

이중 시간전진법과 Preconditioning을 이용한 저속의 압축성유동에 대한 비정상 해석기법

최 윤 호* · 강 신 형**

(1997년 9월 19일 접수)

Time Accurate Method for Low Speed Compressible Flows Using Dual Time Stepping and Preconditioning Procedure

Yun-Ho Choi and Shin-Hyung Kang

Key Words : Time Marching Algorithm(시간 전진법), Time-Derivative Preconditioning(시간항 프리콘디션), Dual Time Stepping Procedure(이중 시간전진법), Unsteady Computation(비정상유동 해석), Pseudo-Time(가상 시간)

Abstract

A numerical method using dual time stepping and preconditioning procedure for efficient computations of unsteady low speed compressible flow problems is developed. The time-derivative preconditioning method which is valid at low speed flow conditions cannot maintain temporal accuracy because of the modification of the time-derivative term in Navier-Stokes equations. The dual time stepping procedure is incorporated to enable the time accurate computations and this procedure introduces a pseudo-time derivative in addition to the physical time derivative. At a given physical time, an inner iteration can be carried out until a steady state in pseudo-time is achieved. This will effectively yield a time accurate solution. Computational capabilities of the above algorithm are demonstrated through computation of a variety of practical fluid flows and it is shown that the algorithm is efficient in the essentially incompressible flows and low Mach number compressible flows with heat source.

1. 서 론

광범위한 유동조건에 적합한 전산유체 해석기법의 개발은 최근 복잡한 유동장에 대한 계산의 필요성이 커짐에 따라 그 중요성이 증대하고 있다. 복잡한 유동장은 일반적으로 수렴의 어려움을 초래하고 사용하는 수치기법의 신뢰성을 감소시킨다. 이

와 같은 수치기법 성능저하의 주요 원인은 해석대상 유동장이 특정 전산유체 해석기법의 효율적 범위를 벗어나는 유동장을 포함하고 있거나, 복잡한 격자 또는 충격파와 같은 강력한 유동변수의 구배가 존재하기 때문이다. 대표적인 예로서 압축성유동 해석에 널리 사용되는 시간전진법(time marching method)^(1,2)은 천음속과 초음속 영역의 계산에 적합하지만 저속의 아음속 유동장 해석에 있어서는 상당한 수렴속도의 감소를 초래하여 비효율적인 것으로 알려져있다.⁽³⁻⁷⁾ 이와 같은 문제점은 압축성 지배방정식계에 존재하는 음파(acoustic speed)와

*회원, 아주대학교 기계공학과

**회원, 서울대학교 기계공학과

입자속도 (particle speed) 간의 크기의 차이에 기인하며, 이는 다시 지배방정식의 고유값(eigenvalue)들 사이에 큰 차이를 만들게 되어 시간전진법에 사용되는 시간간격(Δt)을 Mach수에 비례하여 작게 하므로 수렴속도가 떨어지게 된다. 이와 같은 시간전진법의 특성은 저속의 압축성유동에 관련한 많은 공학분야의 해석을 어렵게 한다.

위와 같은 저속의 유동장에 대한 해석의 문제점을 극복하고 광범위한 유속에 대한 압축성 유동장의 효율적인 해석을 위하여 현재까지 많은 노력이 있어 왔으며, 그 중 특히 time-derivative preconditioning 방법^(3~7)에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 이 방법은 Navier-Stokes 지배방정식의 시간항에 특정 행렬을 곱함으로써 지배방정식의 고유값들을 같은 크기로 조절하는 방법이다. 특히 최근 저자와 Merkle^(6,7)은 전속도 영역에 적합한 새로운 preconditioning 방법을 개발하였으며 현재 많은 분야의 해석에 응용되고 있다^(8~10). 그러나 이와 같은 preconditioning 방법은 정상상태 해석에는 유효하나, 비정상상태 해석에는 적용할 수 없다. 이는 본 방법이 지배방정식의 시간항을 임의로 변경시키기 때문이며, 따라서 일반적인 시간전진법을 사용하여서는 시간의 정확도를 유지할 수 없다.

시간전진법을 이용한 비정상유동 해석을 위하여는 대부분의 경우 반복법(iterative procedure)을 사용한다. 이와 같은 반복법 중 가상시간항을 이용한 이중 시간전진법^(11,12)은 우수한 수치안정성 특성을 유지할 수 있는 장점으로 현재 비압축성 유동장에서의 비정상유동 해석에 널리 사용되고 있다. 본 연구에서는 이와 같은 이중 시간전진법을 이용하여 preconditioning 방법을 비정상유동 해석에 적용할 수 있는 수치기법을 개발하였다. 개발한 비정상 해석기법의 특성을 이해하기 위하여 광범위한 수치안정성 해석을 수행하였으며, 또한 본 방법의 검증을 위하여 다양한 유동장에 대한 수치계산을 수행하였다. 고려한 유동장은 4가지로서 진동하는 평판 주위의 유동, 비정상 캐비티 유동, 관내부의 맥동하는 유동, 열원이 존재하는 경우의 원형 실린더 후류에서의 vortex shedding이다. 각각의 경우에 대한 계산 결과는 이론해 또는 실험결과와 비교하여 수치기법의 정확도를 검증하였으며, 또한 가상시간항에 대한 반복 횟수를 조사하여 본 방법의 수렴특성을 검토하였다.

2. 연구방법 및 이론

2.1 Navier-Stokes 지배방정식

비정상 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같은 벡터형태로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = L(Q_v) \quad (1)$$

식 (1)에 나타나는 종속변수 벡터와 플럭스 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T \\ E &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u)^T \\ F &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v)^T \\ Q_v &= (p, u, v, T)^T \end{aligned} \quad (2)$$

위 식에서 종속변수 벡터 Q와 비점성 플럭스 벡터 E와 F는 일반적인 형태를 취하며, 벡터 Q_v는 Navier-Stokes 방정식에 나타나는 “원시 변수”를 표시한다. 위 식에서 Q 대신에 “원시 변수” 벡터 Q_v를 사용하는 이유는 점성항의 구조를 간단하게 하여 계산의 복잡성을 감소시키기 위함이다. 식 (2)에 나타나는 모든 변수는 밀도 ρ , 속도성분 u, v, 압력 p, 온도 T, 그리고 단위 체적당 전 에너지 e를 포함하여 모두 표준 기호로 정의되어 있으며, 압력은 식 (2)와 더불어 다음과 같은 완전기체 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right\} \quad (3)$$

여기서 γ 는 비열비이다.

점성항의 미분 연산자 L은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} R_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yx} \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 R_{xx} , R_{xy} , R_{yx} , R_{yy} 는 다음과 같은 점성계수 μ 와 열전도계수 k를 포함하는 확산계수 행렬이다.

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu l & \mu v & k \end{bmatrix} \quad R_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu v & -\frac{2}{3}\mu l & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{vx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu V & \mu u & 0 \end{bmatrix} \quad R_{vy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu u & \frac{4}{3}\mu V & k \end{bmatrix} \quad (5)$$

위 식에서 2차점성 계수를 위하여는 Stokes의 가설을 사용하였다.

식 (1)을 이용한 비정상유동장의 해석은 비반복법과 반복법으로 대별할 수 있다. 비반복법은 일반적인 외재적방법(explicit method)⁽¹³⁾과 내재적방법(implicit method)^(1,2)을 포함하며, 외재적방법의 경우 수치안정성의 제약으로 인하여 사용할 수 있는 허용시간 간격이 제한되므로 특히 격자계가 매우 밀집되어 있는 경우 또는 유동의 발달시간이 느린 경우 이 방법을 이용하여 계산하기는 어렵다. 반면에 내재적방법은 외재적방법에 비하여 시간간격의 제한은 없지만, 효율적인 계산을 위하여 적용되는 선형화(linearization), 대각선화(diagonalization) 및 근사분해에 의한 오차(approximate factorization error) 등으로 인하여 실제로 매우 작은 시간 간격을 사용하지 않으면 시간의 정확도를 유지하기 어렵다.

따라서 비정상유동장에 대한 수치기법으로서는 시간의 정확도를 유지하기 위하여 대부분의 경우 반복법을 사용한다. 이와 같은 반복법은 연속방정식에 시간항이 존재하지 않는 비압축성유동 해석의 경우 많은 연구가 있어 왔으며 특히 최근에 개발된 가상시간항을 이용한 이중 시간전진법^(11,12)은 현재 비압축성 유동장에서의 비정상유동 해석에 널리 사용되고 있다. 본 연구의 대상인 preconditioning이 적용된 Navier-Stokes 지배방정식은 지배방정식의 시간항이 변경되었으므로 시간의 정확도를 유지할 수 없으며, 따라서 본 방법은 단지 정상상태에서만 유효하다. 이러한 단점을 보완하여 본 방법을 비정상유동 문제의 해석에 확장하기 위하여 다음과 같이 이중 시간전진법을 고찰한다.

2.2 이중 시간전진법의 적용

이중 시간전진법을 이용한 비정상 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식은 가상시간항을 이용하여 다음과 같은 벡터 형태로 표시할 수 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q_v}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = L(Q_v) \quad (6)$$

위 식에서 첫 번째 항은 원시변수 Q_v , 가상시간 τ , preconditioning matrix Γ 를 포함하는 가상시간항이며, 나머지 항은 식 (1)과 같은 표준 Navier-Stokes 지배방정식이다. 가상시간항은 두 번째 항의 실제시간항에 대하여 내부 반복(inner iteration)의 수행을 가능하게 하며, 이와 같은 내부 반복을 통하여 정상상태로 수렴하게 되면 가상시간항은 소멸하게 되고 위 식은 종래의 비정상 Navier-Stokes 방정식으로 환원하게 된다. 따라서 각 실제시간에서의 비정상해는 가상시간에서 정상상태로 수렴함에 따라 얻을 수 있으며, 가상시간항은 비정상해의 정확도에 영향을 미치지 않는다. 이와 같은 이중 시간전진법의 장점은 내부 반복과정에서의 수렴특성이 가상시간 프레임에서의 고유값에 의하여 결정되며, 실제시간 프레임에서의 고유값에 의하여 결정되지 않는다는 점이다. 따라서 광범위한 유동조건에 대하여 지배방정식의 고유값을 같은 크기로 조절될 수 있도록 가상시간항의 Γ 를 적절히 선정함으로써 가상시간항에서 빠른 수렴특성을 얻을 수 있다. 또한 실제시간 간격은 내부반복에 사용되는 CFL수에 독립적으로 선정할 수 있으므로 유동의 발달 속도에 맞추어 자유로이 선정할 수 있게 된다.

본 연구에서는 저자와 Merkle이 개발한 preconditioning matrix $\Gamma^{(6,7)}$ 를 사용하여 비정상유동 해석에서의 특성을 파악하였으며 이는 다음과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta M^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\beta M^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{\beta M^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{(e+p)}{\rho \beta M^2} - 1 & \rho u & \rho v & \frac{\gamma \rho R}{\gamma - 1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (6)의 가상시간에 대한 고유값은 행렬 $\Gamma^{-1}A_v$ 로부터 구할 수 있으며 다음과 같다.

$$\lambda(\Gamma^{-1}A_v) = \left(u, u, \frac{u(1 + \frac{\beta M^2}{\gamma RT}) \pm c'}{2} \right) \quad (8)$$

여기서 $A_v \frac{\partial E}{\partial Q_v}$ 이며, 가상음속 c' 은 다음과 같이 정의된다.

$$c'^2 = u^2 \left(1 + \frac{\beta M^2}{\gamma RT} \right)^2 + 4\beta M^2 \left(1 - \frac{u^2}{\gamma RT} \right) \quad (9)$$

또한 수렴속도의 개선을 위하여 스케일링 변수 $\beta = k\gamma RT$ 로 선정하여 고유값들의 크기를 같은 크기로 조절하였으며, k 는 저 Re 수 유동 계산에 필요한 변수로서 다음과 같다.

$$k = \text{Max} \left[1, \frac{\alpha(\alpha-1)}{M^2 \left(\alpha-1 + \frac{\gamma RT}{u^2} \right)} \right] \quad (10)$$

여기서 α 는 $CFL/(\sigma Re_{\Delta x})$, σ 는 von Neumann number, $Re_{\Delta x}$ 는 cell Reynolds number ($u \Delta x / \nu$)로 정의되며, 위 변수들에 대한 자세한 유도과정은 참고문헌⁽⁷⁾에 기술되어 있다.

2.3 수치 해석 기법

본 연구에 사용한 수치해석 기법은 식 (6)의 실제시간항에 대하여는 3레벨의 후향차분, 가상시간항에 대하여는 Euler의 내재적방법을 사용하고, 공간항에 대하여는 중심차분법을 사용하였다. 이를 가상시간항의 $(p+1)$ 번째 반복횟수와 실제시간항의 $(n+1)$ 번째 레벨에서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{Q_v^{p+1} - Q_v^p}{\Delta \tau} + a_1 \frac{Q^{p+1}}{\Delta t} + a_2 \frac{Q^n}{\Delta t} + a_3 \frac{Q^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\partial E^{p+1}}{\partial x} \\ + \frac{\partial F^{p+1}}{\partial y} = \text{RHS}^{p+1} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, RHS는 식 (6)의 점성항으로서 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \text{RHS} = \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial Q_v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} R_{xy} \frac{\partial Q_v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yx} \frac{\partial Q_v}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial Q_v}{\partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

계수 a_1 , a_2 및 a_3 는 요구되는 시간의 정확도에 따라 결정되며, 시간간격이 일정하고 2차의 정확도를 유지할 경우 $a_1 = 3/2$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1/2$ 로 선택할 수 있다. 고차의 시간 정확도는 실제시간항에 고차의 차분법을 적용함으로써 계산시간의 큰 증가 없이 얻을 수 있다. 이중 시간전진법에 나타나는 2개의 시간항에 대한 시간간격의 결정은 실제 시간간격 Δt 의 경우 고려하는 비정상유동 문제의 특성에 따라 결정되며, 가상 시간간격 $\Delta \tau$ 는 수치해석 방법의 안정성 측면에 대한 고려를 통하여 내부 반복 수행시 최적의 수렴을 얻도록 선택한다. 본 연구의 결과절에서 고려한 유동장 계산에 사용한 가

상시간항의 CFL 수는 대개 1과 10 사이에 있다.

식 (11)을 선형화한 후 형성되는 대수식에 대한 효율적인 계산을 위하여는 ADI 방법^(1,2)을 사용하였으며 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[S + \Delta \tau \left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^p \\ \cdot S^{-1} \left[S + \Delta \tau \left(\frac{\partial B_v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^p \Delta Q_v \\ = -\Delta \tau R^p \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, R^p 는 내부 반복횟수 p 에서의 식 (11)의 잔여항이며 다음과 같이 표시된다.

$$R^p = \frac{3Q^p - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial E^p}{\partial x} + \frac{\partial F^p}{\partial y} - L(Q_v)^p \quad (14)$$

또한 행렬 $S = \Gamma + \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t} T$ 이며, 자코비안 T , A_v 와 B_v 는 다음과 같이 정의된다.

$$T = \frac{\partial Q}{\partial Q_v}, \quad A_v = \frac{\partial E}{\partial Q_v}, \quad B_v = \frac{\partial F}{\partial Q_v} \quad (15)$$

식 (13)의 해는 일반적인 block tridiagonal inversion 절차를 이용하여 구할 수 있다.

3. 수치안정성 해석

본 연구에서는 실제문제에 대한 수치해석을 수행하기 전에 이중 시간전진법의 안정성특성을 이해하기 위하여 식 (13)의 비점성항에 대하여 von Neumann의 수치안정성 해석⁽¹⁴⁾을 수행하였다. 이와 같은 수치안정성 해석을 통하여는 수치기법에 대한 안정성조건 뿐만 아니라 수렴특성을 예측할 수 있으므로 매우 유용하다. Von Neumann의 수치안정성 해석에 의하면 식 (13)은 Fourier 변환을 이용하여 다음과 같은 frequency domain으로 변환시킬 수 있다.

$$L_1 Q_v^{p+1} = L_2 Q_v^p \quad (16)$$

여기서 행렬 L_1 은 식 (13)의 내재적 연산자 (implicit operator)의 Fourier 변환 결과이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_1 = S + i \frac{\Delta \tau}{\Delta x} A_v \sin(\omega_x) + i \frac{\Delta \tau}{\Delta y} B_v \sin(\omega_y) \\ + \frac{\Delta \tau^2}{\Delta x \Delta y} A_v S^{-1} B_v \sin(\omega_x) \sin(\omega_y) \end{aligned} \quad (17)$$

또한 행렬 L_2 는 다음과 같다.

$$L_2 = S + \frac{\Delta \tau^2}{\Delta x \Delta y} A_v S^{-1} B_v \sin(\omega_x) \sin(\omega_y) + \frac{3\Delta \tau}{2\Delta x} T \quad (18)$$

여기서 ω_x, ω_y 는 x, y방향의 파수(wave-number)이며, $i = \sqrt{-1}$ 이다. 또한 amplification matrix G를 $Q_i^{n+1} = G Q_i^n$ 와 같이 정의하면, 식 (16)으로부터 $G = L_1^{-1} L_2$ 이다. G의 고유값은 파수(wave-number) 0에서 π 의 범위에서 수치적으로 계산되고, 수치기법의 안정성은 G의 최대 고유값의 크기가 1 보다 작을 때 보장된다. 그리고 고유값의 크기가 1 보다 작으면 작을수록 우수한 수렴 특성을 나타낸다.

Fig. 1은 이중 시간전진법의 안정성특성과 비교하기 위하여, 종래의 Euler 방정식(1)에 시간전진법을 적용한 경우의 안정성특성을 보여주고 있다. 고려한 Mach수는 $M=0.5$ 와 0.001 이며, $M=0.5$

의 경우는 시간전진법의 수렴특성이 우수한 고속의 유동영역이다. $M=0.5$ 에서는 고유값의 최대치가 중간파수 지역에서 나타나며 약 0.9이고, 그 외의 지역에서는 그 보다 낮은 값을 가지므로 좋은 수렴 특성을 예측할 수 있지만, 저속인 $M=0.001$ 에서는 모든 파수 범위에서 고유값이 거의 1에 가까우므로 수렴특성이 현저히 떨어지는 것을 볼 수 있다. 따라서 잘 알려져 있듯이 Euler방정식을 사용하는 경우, 저 Mach수의 유동 계산은 매우 비효율적이다. Fig. 2는 preconditioning과 이중 시간전진법을 사용하는 경우, Mach수 0.5와 0.001에 대한 안정성특성을 보여준다. Fig. 1과 비교하면 두가지 Mach수 모두 고유값의 분포가 Euler방정식의 $M=0.5$ 경우와 유사하며, 고유값의 최대치는 Euler 방정식을 사용하는 경우 보다 작은 약 0.8이다. 따라서 preconditioning과 이중 시간전진법을 사용하는 경우, 저속($M=0.001$)과 고속($M=0.5$) 모두에

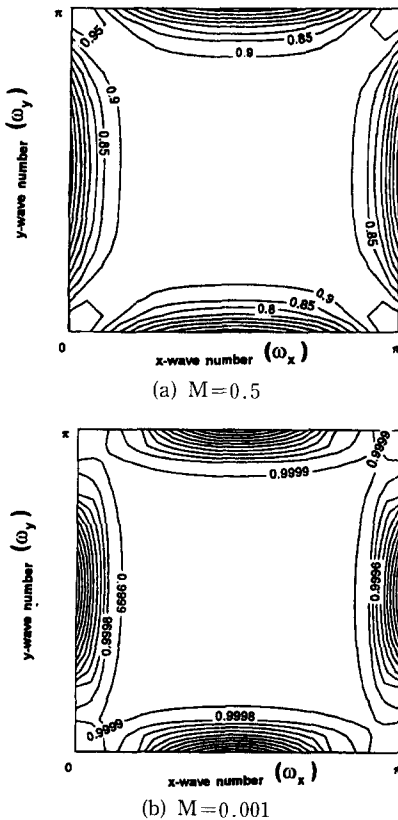


Fig. 1 Stability results for standard Euler equation at $M=0.5, 0.001, CFC=5.0$

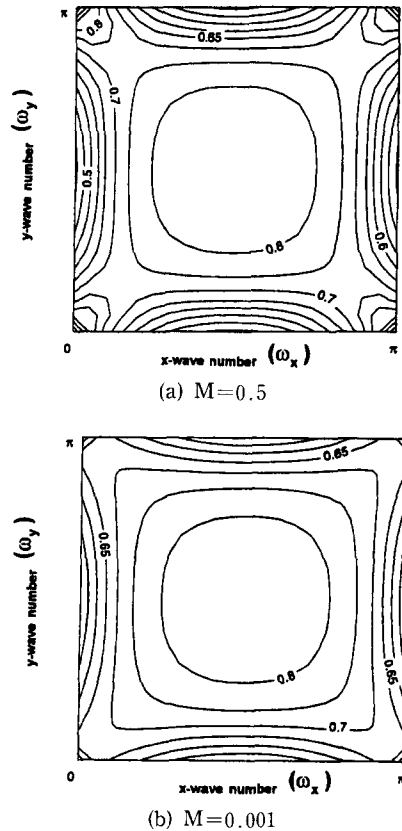


Fig. 2 Stability results for preconditioned Euler equation using dual time-stepping procedure at $M=0.5, 0.001, CFC=5.0$

서 Euler 방정식의 $M=0.5$ 경우 보다 빠른 수렴을 얻을 수 있음을 알 수 있으며, 특히 저속의 유동장 계산에서는 수렴특성이 크게 개선되는 것을 볼 수 있다. 점성을 포함하는 경우에 대하여도 안정성 해석을 수행하였으며 그 결과는 모든 Re수에 대하여 안정하며, 또한 위의 비점성결과와 유사하게 나타나므로 점성계산에 대하여도 효율적인 계산을 수행할 수 있음을 알 수 있었다.

4. 경계조건

본 연구에서는 특성곡선법 (method of characteristics)을 이용하는 경계조건⁽¹⁵⁾을 유입구와 유출구에 적용하였다. 이 방법을 사용하는 경우, preconditioning이 적용된 Navier-Stokes 방정식에서 나타나는 가상음파의 전파특성을 반영하기 위하여 preconditioning matrix가 이 경계조건 수행시 반드시 포함되어야 한다. 특성곡선법을 적용하는 절차는 다음과 같다. 먼저 자코비안 $\Gamma^{-1}A$ (또는 $\Gamma^{-1}B$)의 left eigenvector로 구성되는 행렬 M^{-1} 를 식 (13)에 곱함으로써 특성방정식들을 구한다. 다음으로 특정한 경계지역에서 사용 가능한 특성방정식만을 추출하기 위하여 선택행렬 L 을 특성방정식들에 곱한다. 이 과정은 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} LM^{-1} \left[S + \Delta t \frac{\partial A_v}{\partial x} \right] S^{-1} \\ \cdot \left[S + \Delta t \left(\frac{\partial B_v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \Delta Q_v \\ = -\Delta t LM^{-1} R \end{aligned} \quad (19)$$

위 식에서 선택행렬 L 은 경계조건에 따라 달라진다. 아음속유동 유입구인 경우, $L = \text{Diag}(0, 0, 0, 1)$ 을 사용한다. 이 식중 0이 아닌 요소는 $(u-c')$ 에 대응하는 특성방정식이 사용됨을 뜻하며, 0 요소에 대하여는 경계에 맞는 물리적으로 의미있는 조건이 추가되어야 한다. 본 연구에서는 대부분의 경우 정체압력, 정체온도, 유동각도 (v/u) 조건을 사용하였다. 유출구에서도 역시 위와 같은 방법을 사용한다. 다만 아음속유동인 경우 선택행렬 $L = \text{diag}(1, 1, 1, 0)$ 가 되며, 이 중 0인 요소에 대하여는 일정 압력조건을 부과하였다. 고체 벽면에서의 경계조건으로는 점착 조건 $(u=v=0)$, 수직 운동량 방정식 (normal momentum equation), 일정 온도 또는 단열조건이 문제에 따라 사용되었으며,

대칭축은 대칭조건을 감안하여 경계조건을 대신하여 일반적인 계산영역점으로 처리하였다.

5. 계산결과 및 검토

위와 같이 개발한 비정상해석 기법을 사용하여 다양한 실제 응용분야의 해석을 수행하였다. 고려한 유동장은 4가지로서 진동하는 평판 주위의 유동, 비정상 캐비티 유동, 관내부의 맥동하는 유동, 열원이 존재하는 경우의 원형 실린더 후류에서의 vortex shedding이며, 각각의 경우에 본 방법을 검증하기 위하여 그 수치결과를 이론해 및 다른 수치 해석 결과 또는 실험결과 등과 비교하였다. 또한 이들 계산에 대하여 수렴특성을 조사하였으며, 대부분의 경우 가상시간항의 반복 횟수는 각 실제시간항에 대하여 약 3~4 order의 $\Delta Q_v/Q_v$ 가 떨어지는 것을 수렴기준으로 하여 약 15~40번 정도가 필요하였으며, 따라서 비교적 빠른 수렴속도를 관찰할 수 있었다. 가상시간항의 수렴조건을 4 order 이하로 떨어뜨리는 것은 해에 거의 영향을 미치지 않는 것을 볼 수 있었다.

5.1 진동하는 평판위의 유동

비정상유동 해석 코드의 첫 번째 검증 대상으로 Stoke의 2차 문제로 알려져 있는 무한 길이의 진동하는 평판 위의 유동장을 고려하였다. 본 문제는 평판의 운동으로 인하여 평판 주위에 진동하는 유동장을 형성하며 이론적 해⁽¹⁶⁾를 갖고 있다. 평판은 x 축에 평행하게 위치하며 그 운동속도는 다음과 같다.

$$u = u_0 \cos(\omega t) \quad (20)$$

이와 같은 평판 운동에 의해 형성되는 유동장에 대한 속도분포의 이론해는 다음과 같다.

$$u = u_0 \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \quad (21)$$

본 유동장의 속도분포는 x 위치에 독립적이므로 실제로는 1차원 유동으로 간주될 수 있다.

본 계산에 사용한 격자계는 10×51 이며, y 방향의 길이는 특성길이 $\sqrt{\omega/2\nu}$ 로 무차원화 하였다. 무한대 길이의 평판은 양 끝단 x 경계선에서 같은 해를 가지도록 주기조건 (periodic condition)을 부과함으로써 얻을 수 있으며, 벽면에서는 점착조건, 바깥쪽 y 경계에서는 유동속도를 0으로 가정하였

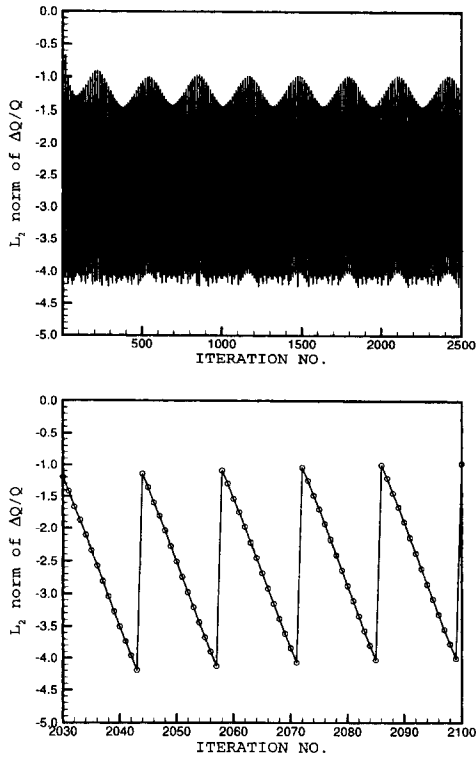


Fig. 3 Overall convergence histories for flow over oscillating flat plate

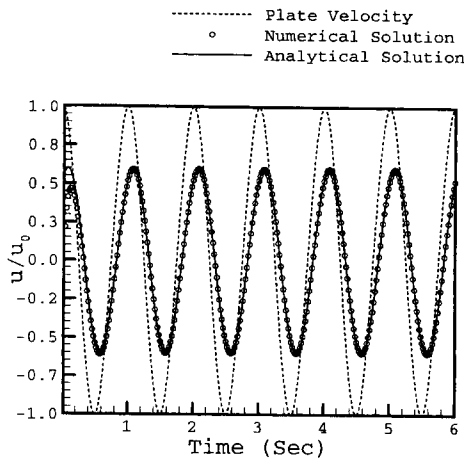


Fig. 4 Time history of u-velocity at $y=0.5$

다. 본 계산에서 바깥쪽 경계는 u 속도가 충분히 작아 위의 farfield 조건을 만족할 수 있도록 $y=10$ 에 위치하였다. 또한 이론해의 계산을 간편하게 하기 위하여 각속도 $\omega=2\pi$, 동점성계수 $\nu=\pi$ 를 사용하여 특성길이 $\sqrt{\omega/2\nu}$ 를 1로 하였다. 이와 같은

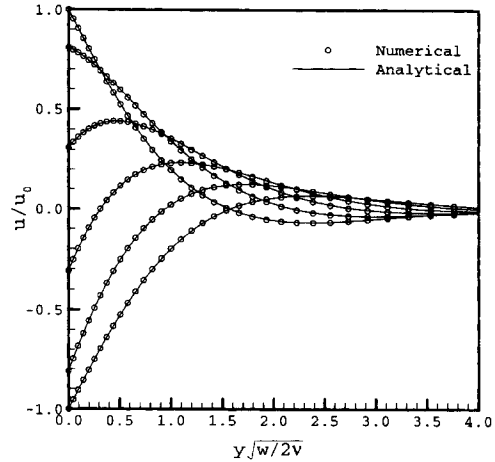


Fig. 5 Solution to Stokes' second problem, u velocity, first half of a cycle, $Re=1/\pi$, $\omega=2\pi$

조건에서 Re 수는 $1/\pi$ 이다. 계산시 각 사이클은 정확도를 높이기 위하여 50 step으로 구분하였으며, 이 때 실제시간 간격은 0.02초이다. Fig. 3은 semi-log 선도에서의 수렴특성 곡선으로서 각 실제시간 항에서의 반복횟수를 보여준다. 각 실제시간에 대하여 약 3 order의 $\Delta Q_v/Q_v$ 의 수렴을 얻기 위하여 약 14번의 반복횟수가 필요함을 볼 수 있다. Fig. 4는 $y=0.5$ 위치에서의 시간에 따른 u 속도변화를 보여주며 약 1 초 후 주기적 형태가 나타남을 볼 수 있다. 또한 같은 그림에 속도에 대한 수치결과를 이론해와 비교하였으며 서로 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 5에서는 Fig. 4의 주기 사이클 중 1/2 사이클에 대한 평균 주위의 속도분포를 이론해와 비교하였으며 역시 서로 매우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

5.2 비정상 캐비티유동

본 연구에서는 2가지 형태의 덮개운동에 따른 정방형 캐비티내의 비정상유동을 고려하였다. 첫번째 경우로서는 캐비티의 덮개가 갑자기 운동을 시작하는 경우, 캐비티 내부에서 발달하는 유동을 계산하였다. 본 유동장은 초기에는 덮개의 갑작스런 운동에 따라 급격하게 변화하지만 유동이 발달함에 따라 시간에 따른 유동의 변화는 거의 없어지며 정상 상태에 도달하게 된다. 본 계산에 사용한 격자재는 51×51 이며 격자는 벽면 주위에 밀집되어 있다. 덮개속도와 캐비티 길이를 기준한 Re 수는 400이며 Mach수는 10^{-3} 이다. Fig. 6은 본 계산의 수렴특성

을 보여준다. 반복과정 중 초기에는 각 실제시간항에서 $\Delta Q_v/Q_v$ 가 5×10^{-5} 으로 수렴하기 위하여 약 100~200번의 반복이 필요하지만 해가 발달함에 따라 반복횟수는 급격히 줄어들어 정상상태에 도달할

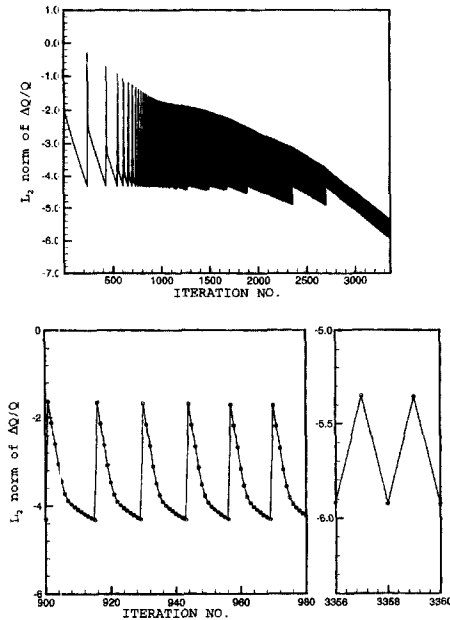


Fig. 6 Overall convergence histories for driven cavity flow with impulsively started lid, Re=400

때는 1번의 반복횟수만이 필요한 것을 볼 수 있다. Fig. 7은 여러 무차원 시간에서 캐비티 내부의 유선을 보여주며, 약 $T=36$ 에서 유동이 정상상태에 도달함을 볼 수 있다. Fig. 8은 본 계산의 검증을 위하여 항력계수와 중심선에서의 속도분포를 Soh와 Goodrich⁽¹⁷⁾ 및 Ghia 등⁽¹⁸⁾의 계산결과와 비교한 그림으로서 서로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

두번째 경우는 덮개가 x 방향으로 진동운동을 하는 경우 발달하는 캐비티 내부의 유동을 고려하였다. 본 계산에 사용한 덮개의 운동속도는 $u = u_0 \cos(\omega t)$ 이며, 최대속도를 기준한 Re수는 첫번째 경우와 동일하다. 계산결과와 정확도를 위하여 각 사이클에 대하여 약 40개의 시간간격을 사용하였으며, 시간에 대한 적분은 유동장에 주기운동이 관찰 될 때까지 수행하였다. 본 계산에서는 각 실제시간항에서 약 3 order의 $\Delta Q_v/Q_v$ 가 떨어지는 것을 얻기 위하여 약 35번의 반복횟수가 소요되었으며, 주기운동에 도달하기까지는 약 8 사이클이 필요하였다. Fig. 9는 유동장이 주기상태에 도달하였을 때 1/2 주기에 대하여 여러 시간에서의 유선을 보여준다. 나머지 1/2 주기에 대한 해는 앞의 주기와 대칭되므로 생략하였다. Fig. 10에서는 시간에 따른 덮개에서의 항력계수를 Soh와 Goodrich⁽¹⁷⁾의 계산결과와 비교하였으며, 역시 매우 잘 일치하고 있음

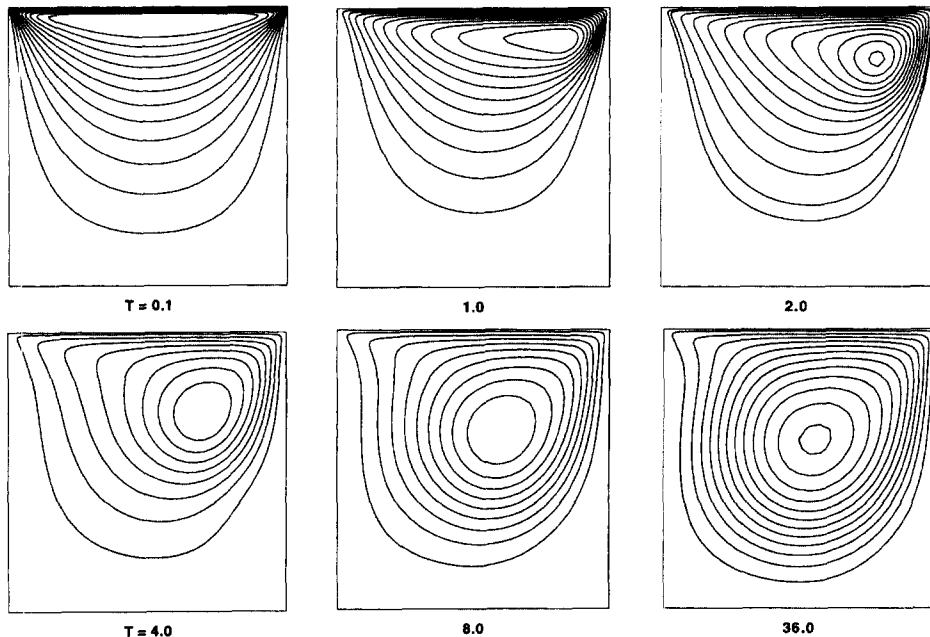


Fig. 7 Time history of streamfunction contours with impulsively started lid, Re=400

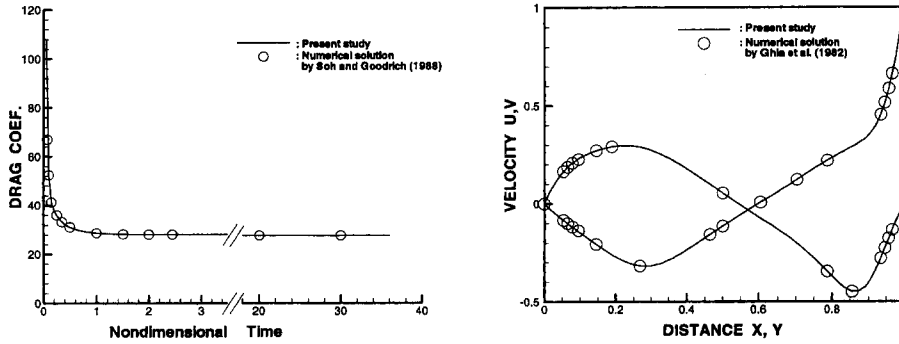


Fig. 8 Time history of drag force and centerline velocity profiles, Re=400

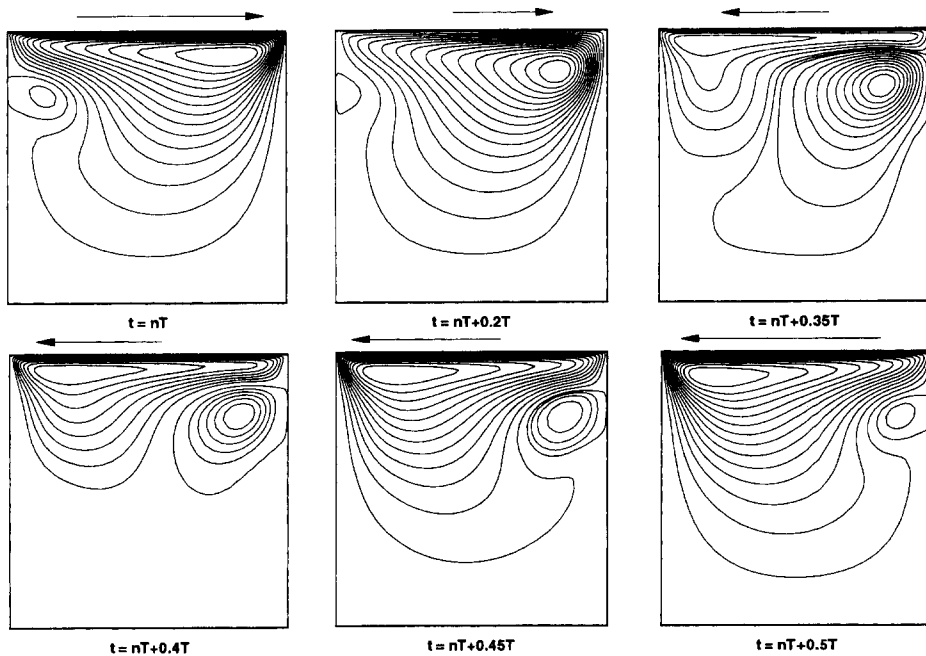


Fig. 9 Time history of streamfunction contours with oscillating lid, Re=400

을 볼 수 있다.

5.3 채널 내부의 맥동하는 유동(Pulsatile Channel Flow)

비정상유동장 해석 코드의 세번째 검증 대상으로 2차원 채널 내부의 맥동하는 유동장을 고려하였다. 본 유동은 평균입구속도(또는 질량)가 주기적으로 변화하는 완전 전개된 유동이며, 계산에 사용한 파동형의 평균입구속도 분포는 다음과 같다.

$$U(t) = U_s \text{ if } 0 \leq \frac{t}{T_p} \leq \frac{1}{2}$$

$$U(t) = U_s - U_p \sin\left(2\pi \frac{t}{T_p}\right) \text{ if } \frac{1}{2} \leq \frac{t}{T_p} \leq 1 \quad (22)$$

여기서 주기 $T_p = 2\pi$ 이며, $U_s = 1$ 및 $U_p = 1.23$ 은 각각 평균입구속도의 정상상태 및 진동하는 성분이다. 본 계산에서 고려한 형상은 2차원 채널이며 무차원화된 높이 h 와 길이 L 은 각각 1이다. 사용한 Re수는 채널높이 h 및 입구속도 U_s 를 기준으로 132이며, 이때의 Mach수는 약 10^{-3} 이다. 본 문제에 대하여도 이론해⁽¹⁹⁾가 존재하며 이는 다음 식의 실수 부분(real part)과 같다.

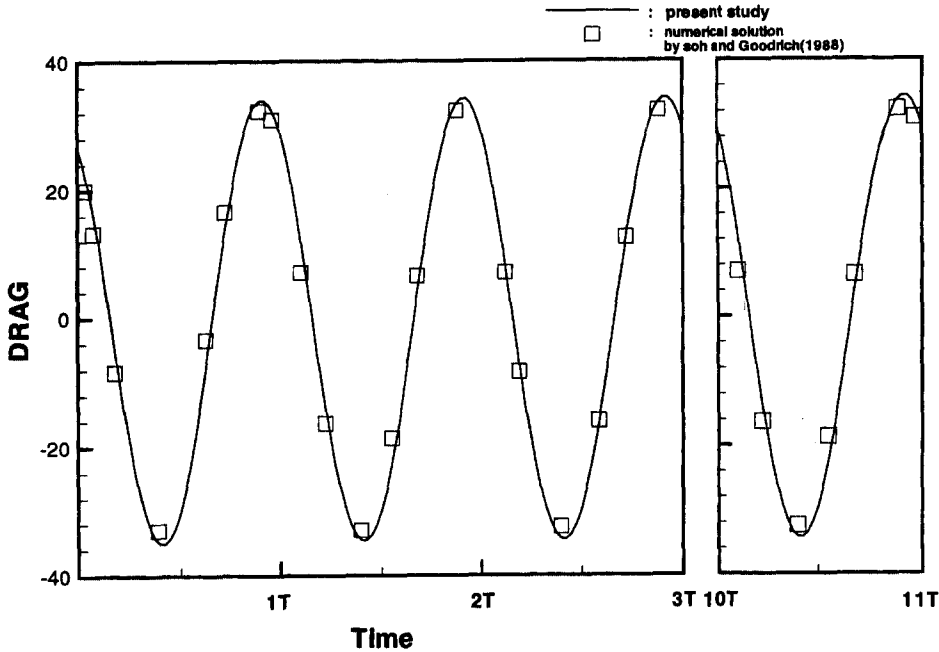


Fig. 10 Comparison of time history of drag force with numerical solutions by Soh and Goodrich

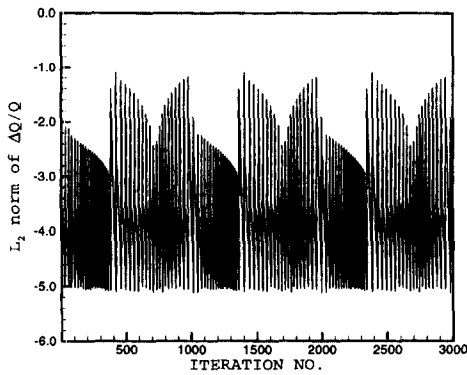


Fig. 11 Overall convergence history of pulsatile channel flow, Re=132

$$u(y, t) = 6M_0y(1-y) + \sum M_n A_n(y) \exp(-int) \quad (23)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이며,

$$A_n(y) = \left(1 - \frac{\cosh \alpha(y-1/2)}{\cosh \alpha/2} \right) / \left(1 - \frac{2\sinh \alpha/2}{\alpha \cosh \alpha/2} \right) \quad (24)$$

여기서,

$$\alpha = k_n(i-1) ; k_n = \sqrt{n \text{ Re}/2}$$

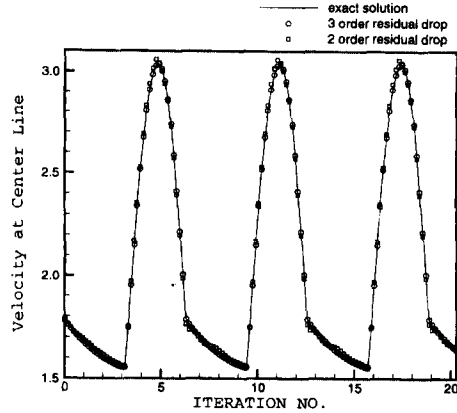


Fig. 12 Comparison of time history of centerline u-velocity with exact solution

$$M_0 = U_s + \frac{U_p}{\pi} ; M_1 = -i \frac{U_p}{2}$$

$$M_n = -\frac{2}{n^2-1} \frac{U_p}{\pi} \text{ for } n=2, 4, 6, \dots$$

본 계산에 사용한 격자계는 H형의 31x25이며 경계층을 포착하기 위하여 격자를 벽면쪽에 밀집시켰으며, 유동방향으로는 일정간격의 격자를 사용하였다. Fig. 11은 본 계산에 대한 수렴특성 곡선으로서 각 실제시간항에서 약 3~4 order의 $\Delta Q_v/Q_v$ 가

떨어지는 것을 볼 수 있으며, 이와 같은 수렴을 위하여 필요한 반복횟수는 약 5~30번으로 시간에 따라 변화하는 것을 볼 수 있었다. Fig. 12는 시간에 따른 채널 중심선의 u 속도를 이론해와 비교한 그림이다. 본 그림에서는 수렴특성에 따른 해의 정확도를 조사하기 위하여 $\Delta Q_v/Q_v$ 가 2 order와 3 order 수렴하는 2가지 경우를 비교하였으며, 2 order 수렴의 경우 해가 전 범위에서 약 2~3%의 오차가 발생하는 것을 볼 수 있는 반면, 3 order 수렴의 경우 이론해와 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 이는 정확한 해를 구하기 위하여는 적어도 3 order의 수렴이 필요함을 말해준다. Fig. 13은 3 order 수렴의 경우, 채널의 1/2 계산영역에서 시간에 따른 축방향 속도분포 변화를 이론해와 비교한 그림이며 역시 매우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

5.4 원형 실린더 후류의 vortex shedding

비정상유동장 해석 코드의 마지막 검증 대상으로서 비압축성 및 저속의 압축성 유동장에서의 원형 실린더 후류의 비정상유동을 고려하였다. 비압축성 유동장에서의 원형 실린더 후류의 유동장은 Re수에 따라 변화하는 것으로 알려져 있다. Re수 범위 $6 < Re < 40$ 에서는 후류에 정상상태의 대칭형의 vortex pair가 발생하고, 그 이상의 Re수에 대하여는 vortex shedding에 의하여 특성이 지는 비정상유동이 된다.^(20,21) 본 연구에서는 이와 같은 비정상유동장을 해석하기 위하여 Re수 100과 140의 경우를 고려하였으며, 사용한 격자계는 210x130의

O 격자계이다.

먼저 비압축성 유동장에서의 강제대류에 대한 유동현상을 검토하였다. 본 계산에서 사용한 자유유동장의 Mach수는 약 10^{-5} 이며, 유동장의 밀도 변

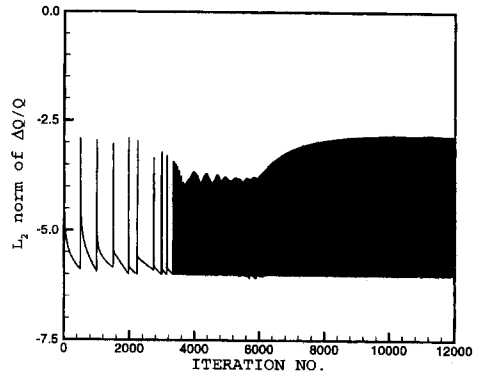


Fig. 14 Overall convergence history of unsteady flow over a cylinder, Re=100

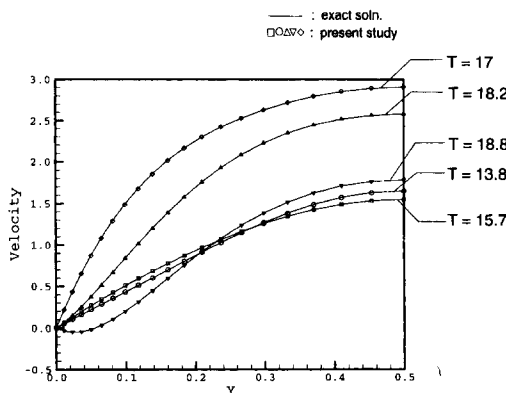


Fig. 13 Computed velocity profile near outlet for pulsatile channel flow(solid lines are exact solution)

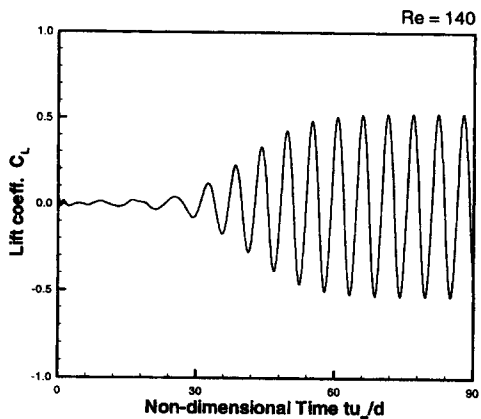
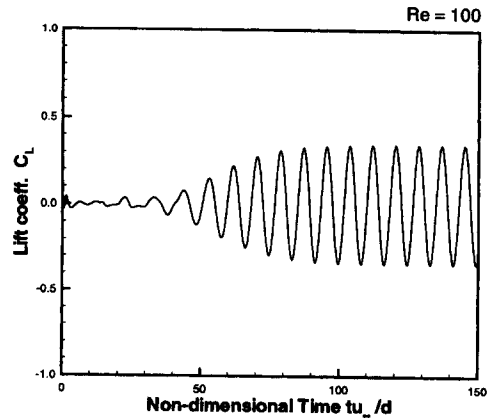


Fig. 15 Time history of lift coefficients at Re=100, 140

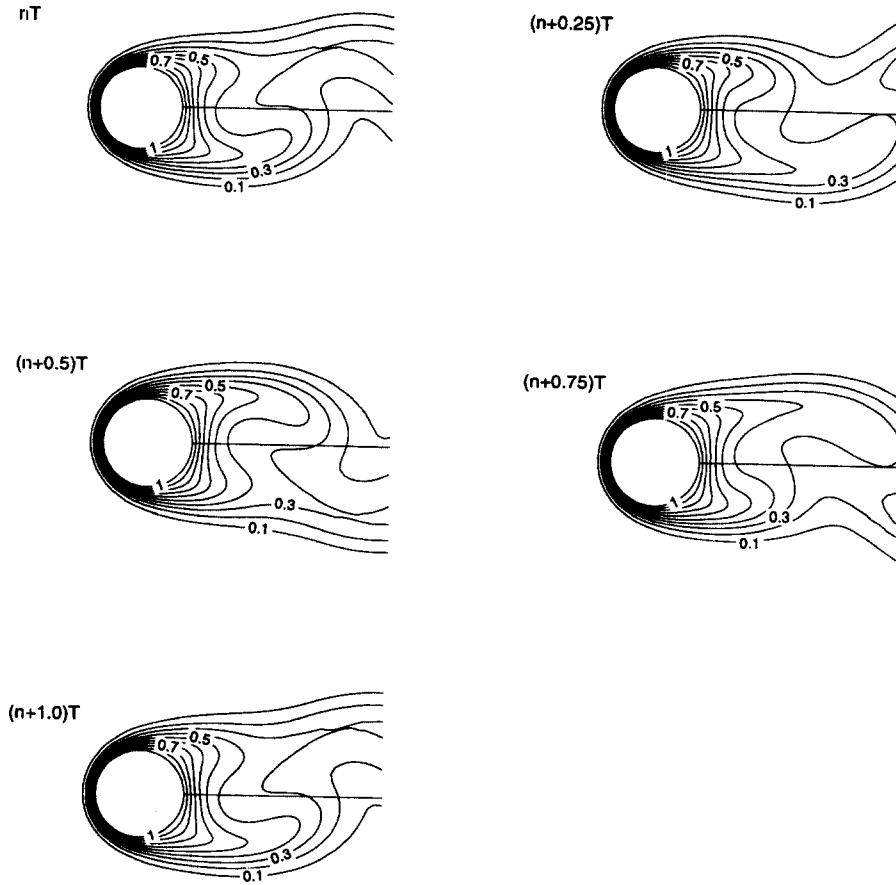


Fig. 16 Non-dimensional temperature contour in a cycle at $Re=100$, $T_{wall}=305K$

화를 무시할 수 있도록 실린더와 주위와의 온도차를 작게 설정하였다 ($T_{\infty}=300\text{ }^{\circ}K$, $T_{wall}=305\text{ }^{\circ}K$). Fig. 14는 semi-log선도에서 Re 수 100에 대한 수렴 특성을 보여주고 있다. 각 실제 시간에 대하여 약 3 order의 수렴을 얻기 위하여는 초기에는 약 200~300번의 비교적 많은 반복횟수가 필요하나, 유동이 발달함에 따라 약 15번의 반복횟수가 소요됨을 볼 수 있었다. Fig. 15와 Fig. 16은 각각 Re 수 100과 140에서의 양력계수의 시간에 따른 변화와 한 주기 중 실린더 주위의 무차원 온도분포를 보여준다. 이와 같은 수치해석 결과의 검증을 위하여, Fig. 17에 Re 수에 따른 Strouhl수를 다른 실험 및 수치해석 결과⁽²²⁻²⁴⁾와 비교하였다. 각각의 경우 비교적 잘 일치함을 볼 수 있다.

두 번째로 실린더를 가열하는 경우 벽면온도가 shedding cycle에 미치는 영향을 조사하였다. 고려한 Mach수와 Re 수는 위의 경우와 동일하며, 벽면

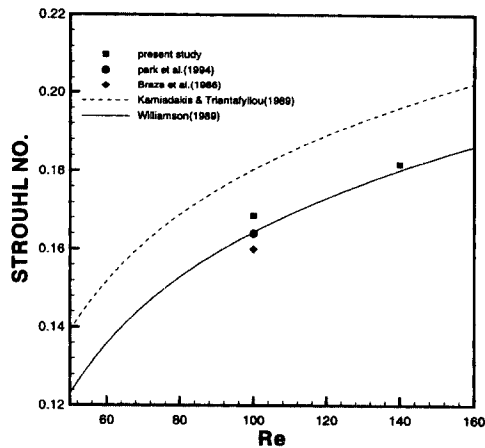


Fig. 17 Comparison of Strouhal number with numerical solution and experimental results at $Re = 100, 140$

의 온도범위는 $300\text{ }^{\circ}K < T_{wall} < 1000\text{ }^{\circ}K$ 이다. 그리고

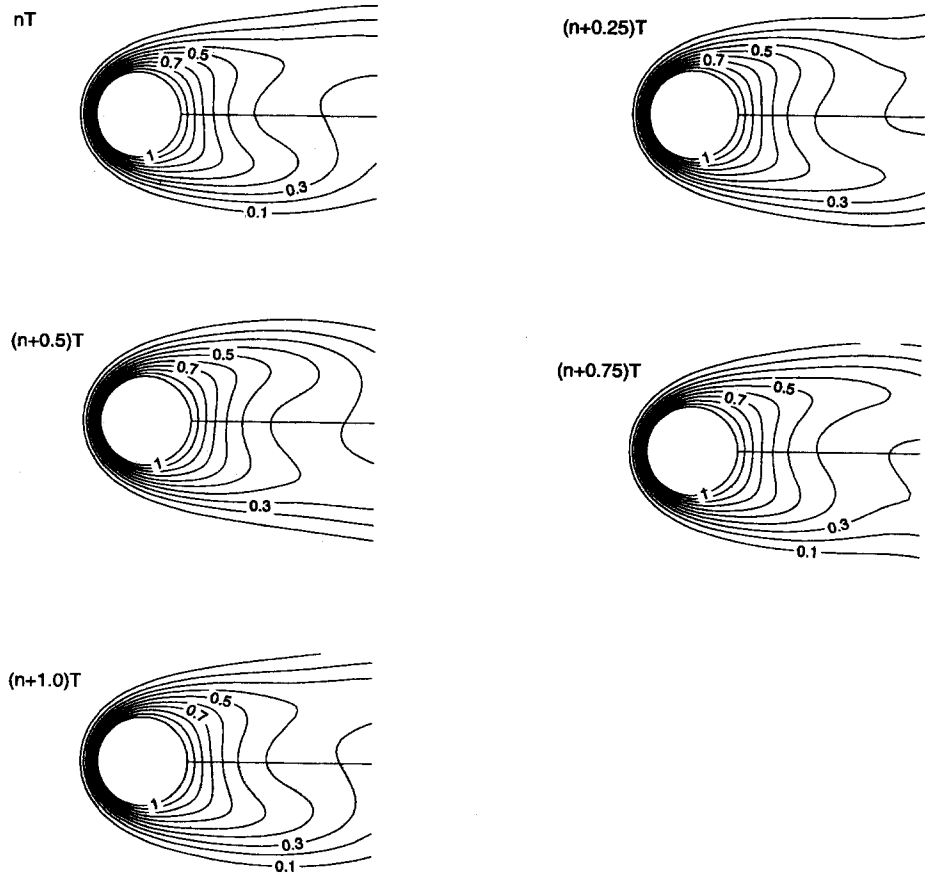


Fig. 18 Non-dimensional temperature contour in a cycle at $Re=100$, $T_{wall}=600K$

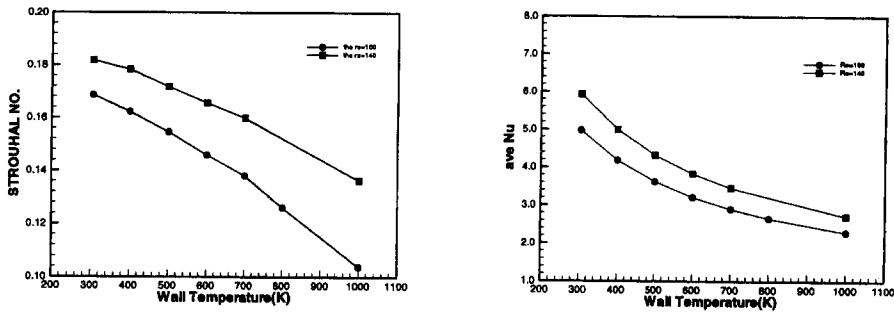


Fig. 19 Strouhal number and average Nusselt number for various wall temperature at $Re=100, 140$

자유유동장의 온도는 300 °K이다. 이와 같은 유동장에서는 실린더 벽면온도와 주위의 온도차로 인하여 큰 밀도 변화가 생기므로, 반드시 압축성 지배 방정식을 사용하여 계산하여야 한다. Fig. 18은 $T_{wall}=600$ °K에서 한 주기에 대한 실린더 주위의 무차원 온도분포를 보여주고 있다. 비압축성유동 결과인 Fig. 16과 비교하여 vortex 강도가 감소되는

것을 볼 수 있으며, 이는 벽면온도의 증가에 따라 유동장내의 확산의 영향이 증가하여 유동이 안정화 되기 때문이다. Fig. 19는 실린더 벽면온도에 따른 Strouhal수 및 Nu수의 변화를 보여주고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 이중 시간전진법과 preconditioning 방법을 이용하여 저속의 압축성유동에 대한 비정상 해석기법을 개발하였다. Preconditioning이 적용된 Navier-Stokes 지배방정식은 저속의 압축성유동장에 대한 정상상태 해석에 있어서는 효율적인 계산이 가능하나, 지배방정식의 시간항의 변경으로 인하여 비정상해석에 적용할 수 없다. 이와 같은 단점을 보완하기 위하여, 본 연구에서는 이중 시간전진법을 이용하여 가상시간항을 도입하였으며, 이의 내부 반복에 의한 수렴을 통하여 실제시간에서의 비정상해를 구하였다. 본 방법은 먼저 von Neumann의 안정성해석을 통하여 그 수렴특성을 검토하였으며, 그 결과 저속의 아음속 유동영역에서는 기존의 시간전진법에 비해 수렴속도가 크게 개선됨을 볼 수 있었다. 본 방법의 효율성을 검증하기 위하여 진동하는 평판 위의 유동, 비정상 캐비티유동, 채널 내부의 맥동하는 유동, 원형실린더 후류의 vortex shedding 등의 다양한 유동장에 대한 계산을 수행하였다. 이들 계산에서 가상시간항의 수렴특성은 대부분 약 3~4 order의 수렴에 약 10~40번의 반복횟수가 필요하였으며, 따라서 비교적 빠른 수렴속도를 관찰할 수 있었으며, 계산 결과 역시 이론해 및 실험결과와 비교하여 잘 일치하였다. 또한 이들 계산에서 정확한 비정상해를 구하기 위하여는 가상시간항의 반복에서 적어도 3 order 이상의 수렴이 필요한 것을 볼 수 있었다.

후 기

본 연구는 1996년도 한국과학재단의 핵심연구과제의 연구비 지원으로 수행되었기에 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Beam, R. M. and Warming, R. F., 1976, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form," *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87~110.
- (2) Briley, W. R. and McDonald, H., 1977, "Solution of the Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations by a Generalized Implicit Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 24, pp. 372~397.
- (3) Turkel, E., 1987, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, pp. 277~298.
- (4) Briley, W. R. and McDonald, H. and Shamroth, S. J., 1983, "A Low Mach Number Euler Formulation and Application to Time-Iterative LBI Schemes," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 10, pp. 1467~1469.
- (5) Van Leer, B., Lee, W. T. and Roe, P., 1991, "Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equations," *AIAA paper* 91-1552.
- (6) Choi, Y. H. and Merkle, C. L., 1993, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 207~223.
- (7) 최윤희, 1994, "Preconditioning을 이용한 전속도 영역에 대한 압축성유체 유동 해석," 대한기계학회논문집, 제18권, 제7호, pp. 1840~1850.
- (8) Venkateswaran, S., Weiss, J. M., Merkle, C. L. and Choi, Y. H., 1992, "Propulsion Related Flowfields using the Preconditioned Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 92-3437.
- (9) Weiss, J. M. and Merkle, C. L., 1991, "Numerical Investigation of Reacting Flowfields in Low Thrust Rocket Engine Combustors," *AIAA* 91-2080.
- (10) Pletcher, R. H. and Chen, K. H., 1993, "On Solving the Compressible Navier Stokes Equations for Unsteady Flows at Very Low Mach Numbers," *AIAA Paper* 93-3368-CP.
- (11) Merkle, C. L. and Athavale, M., 1987, "A Time Accurate Unsteady Incompressible Algorithm Based on Artificial Compressibility," *AIAA Paper* 87-1137.
- (12) Rogers, S. E., Kwak, D. and Kiris, C., 1989, "Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations for Steady State and Time Dependent Problems," *AIAA Paper*

- 89-0463.
- (13) Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E., 1981, "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time Stepping Schemes," *AIAA Paper* 81-1259.
- (14) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., 1984, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York.
- (15) Chakravathy, S. R., 1983, "Euler Equations, Implicit Schemes, and Implicit Boundary Conditions," *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1565~1571.
- (16) White, F. M., 1974, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (17) Soh, W. Y. and Goodrich, J. W., 1988, "Unsteady Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp. 113~134.
- (18) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High Re solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (19) Rosenfeld, M., 1993, "Validation of Numerical Simulation of Incompressible Pulsatile Flow in a Constricted Channel," *Computers and Fluids*, Vol. 22, pp. 139~156.
- (20) 강신형, 홍기혁, 고상근, 1993, "물성치의 변화를 고려한 균일유동 중에 있는 원형 실린더 주위의 층류 열전달," 대한기계학회 논문집, 제17권, 제6호, pp. 1584~1595.
- (21) 부정숙, 이종춘, 1993, "가열된 회전원주를 지나는 정상유동 및 열전달해석," 대한기계학회 논문집, 제17권, 제12호, pp. 3135~3147.
- (22) Braza, M., Chassaing, P. and Ha Minh, H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 165, pp. 79~130.
- (23) Karniadakis, G. E. and Triantafyllou, G. S., 1989, "Frequency Selection and Asymptotic States in Laminar Wakes," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 199, pp. 441~469.
- (24) Park, D. S., Ladd, D. M. and Hendricks, E. W., 1994, "Feedback Control of von Karman Vortex Shedding behind a Circular Cylinder at Low Reynolds Number," *Physics of Fluids*, Vol. 6, pp. 2390~2405.