은 다음과 같이 나타난다.

먼저 운동량 보존 방정식은 다음과 같다:

$$\left[D^2 - \left(\frac{\sigma}{Pr} + k^2 \right) \right] (D^2 - k^2) v = 0 \quad (\text{A.1})$$

여기서 매개변수

$$Pr = \frac{\gamma}{k}$$

는 Prandtl 수를 나타내며 이것은 유체의 물성을 나타낸다. 그리고 유체의 에너지 보존 방정식은 다음과 같다:

$$[D^2 - (\sigma - k^2)] \theta = \frac{Bi}{1 + Bi} v \quad (\text{A.2})$$

여기서 θ 는 온도를 나타내고 매개변수인 Biot 수는 다음과 같다.

$$Bi = \frac{hd}{K}$$

여기서 h 는 대류 열전달율, K 는 전도 열전달율 나타내며, Biot 수는 시스템의 열전달의 정도를 측정하는 척도이다. 만약 Bi 가 0이라면 이것은 유체가 단열 되어 있음을 말한다.

그리고 계면에서의 경계조건 중 전단응력 도약조건은

$$V'' + k^2 V - k^2 M \theta - \frac{Bi}{1 + Bi} M k^2 \eta_0 = 0 \quad (\text{A.3})$$

이 되고, 매개변수

$$M = \frac{da\Delta T}{\mu S}$$

는 Marangoni 수이다. 여기서 α 는 온도차이를 선형화하기 위한 무차원 계수를 나타내며, $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ 이다. 그리고 이 Marangoni 수는 thermocapillary의 척도가 된다.

마지막으로 계면의 운동조건은

$$v = \sigma \eta_0 \quad (\text{A.4})$$

와 같이 된다.