

# 간헐디젤분무의 액적크기 및 속도의 공동확률밀도함수

김중현\* · 오두석\*\* · 구자예\*\*\*

(1997년 9월 13일 접수)

## Joint Probability Density Function of Droplet Sizes and Velocities in a Transient Diesel Spray

Jong Hyun Kim, Doo Seok Oh and Ja Ye Koo

**Key Words :** Diesel Fuel Spray(디젤연료분무), Droplet Size(액적크기), Droplet Velocity(액적 속도), Joint Probability Density Distribution and Function(공동확률밀도분포 및 함수), Log-Hyperbolic Function(로그쌍곡선 함수)

### Abstract

Comparisons of joint probability density distribution obtained from the raw data of measured droplet sizes and velocities in a transient diesel fuel spray with computed joint probability density function were made. Simultaneous droplet sizes and velocities were obtained using PDPA. Mathematical probability density functions which can fit the experimental distributions were extracted using the principle of maximum likelihood. Through the statistical process of functions, mean droplet diameters, non-dimensional mass, momentum and kinetic energy were estimated and compared with the experimental ones. A joint log-hyperbolic density function presents quite well the experimental joint density distribution which were extracted from experimental data.

### 기 호 설 명

$r$ : 반경방향거리	$V$ : 기준속도
$x$ : 액적크기	$P_{ij}$ : (i, j) 구간에서 공동 확률
$y$ : 액적속도	$r_{ij}$ : (i, j) 구간에서 실험확률
$z$ : 축방향거리	$f_{ij}$ : (i, j) 구간에서 공동확률밀도 분포
$\bar{m}$ : 평균질량	$f(x, y)$ : 공동확률밀도 함수
$\bar{v}$ : 평균속도	$L(\theta)$ : 가능성함수
$\overline{M_v}$ : 평균운동량	PDD : Probability Density Distribution(확률밀도분포)의 약자: 실험에서 구한다
$\overline{K.E.}$ : 평균운동에너지	PDF : Probability Density Function(확률밀도함수)의 약자: 실험데이터를 나타낼 수 있는 확률밀도 함수
$D_{10}, D_{20}, D_{30}, D_{32}$ : 산술평균직경, 면적평균직경, 체적평균직경, Sauter평균직경	$\alpha, \beta, \delta, \Delta, \mu, \lambda$ : 공동분포의 매개변수
$K_\lambda$ : Bessel 함수	$\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu_1, \mu_2, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, \rho$ : 크기와 속도에 대한 공동분포의 매개변수
$L$ : 기준직경	$\nu_1, \nu_2$ : 공동분포의 모드(mode)점
	$\theta$ : 크기와 속도에 대한 공동분포의 매개변수

\*회원, 경희대학교 대학원

\*\*한국항공대학교 대학원

\*\*\*회원, 한국항공대학교 항공기계공학과

## 집합

## 1. 서론

디젤엔진의 효율을 향상시키고  $\text{NO}_x$ 와 입자상 물질의 동시 저감을 위해서 최근에는 고압연료 분사장치를 이용하려는 연구가 활발히 진행되고 있다. 이때 액체 연료 미립화 과정이나 연료액적의 분포가 분무연소 특성에 어떻게 영향을 미치는지를 알기 위해서는 유동장내에서 개개 액적의 크기 및 속도에 관한 자세한 정보가 필요하다. 노즐에서 생성되는 분무는 작동 조건, 측정 장소에 따라 여러 가지 액적 크기 및 속도 분포를 갖는다. 액적의 크기, 속도 및 온도 분포는 분무와 주위 가스와의 물질, 운동량 및 에너지 교환 과정의 최적화에 중요한 정보를 제공한다. 분무장내 액적 크기분포를 Fraunhofer 회절원리를 사용하는 광산란 측정방법<sup>(1,2)</sup>에서는 적절한 수학적 확률밀도함수를 미리 크기 측정 이전에 가정하고서 평균액적을 구하기 때문에, 가정되는 확률밀도함수에 따라 결과가 달라질 수도 있다. 그러나 PDPA(Phase Doppler Particle Analyser)는 어떠한 수학적 확률밀도함수를 가정하지 않고 분무장내 국부지점에서의 액적크기 및 속도를 동시에 측정할 수 있다. 액적 크기 및 속도 정보는 상호관계를 가지며 어떤 공동확률분포를 이루고 있으므로 이를 가장 잘 나타낼 수 있는 공동확률밀도함수를 구하면 분무장내에서 액적과 주위 유동장과의 상호작용 등의 정보를 알 수 있을 뿐만 아니라 초기의 액체 분열모형을 사용하지 않는 연료분무 코드등에서 유용하게 이용할 수 있을 것이다.<sup>(3)</sup> 많은 경우에 실험데이터는 Gaussian분포를 따라 가거나 정규분포에 유사한 확률밀도함수로 쉽게 표현될 수 있지만 디젤분무는 분무장내에서 분무 및 액적의 분열, 응집이 계속 일어나고 있기 때문에 액적의 크기분포는 Gaussian분포나 정규분포로는 잘 나타낼 수 없다.<sup>(4)</sup> 즉, 디젤분무에서 큰 액적이 있는, 분무의 꼬리부분을 Gaussian분포나 정규분포로 나타낼 때는 표준편차의 2-3배 범위를 넘어서는 오차가 발생할 수가 있다.<sup>(5)</sup> 따라서 분사후에도 액적의 분열 및 응집이 계속 일어나는 연료분무의 액적 크기 및 속도를 잘 나타낼 수 있는 확률밀도함수가 필요하다. 이에 적합한 함수로 log-hyperbolic 확률밀도함수가 제시되었다.<sup>(6,7)</sup>

본 연구에서는 PDPA를 이용하여 디젤 분무의

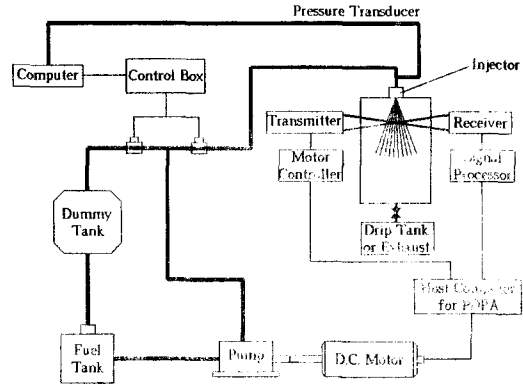


Fig. 1 Schematic diagram of experiment apparatus.

액적 크기와 속도를 동시에 측정하고 이 실험 데이터를 가장 잘 나타낼 수 있는 공동확률밀도분포를 다변수 매개변수를 갖는 log-hyperbolic 함수로 표현하고, 매개변수들의 값을 최적화 기법으로 구하여서 최적의 공동확률밀도함수를 도출하였다.

## 2. 실험장치 및 방법

실험 장치는 분무실(spray chamber), 분사 시스템 및 위상도플러입자측정기(PDPA) 등으로 구성되어 있다. 분무실 온도는 상온상태이고 분사시작 압력은 15.2 MPa이고, 최고 분사압력은 22.5 MPa이다. 실험장치의 개략도는 Fig. 1에 나타나 있으며 분무실압력은 0.1 MPa 및 2.17 MPa이며 분무실의 온도는 상온상태이다. 인젝터는 알루미늄 원통 중간에 장착되어 있고 실험에 사용된 노즐은 단일구멍식(single hole type)으로 직경이 0.24 mm, 노즐길이 대 직경비인  $L/d$ 는 3.3이다. 실험장치에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (3)에 기술되어 있다.

## 3. 공동확률밀도 함수의 도출

## 3.1 확률밀도분포

PDPA를 통하여 측정된 액적 크기 및 속도 데이터를 일정 수의 크기 및 속도 구간으로 나누어서 각 구간에 속하는 액적 크기와 속도의 빈도수를 총 빈도수로 정규화 한다. 액적 크기를  $x$ , 속도를  $y$  라 하고 구간  $i$ 번째에 해당하는 액적 크기를  $x_i$ 로, 구간  $j$ 번째 해당하는 액적속도를  $y_j$ 로 표시하면 구

간 \$(i, j)\$에 속하는 공동확률을 \$P\_{ij}\$라 하면 공동확률 밀도분포 \$f\_{ij}\$는 다음과 같다.<sup>(3,8)</sup>

$$f_{ij} = \frac{P_{ij}(x_i, y_j)}{\Delta x_i \Delta y_j} = \frac{(N_{ij} / \Delta x_i \Delta y_j)}{N_T} \quad (1)$$

여기서, \$\Delta x\_i\$와 \$\Delta y\_j\$는 구간 \$(i, j)\$의 액적 크기 및 속도 범위이고 \$N\_{ij}\$는 구간 \$(i, j)\$에 속하는 데이터 수이며 \$N\_T\$는 총 데이터 수이다. 액적 크기나 속도의 전 범위에 걸친 확률밀도분포의 합은 1이다.

$$\sum_j \sum_i f_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \int_y \int_x f(x, y) dx dy = 1 \quad (2)$$

여기서, \$f(x, y)\$는 공동확률밀도함수이며 같은 공동확률밀도함수를 쓰더라도 측정 조건과 위치에 따라 함수의 매개변수 값은 변한다.

### 3.2 확률밀도함수

다변수 분포에 관한 연구는 1886년에 Galton<sup>(9)</sup>이 처음으로 2차원 정상 분포를 소개함으로 시작되었다. 그 후 2차원 비정상 분포에 관한 연구가 진행되었고 Marida<sup>(10)</sup>에 의해 체계적으로 정리되었다. Barndorff-Nielsen<sup>(6)</sup>은 1977년에 일반적인 hyperbolic 분포를 소개하였다. Hyperbolic 분포는 분포의 양쪽 끝단이 정규분포 보다 두껍고, 매개변수가 많으므로 물리적 보존법칙을 따르는 stochastic 과정의 결과를 나타내는데는 정규분포 보다 더 적합하다.<sup>(6,10,11)</sup> Barndorff-Nielsen이 제시한 일반적인 d차원의 hyperbolic 함수는 다음과 같다.

$$H_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, \Delta; \vec{x}) = \frac{x^\lambda \alpha^{d/2-\lambda}}{(2\pi)^{d/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta x)} \times \frac{K_{\lambda-d/2}[\alpha \{\delta^2 + (\vec{x}-\mu) \Delta^{-1} (\vec{x}-\mu)\}^{1/2}]}{[\delta^2 + (\vec{x}-\mu) \Delta^{-1} (\vec{x}-\mu)]^{1/2(d/2-\lambda)}} \times \exp[\beta \cdot (\vec{x}-\mu)] \quad (3)$$

여기서, \$x\$는 d차원 변수 (\$x \in R^d\$)이고 \$K\_\lambda\$는 변형된 Bessel함수 (third kind, order \$\lambda\$)이다. 매개변수 \$\lambda\$, \$\delta\$는 1차원 (\$\lambda, \delta \in R\$), 매개변수 \$\beta, \mu\$는 d차원 (\$\beta, \mu \in R^d\$)이고 \$\Delta\$는 \$|\Delta|=1\$인 positive-definite matrix이다.

연료 분무장내에서 위치와 시간에 따라 액적은 2차 분열 및 응집을 할 수 있으며 이와 같은 분무장내의 거동을 잘 표현할 수 있는 확률밀도함수는 hyperbolic함수이다.<sup>(11)</sup> 분무장내에서 액적의 크기와 속도는 분무조건 및 분무장내 위치에 따라 상관관계를 가지고 있기 때문에 액적의 크기와 속도를 동시에 나타낼 수 있는 공동확률밀도함수를 사용하

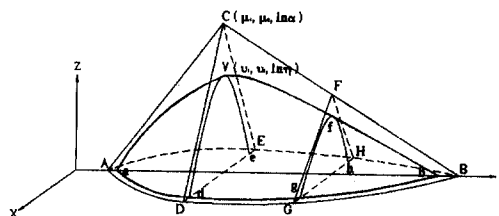


Fig. 2 Joint log-hyperbolic function.

여 표현하는 것이 바람직하다.

d차원 hyperbolic함수에서 \$d=2\$, \$\lambda=3/2\$으로 하면 스칼라형식으로 표시되는 2차원 hyperbolic 함수가 다음과 같이 표시될 수 있다.<sup>(11,12,13)</sup>

$$f(x, y) = a \exp\{-a[\delta^2 + b_{22}(x - \mu_1)^2 - 2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2) + b_{11}(y - \mu_2)^2]^{1/2} + \beta_1(x - \mu_1) + \beta_2(y - \mu_2)\} \quad (4)$$

여기서,  $a = \frac{x^3 e^{\delta x}}{2\pi\alpha(1 + \delta x)}$  (5)

$$x = \{\alpha^2 - [b_{11}\beta_1^2 + (b_{12} + b_{21})\beta_1\beta_2 + b_{22}\beta_2^2]\}^{1/2} \quad (6)$$

이며, 잉여의 매개변수를 줄이기 위해 \$b\_{12}=b\_{21}=\rho/2\$로 하였고, \$\Delta\$의 값이  $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 1$ 이므로 \$b\_{22}\$는  $(1 + \frac{\rho^2}{4})/b_{11}$ 이다.

분포 함수의 기하학적 성질은 Fig. 2에 보여지는 바와 같다.

점 \$(\mu\_1, \mu\_2)\$을 지나는 수직 단면이 쌍곡선 형태이고 확률밀도함수에 로그를 취할 때 정점 V의 높이는 \$\ln \eta\$이고 \$\eta\$와 \$\nu\_1, \nu\_2\$는 다음과 같이 나타난다.

$$\eta = f(\nu_1, \nu_2) = \frac{x^3}{2\pi\alpha(1 + \delta x)} \quad (7)$$

$$\nu_1 = \mu_1 + \frac{\delta}{x}(\beta_1 b_{11} + \beta_2 b_{21}) \quad (8)$$

$$\nu_2 = \mu_2 + \frac{\delta}{x}(\beta_1 b_{12} + \beta_2 b_{22}) \quad (9)$$

실험에서 얻은 확률분포의 끝단(꼬리)이 두꺼운 형태를 가질때 hyperbolic PDF는 Gaussian PDF나 Normal PDF보다 더 잘 나타낼 수 있다. Fig. 2에서 y축에 수직한 단면에서 살펴볼 때 각 \$\angle FHG\$와 \$\angle FGH\$는 기울기 \$\phi\_1\$와 \$\gamma\_1\$으로 각각 표시되고 매개변수들과는 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$\phi_1 = \alpha\sqrt{b_{22}} + \beta_1 \quad (10)$$

$$\gamma_1 = \alpha\sqrt{b_{22}} - \beta_1 \quad (11)$$

같은 방법으로  $x$ 축에 수직인 단면에 대한 기울기 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_2 = \alpha\sqrt{b_{11}} + \beta_2 \quad (12)$$

$$\gamma_2 = \alpha\sqrt{b_{11}} - \beta_2 \quad (13)$$

### 3.3 확률밀도함수의 응용

Hyperbolic 분포로 분무 특성을 나타낼 수 있는 평균액적 크기( $D_{10}$ ,  $D_{20}$ ,  $D_{30}$ ,  $D_{32}$ )와 평균질량( $\bar{m}$ ), 평균속도( $\bar{v}$ ), 평균운동량( $\bar{M}$ ), 평균운동에너지( $\overline{K.E.}$ )를 확률밀도함수를 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. <sup>(9,12)</sup>

$$\frac{D_{10}}{L} = I_1, \quad \left(\frac{D_{20}}{L}\right)^2 = I_2, \quad \left(\frac{D_{30}}{L}\right)^3 = I_3, \quad \frac{D_{32}}{L} = \frac{I_3}{I_2} \quad (14)$$

여기서,  $I_p = \iint x^p f(x, y) dx dy$ ,  $p=1, 2, 3$

$$\frac{\bar{m}}{\rho L^3} = \frac{\pi}{6} \iint x^3 f(x, y) dx dy \quad (15)$$

$$\frac{\bar{v}}{V} = \iint y f(x, y) dx dy \quad (16)$$

$$\frac{\bar{M}_v}{\rho L^3 V} = \frac{\pi}{6} \iint x^3 y f(x, y) dx dy \quad (17)$$

$$\frac{\overline{K.E.}}{\rho L^3 V^2} = \frac{\pi}{12} \iint x^3 y^2 f(x, y) dx dy \quad (18)$$

효율적인 증발연소를 위한 액적입경은 약  $25 \mu\text{m}$  정도가 적절하고, 고압 디젤분무에서 액적속도의 차수(order)는  $100 \text{ m/s}$ 이므로, 계산 시에 무차원화를 위한 액적의 기준크기와 기준속도는 각각  $L = 25 \mu\text{m}$ ,  $V = 100 \text{ m/s}$ 를 사용하였다. 여기서  $f(x, y)$ 는 실험데이터를 이용할 때는 실험에서 구한 액적크기 및 속도의 공동확률분포에서 구하며, 수학적 확률밀도함수를 이용할 때는 최적화기법으로 매개변수 결정후 함수값을 사용할 수 있다. 또한 다른 방법의 하나로 매개변수만을 사용하여 평균액적 크기, 평균속도, 평균운동량, 평균에너지를 다음과 같이 구할 수도 있다. <sup>(6)</sup>

$$\frac{D_{10}}{L} = \left(\frac{x}{x_{1,0}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{1,0}}{1 + \delta x} \times \exp[\mu_1 + \delta(x - x_{1,0})] \quad (19)$$

$$\left(\frac{D_{20}}{L}\right)^2 = \left(\frac{x}{x_{2,0}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{2,0}}{1 + \delta x} \times \exp[2\mu_2 + \delta(x - x_{2,0})] \quad (20)$$

$$\left(\frac{D_{30}}{L}\right)^3 = \left(\frac{x}{x_{3,0}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{3,0}}{1 + \delta x} \times \exp[3\mu_3 + \delta(x - x_{3,0})] \quad (21)$$

$$\frac{D_{32}}{L} = \left(\frac{x_{2,0}}{x_{3,0}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{3,0}}{1 + \delta x_{2,0}} \times \exp[\mu_1 + \delta(x_{2,0} - x_{3,0})] \quad (22)$$

$$\frac{\bar{v}}{V} = \left(\frac{x}{x_{0,1}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{0,1}}{1 + \delta x} \times \exp[\mu_2 + \delta(x - x_{0,1})] \quad (23)$$

$$\frac{\bar{M}_v}{\rho L^3 V} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{x}{x_{3,1}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{3,1}}{1 + \delta x} \times \exp[3\mu_1 + \mu_2 + \delta(x - x_{3,1})] \quad (24)$$

$$\frac{\overline{K.E.}}{\rho L^3 V^2} = \frac{\pi}{12} \left(\frac{x}{x_{3,2}}\right)^3 \frac{1 + \delta x_{3,2}}{1 + \delta x} \times \exp[3\mu_1 + 2\mu_2 + \delta(x - x_{3,2})] \quad (25)$$

여기서,

$$x_{p,q} = \sqrt{\alpha^2 - [b_{11}(\beta_1 + \beta)^2 + (b_{12} + b_{21})(\beta_1 + \beta)(\beta_2 + q) + b_{22}(\beta_2 + q)^2]} \quad (26)$$

$$p=0, \dots, 3, \text{ 그리고 } q=0, \dots, 2$$

$x_{0,0}$ 은  $x$ 와 같다.

### 3.4 매개변수 결정 방법

액적 분포를 잘 나타낼 수 있는 확률밀도함수의 매개변수 결정은 확률밀도 함수를 구하는 과정의 주요부분을 차지한다. 여러 독립매개변수를 구하기 위해서 함수를 최적화 하는데 가능성함수를 최대화 하는 방법을 사용하였다. 일반적인  $k$ 개의 매개변수를 가지는 가능성함수는 다음과 같다.

$$l(\theta) = l(\theta : \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_j \prod_i [P_{ij}(\theta)]^{r_{ij}} \quad (27)$$

가능성함수는 지수를 포함하므로 함수의 크기를 줄이기 위해 편의상 가능성함수에 로그를 취해 로그가능성함수를 최대화하여 여러 독립매개변수들을 구하였다.

$$L(\theta) = \ln l(\theta) = \ln \prod_j \prod_i [P_{ij}(\theta)]^{r_{ij}} = \sum_j \sum_i r_{ij} \ln P_{ij}(\theta) \quad (28)$$

여기서,  $\theta$ 는 매개변수 즉,  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu_1, \mu_2, b_{11}, \rho$ 를 의미하고  $r_{ij}$ 는 구간  $(i, j)$ 에 속하는 실험확률 값이고  $P_{ij}(\theta)$ 는 구간  $(i, j)$ 에 속하는 이론확률값으로 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$P_{ij}(\theta) = \frac{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x, y) dx dy}{\int_{x_{\max-1}}^{x_{\max}} \int_{y_{\max-1}}^{y_{\max}} f(x, y) dx dy} \quad (29)$$

로그가능성함수  $L(\theta)$ 를 최대화시키는 수치적 방법으로는 Davidon-Fletcher-Powell의 방법을 사용하였다. <sup>(15)</sup> 실제적으로 이 방법은 최소값을 찾으므로 가능성함수를  $-L(\theta)$ 로 하여 계산하였고 8개의 독

림매개변수를 갖는 확률밀도함수가 수렴할 때까지 반복 계산에 의해 진행한다. 또 이중적분 계산을 수행하기 위하여 Gaussian quadrature방법<sup>(14)</sup>을 사용하였다.

Davidon-Fletcher-Powell방법으로 매개변수를 결정하기 위해서는 반복 계산에 사용될 매개변수 8개의 초기값이 요구된다. 이 초기값을 주기 위해 1차원 hyperbolic확률밀도함수를 통하여 구한 매개변수들을 사용하였다. 다음은 4개의 매개변수를 갖는 1차원 hyperbolic확률밀도함수이다.

$$f(x) = \frac{a}{x} \exp[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)] \quad (30)$$

여기서,  $a > 0$ ,  $|\beta| < a$ ,  $\delta > 0$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ 이고  $\alpha, \beta, \delta, \mu$ 는 1차원 hyperbolic 확률밀도함수의 매개변수이다. 1차원 hyperbolic 확률밀도함수의 최적화를 위한 수치적 계산은 수정실행방향알고리즘

(Modified feasible directions algorithm) 방법<sup>(15)</sup>이 이용되었으며 액적 크기에 관한 매개변수를  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{\mu}$ , 속도에 관한 매개변수를  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\mu}$ 이라 할때 2차원 확률밀도함수에 쓰일 개략적인 초기 매개변수는 다음과 같은 식으로 구하였다.

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \bar{\alpha} \hat{\alpha}, \quad \beta_1 = \bar{\beta}, \quad \beta_2 = \hat{\beta}, \\ \delta^2 &= (\bar{\alpha}^2 \hat{\delta}^2 + \hat{\alpha}^2 \bar{\delta}^2) / \alpha^2, \\ \mu_1, \bar{\mu} \quad \mu_2 &= \bar{\mu}, \quad b_{11} = \hat{\alpha}^2 / \alpha^2, \quad \rho = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

이로써 구한 8개의 매개변수  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu_1, \mu_2, b_{11}, \rho$ 를 공동확률밀도함수의 초기값으로 사용하였다.

### 4. 결과 및 고찰

분무액적의 측정 위치는 노즐로부터 하방으로 분사되는 분무 중심축상(10, 20, 30, 50, 60 mm)에서와 중심축의 수직 방향 즉, 반경 방향(0.0, 0.5, 1.0, 1,

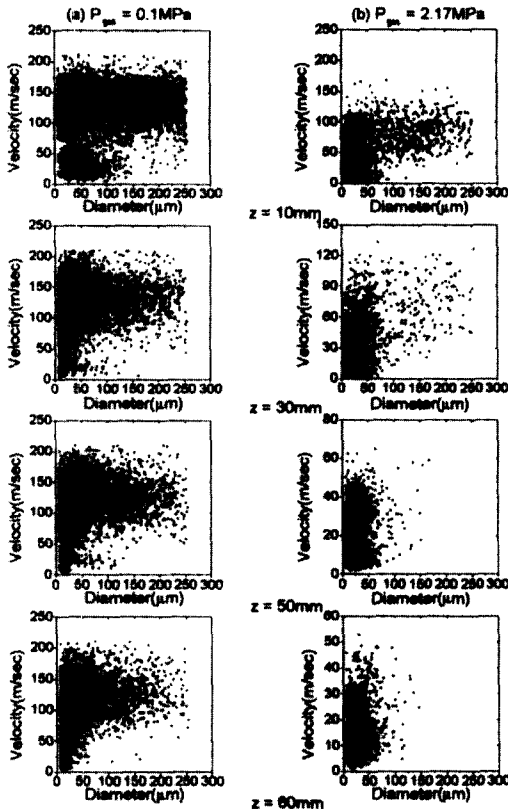


Fig. 3 Correlation of droplet sizes and velocities along spray axis.

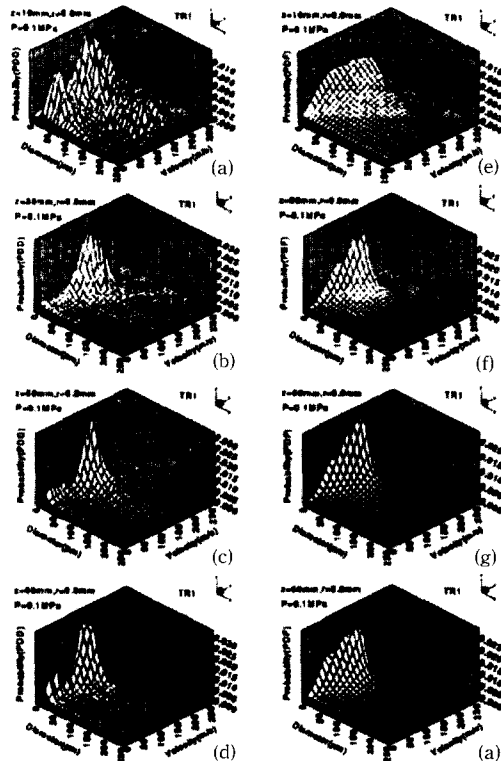


Fig. 4 Comparison of joint probability density distribution and probability density function along spray axis at  $P_{gas}=0.1MPa$

5, 2.0, 3.0, 5.0, 6.0, 7.0, 9.0 mm)에서 행하였다. 액적의 크기 및 속도는 각각 25구간으로 나누어 계산하였고 분사 시작부터 6.25 msec 동안의 측정 데이터를 통계처리에 사용하였다.

4.1 축방향 변화에 따른 확률밀도분포와 확률 밀도함수의 비교

Fig. 3은 분무중심축선상에서 분무실압력 0.1 MPa과 2.17MPa일 때 실험에 의해 측정된 액적의 크기와 속도의 그 상호관계를 나타내고 있다. 노즐 선단에서 멀어질수록 액적의 크기와 속도는 작은 쪽에 많이 분포하며 압력이 높을때(2.17MPa)가 낮을 때(0.1MPa)보다 작은 액적이 더 많이 분포하고 있다.

Fig. 4와 Fig. 5의 (a)~(d)는 각각 분무실이 대기압상태와 2.17MPa에서 분무중심축을 따라서 측정된 액적의 크기 및 속도의 확률밀도분포(PDD)를 나타내고 있으며 Fig. 4 및 Fig. 5의 (e)~(h)는

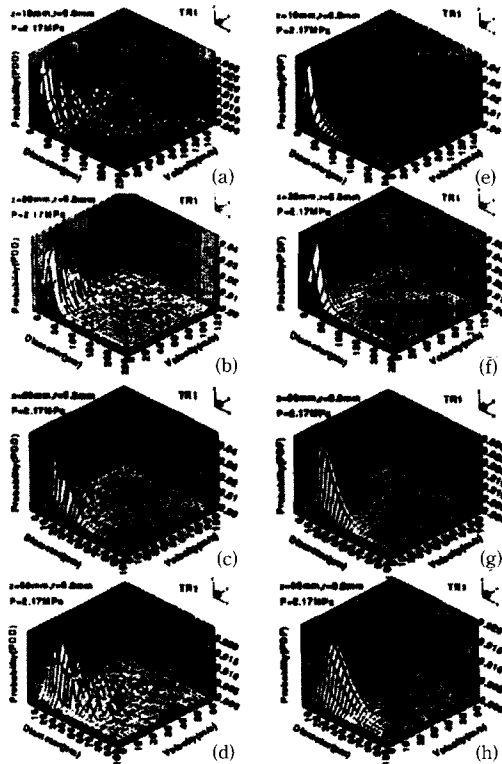


Fig. 5 Comparison of joint probability density distribution and probability density function along spray axis at  $P_{gas}=2.17MPa$

실험데이터를 나타내는 log-hyperbolic PDF를 나타내고 있다. 대체로 노즐에 가까울수록 크기와 속도가 큰 액적이 많이 분포하고 있으며 분무실 압력에 따라 액적의 크기 및 속도분포가 달라지고 있다. 분무실 압력이 높을 때 액적의 크기는 분무실 압력이 낮을 때보다 작은 액적이 많이 분포하고 액적의 속도도 감소함을 알 수 있다. 이는 압력이 높을 때 주위가스의 저항이 크기 때문에 액적의 분열도 빨리 일어날 뿐 아니라 액적의 속도도 현저히 줄어드는 것으로 보인다.

Fig. 6은 분무실 압력이 대기압(0.1MPa)과 2.17 MPa에서 평균액적의 크기( $D_{10}$ ,  $D_{20}$ ,  $D_{30}$ ,  $D_{32}$ )를 축방향변화에 따라 나타낸 것이다. 분무실 압력이 높을 때 평균액적크기도 작아지고 있다. 대기압일 때 액적의 크기는 완만히 감소하는데 비해, 분무실 압력이 높을 때는 10 mm와 20 mm사이에서 액적크기는 급격히 감소하고 50 mm까지는 완만히 감소하다가 분무선단 50 mm부터 액적의 크기가 약간 증가하는 것을 볼 수 있는데 이는 대기압 상태에서는 분무액적들이 응집이 일어나지 못한 채 액적이

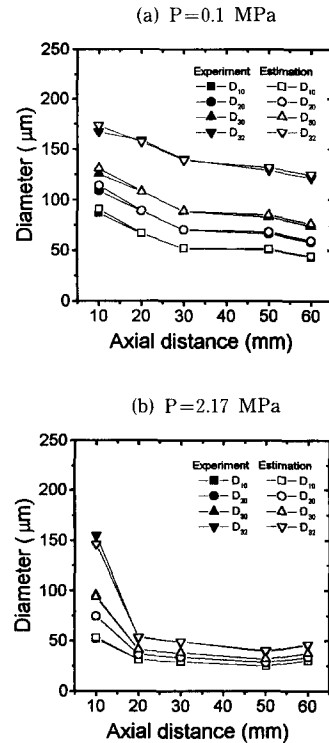


Fig. 6 Mean diameters along spray axis at  $P_{gas}=0.1MPa$ ,  $P_{gas}=2.17MPa$

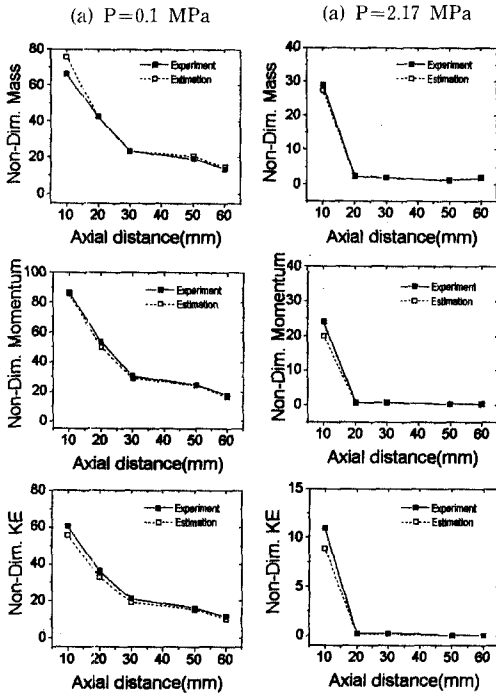


Fig. 7 Non-dimensional properties along spray axis.

진행하는데 비하여 분무실 압력이 높을 때, 분무실 하부에서는 액적이 주위공기와의 상대속도가 감소하여 더 이상 분열은 일어나지 않고 액적과 액적의 응집이 일어나고 있는 것으로 보인다.

Fig. 7은 각각 대기압과 2.17 MPa에서의 축방향 변화에 따른 액적의 질량과 운동량, 운동에너지의 평균값의 변화를 나타내는 그림이다. 확률밀도함수로부터 통계적 처리를 통하여 구한 평균질량, 운동량, 운동에너지가 확률밀도 분포에서 구한 각 값들과 잘 일치하고 있다. 분무실 압력이 대기압일때는 노즐선단으로부터 30 mm지점까지 질량, 운동량, 운동에너지가 급격히 감소하고 그 이후는 서서히 감소하지만 분무실 압력이 높을 때는 20 mm지점까지 질량, 운동량, 운동에너지가 급격히 감소한 후 그 이후부터는 운동량과 운동에너지는 거의 일정하다. 그러나 압력이 높을 때 50 mm에서 60 mm사이에서 질량은 약간 증가됨을 알 수 있으며 이는 Fig. 6의 (b)의 직경 증가 결과와 일치하고 있다.

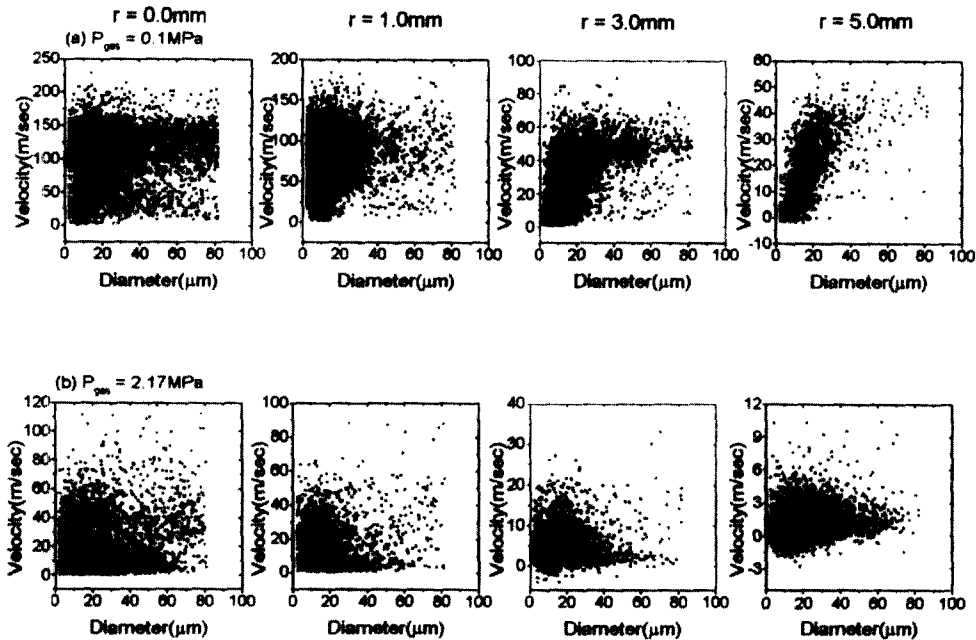


Fig. 8 Correlation of droplet sizes and velocities in radial positions at  $z=30\text{mm}$ .

#### 4.2 반경방향변화에 따른 확률밀도분포와 확률 밀도함수의 비교

Fig. 8은 분무실압력 0.1 MPa과 2.17 MPa, 분무선단 30 mm에서 반경방향의 액적의 크기와 속도의 상호관계를 나타낸 그림이다.

Fig. 9와 Fig. 10은 대기압과 2.17 MPa, 분무선단 30 mm에서의 반경방향에 따른 확률밀도분포(PDD)와 확률밀도함수(PDF)를 나타낸다. 대기압 상태일 때 반경방향으로 갈수록 큰 액적이 큰 속도

를 가지는 상호관계를 볼 수 있으며 이는 큰 액적이 작은 액적에 비해 큰 운동량을 가지므로 중심축 상으로 들어오는 주위공기를 이기며 반경방향으로 더 멀리 갈 수 있음을 의미한다. 분무실 압력이 2.17 MPa로 증가했을 때 이러한 상관관계가 나타나지 않는다. 분무실 압력이 높고 측정위치가 분무 가장자리 일 때는 속도가 음수인 액적들이 존재하고 있는데 이는 분무 가장자리가 vortex 운동을 하여 작은 액적이 유동과 함께 움직이기 때문이다.

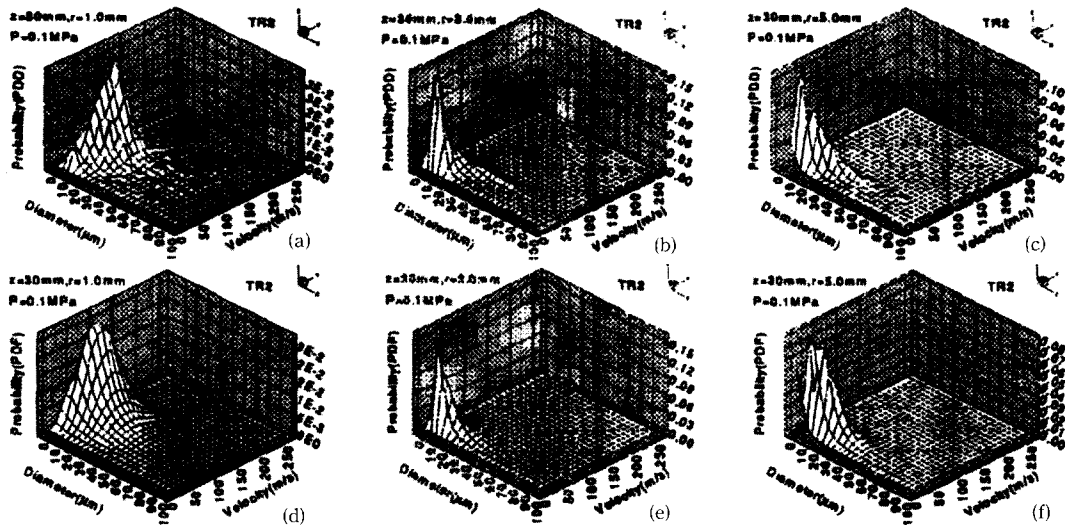


Fig. 9 Comparison of joint probability density distribution and probability in radial positions at  $P_{\text{gas}}=0.1\text{MPa}$ .

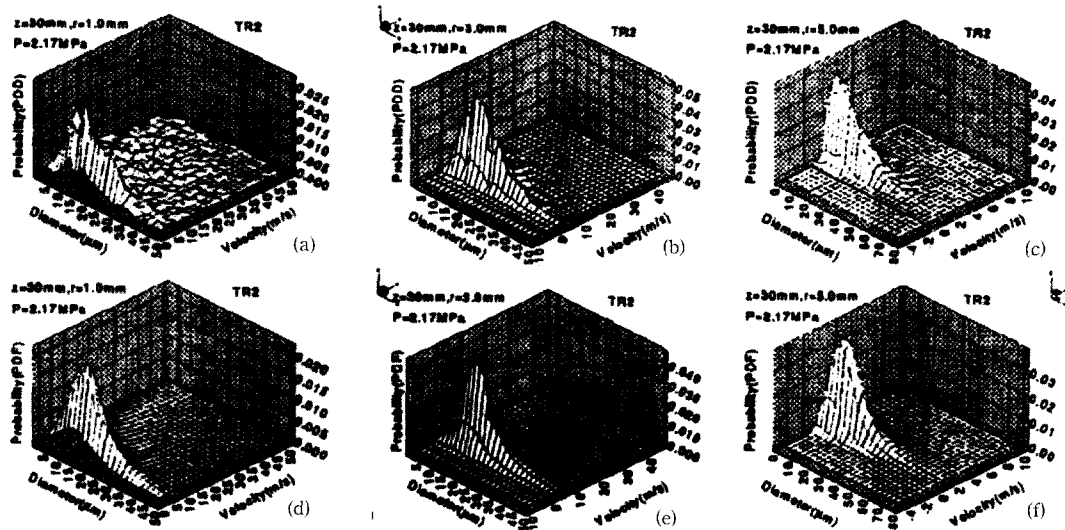


Fig. 10 Comparison of joint probability density distribution and probability in radial positions at  $P_{\text{gas}}=2.17\text{MPa}$ .



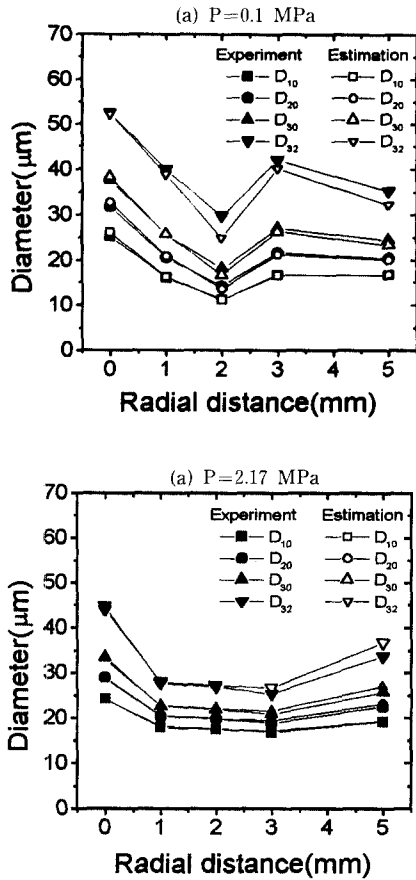


Fig. 11 Mean diameters in radial positions at 30mm from nozzle exit.

Fig. 11은 반경방향에서의 평균액적 크기를, Fig. 12는 확률밀도분포와 확률밀도함수를 통계처리하여 무차원화된 평균질량, 평균운동량, 평균운동에너지를 구하고 서로 비교한 것이다. 반지름 방향으로 비교했을 때 분무실압력이 높을수록 평균액적크기나 평균질량, 평균운동량, 평균운동에너지 값이 줄어든다.

#### 4.3 $\chi$ -square 및 log-hyperbolic 확률밀도함수와 확률밀도분포의 비교

Fig. 13은 분무실 압력 0.1 MPa와 2.17 MPa에서의 실험에 의한 확률분포와 최적화 기법을 통하여 결정된 매개변수에 의한 액적크기의 확률밀도함수와 Kiva-II코드에 쓰이는  $\chi$ -square 확률밀도함수와 log-hyperbolic 확률밀도함수를 사용했을 때의 확률분포 및 실험에 의해 나타나는 확률밀도분

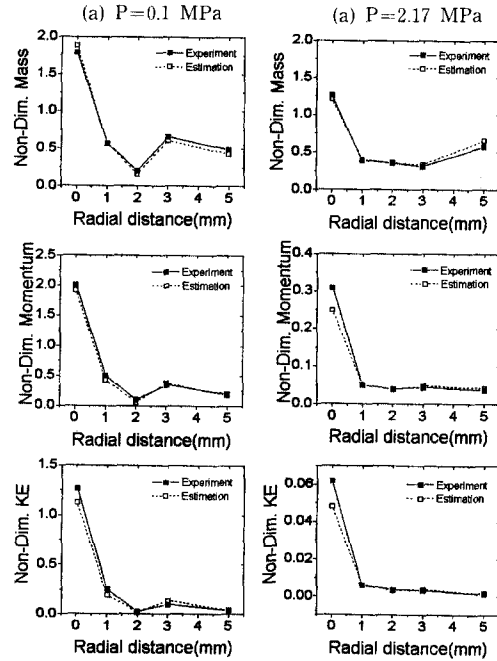


Fig. 12 Non-dimensional properties in radial positions at 30 mm from nozzle exit.

포를 노즐선단 10 mm, 30 mm, 60 mm에서 비교한 것이다.

압력이 높을 때 log-hyperbolic 함수에 의한 액적분포가 액적크기가 작은 쪽으로 많이 있게 나타나고 있다. 압력이 낮을 경우 노즐로부터 멀어지더라도, 압력이 높을 때 보다 액적의 분열이 덜 일어나므로 큰 액적들이 상대적으로 많이 존재하는 길게 늘어진 비대칭 형태의 분포를 나타내고 있으며, log-hyperbolic 함수가 이러한 긴 꼬리 부분을  $\chi$ -square 함수보다 더 잘 따라 주고 있다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결론

분무실압력 0.1 MPa와 2.17 MPa의 조건하에서 위상도플러 입자측정기로부터 측정된 액적크기 및 속도를 동시에 잘 나타낼 수 있는 log-hyperbolic 확률밀도함수의 매개변수를 Davidon-Fletcher-Powell의 최적화방법을 사용하여 각 경우에 대하여 구하였다. 수학적 공동확률밀도함수는 실험에 의한 확률밀도분포를 비교적 잘 나타내었다. 분무장내 분무특성을 나타낼 수 있는 평균액적 크기 및 평균질

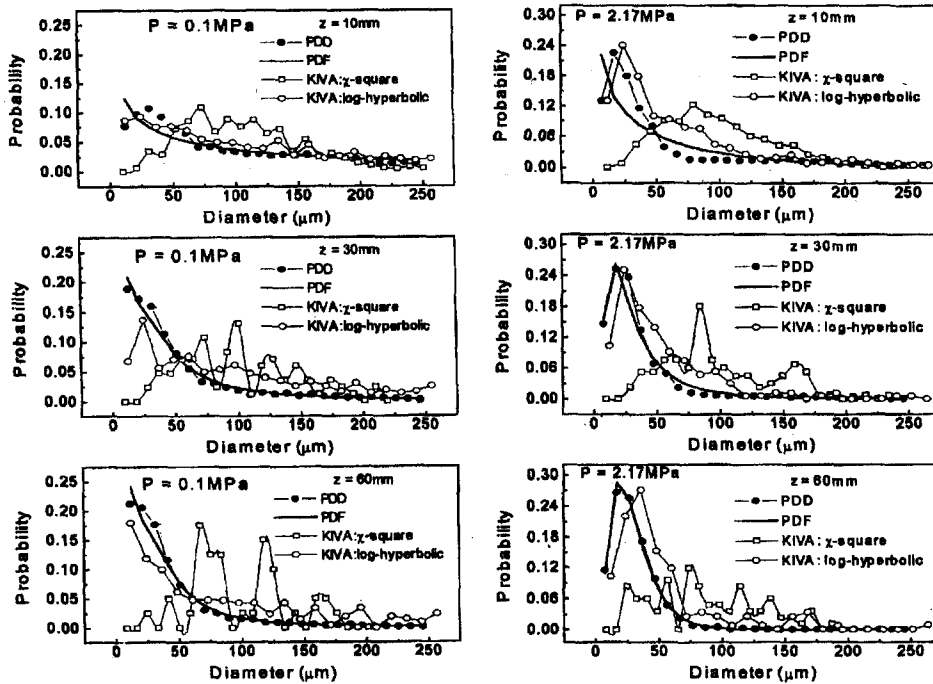


Fig. 13 Comparisons of various probability distributions of droplet size along spray axis.

량, 평균운동량, 평균운동에너지를 확률밀도함수로 부터 구했을 때와 확률밀도분포로부터 구했을 때의 값들은 비교적 잘 일치하였다.

## 후 기

본 연구는 포항공대 첨단유체공학센터(AFERC)의 지원에 의하여 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) 이상용, 1996, "액체의 미립화," 민음사, pp. 302~303.
- (2) Swithenbank, J., Beer, J. M., Taylor, D. S., Abbot, D., and McCreath G. C., 1977, "A Laser Diagnostic Technique for the Measurement of Droplet and Particle Size Distribution," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 53, pp. 421~447.
- (3) 구자예, 1994, "연료분무의 위상도플러 측정과 확률밀도함수의 도출," 대한기계학회논문집, 제

18 권, 제4호, pp. 1039~1049.

- (4) Bracco, F. V., 1985, "Modeling of Engine Spray," *SAE Paper No. 850394*.
- (5) Barndorff-Nielsen, O., 1979, "Models for Non-Gaussian Variation with Application to Turbulence," *Proc. R. Soc. Lond. A* 368, pp. 501~520.
- (6) Barndorff-Nielsen, O., 1977, "Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size," *Proc. R. Soc. Lond. A*. 353, pp. 401~419.
- (7) Durst, F., 1990, "Phase-Doppler Measurements in Liquid Sprays and Their Presentation by Log-Hyperbolic Distribution," *Conf. on Mechanisms of Non-Uniform Combustion*, Tokyo, pp. 9~14.
- (8) Koo, J. Y., and Martin, J. K., 1991, "Comparisons of Measured Drop Sizes and Velocities in a Transient Fuel Spray with Stability Criteria and Computed PDFs," *SAE Technical Paper*, 910179.
- (9) Galton, F., 1986, "Family Likeness in Stature," *Proc. R. Soc.* 40, pp. 42~73.
- (10) Marida, K. V., 1970, *Families of Bivariate Distributions*, Griffin, London.

- (11) Bhatia, J. C., and Durst, F., 1988, "Description of Sprays Using Joint Hyperbolic Distribution in Particle Size and Velocity," LSTM Report No. 241/T/88.8.
- (12) Blaesild, P., 1981, "The Two-Dimensional Hyperbolic Distribution and Related Distributions, with an Application to Johannsen's Bean Data," *Biometrika*, Vol. 68, pp. 251~263.
- (13) Bhatia, J. C., and Durst, F., 1990, "Description of Sprays Using Joint Hyperbolic Distribution in Particle Size and Velocity," *Combustion and Flame*, Vol. 81, pp. 302~218.
- (14) Lefebvre, A. H., 1989, *Atomization and Spray*, Hemisphere Press.
- (15) Press, W. H., 1992, *Numerical Recipes in Fortran*, 2nd edition.
- (16) Vanderplaats, G. N. and Hansen, S. R., 1989, "DOT Manual (Version 2.0)".