

매개변수 가진 시스템의 안정성 해석을 위한 무한행렬법

현 상 학* · 유 흥 희**

(1997년 10월 10일 접수)

Infinite Determinant Method for Stability Analysis of Parametrically Excited Systems

Sang Hak Hyun and Hong Hee Yoo

Key Words : Infinite Determinant Method(무한행렬법), Stability Analysis(안정성 해석), Parametrically Excited Systems(매개변수 가진 시스템), Principal Resonance(주공진), Combination Resonance(복합공진), Characteristic Multipliers(특성배수)

Abstract

In this paper, an infinite determinant method is presented for stability analysis of parametrically excited systems. Unstable regions of the combination parametric resonance as well as principal resonance can be identified with the method. A numerical problem of relatively large amplitude of excitation is solved, and the results of the presented method are compared to those of the multiple scales perturbation method. It is found that the presented method obtains more accurate transition curves which divide stable and unstable regions in the parameter plane than those of the multiple scales perturbation method.

1. 서 론

일반적인 구조진동 시스템과 같이 그 지배방정식 계수가 상수로 주어지는 시스템을 자율 시스템(autonomous systems)이라 부른다. 이에 반하여 비자율 시스템(nonautonomous systems)은 지배방정식의 계수가 일정하지 않고 시간에 따라 변화하는 시스템을 말한다. 이러한 비자율 시스템들은 실제의 공학적 예제들에서 종종 나타나는데 그 동적 반응의 안정성을 분석하는 것은 많은 연구자들의 관심을 끌어 왔다. 특히 계수가 주기 함수인 경우에 대해서는 수학적으로도 상당한 연구가 이루어져 왔으며, 계수가 대표적 주기함수인 조화함수로 주

어지는 경우는 매개변수 가진 시스템이라 불리운다.

다자유도를 갖는 매개변수 가진 시스템(parametrically excited systems)의 지배방정식은 일반적으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n + \epsilon \cos \omega t \sum_{m=1}^N f_{nm} u_m = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

여기서, ω_n 은 매개변수 가짐이 없을 때 시스템의 n 번째 고유진동수이다. 이 식처럼 계수중의 일부가 주기함수로 나타나는 미분방정식은 일반적으로 매개변수들의 (ϵ, ω) 조합에 따라 그 해의 발산과 수렴이 결정된다. 통상적으로 가진 주파수 ω 가, 고유진동수들의 2배 근처에서 주공진(principal resonance)이 발생하고, 시스템 고유진동수들의 합 또는 차 ($\omega_i \pm \omega_j$) 근처에서 복합공진(combination

*회원, 한양대학교 대학원

**회원, 한양대학교 기계공학부

resonance)이 발생하는 것으로 알려져 있다. 매개변수 가진 시스템에 관한 이론적 연구는 오래전부터 이루어져 왔으며,^(6,7) 관련 문헌들에 따르면 적용 예제도 여러가지 공학적 실험들에서 찾아볼 수가 있는데, 최근에는 동적운동을 하는 구조물들과 연관된 연구결과들이^(7,8) 등장하고 있다.

동적 안정성 해석이란 식 (1)에 나타나는 두 매개변수들의 (ϵ , ω) 조합에 따른 시스템 반응의 안정성 여부를 판명하는 것인데 그 접근방법은 크게 해석적 방법과 수치적 방법으로 구분될 수 있다. 해석적 방법은 거시적인 해법으로 안정과 불안정 영역의 경계선상에 존재하는 전이곡선(transition curves)을 해석적인 근사해를 이용하여 구하는 방법이다. 이에 반하여 수치적인 방법은 미시적인 해법으로 매개변수의 조합이 결정되면 직접적인 수치적분을 통해서 해의 발산여부를 검증하는 방법으로^(9,10) 해석적 방법에 비해 그 적용이 간단하나 안정성 판별을 위한 매개변수 평면도를 구하기 위해서는, 수없이 많은 매개변수 조합들에 대해 수치적분을 수행해야 하기 때문에, 연산시간이 매우 오래 걸리고 안정성 영역 경계의 정확도가 필연적으로 항상 수치해석 방법의 정확도에 지배되는 단점이 있다. 따라서 정확한 결과를 얻기 위해서는 허용 오차를 매우 작게하여 수치적분을 수행해야 하며, 이는 또 다시 많은 시간이 필요하게 되는 이유가 된다.

대표적인 해석적 방법으로는 섭동법(perturbation method)과 푸리에 급수(Fourier series)를 이용한 근사화된 무한행렬법(infinite determinant method)이 있다. 이들 중 무한행렬법은 단순한 1자유도의 경우에 대해서는 현재 일반적인 이론이 정립되어 있으나 다자유도 시스템에 대해서는 주공진에 한해서 한정적으로 그 이론이 적용되어 왔다.^(11,12) 이와 반면에 섭동법은 주공진과 복합공진의 두 경우 모두 적용이 가능하다는⁽¹³⁾ 장점을 지니나 가진 진폭의 크기인 ϵ 이 커지면 그 해석결과가 부정확해진다는 단점을 갖고 있다. 또한 계수가 단순한 조화함수가 (식 (1)과 같이) 아닌 일반 주기함수이면 그 근사해를 구하기가 쉽지 않다. 이러한 섭동법에도 여러 가지 방법이 존재하는데 대표적인 방법으로 다중스케일 섭동법(multiple scale perturbation method)이^(14~16) 현재 널리 쓰이고 있다.

본 논문에서는 기존의 무한행렬법을 개선하여 다자유도 시스템의 주공진 및 복합공진 영역의 안정

성 해석을 수행하기 위한 새로운 방법이 제시되었으며, 이를 적용해 실제 예제의 동적 안정성 해석을 수행하였다. 또한 이 해석결과들의 정확성을 검증하기 위하여, 다중 스케일 섭동법을 사용하여 구한 해석결과와 비교하였고, 이들을 수치적 직접적분방법을 이용해 구한 엄밀한 결과와 직접 비교하여 본 논문에서 제시한 방법의 우수성을 검증하였다.

2. 이론적 배경

2.1 Floquet 이론

Floquet 이론은 식 (1)의 해를 직접 구하지 않고서도 그 해의 안정성을 판별할 수 있게 해 주는 방법이다. 본 논문에서 제시할 확장된 무한행렬법은 그 기초를 Floquet 이론에 두고 있으며, 이해를 돕기 위해 이에 대한 설명을 먼저 간략히 제시하고자 한다. 계수가 주기함수인 매개변수 가진 시스템을 1계 선형 미분방정식으로 나타내면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+T) = A(t) \quad (2)$$

여기서, 밑줄은 열벡터를 의미하며 A 는 매개변수를 갖는 계수행렬, t 는 시간, 그리고 T 는 주기를 의미한다. Floquet 이론에 의해 식 (2)의 기본행렬(fundamental matrix)은 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR}, \quad Q(t+T) = Q(t) \quad (3)$$

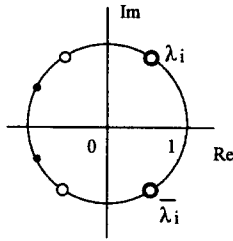
여기서, $Q(t)$ 는 주기행렬이며, R 은 상수행렬을 나타낸다. 또한 식 (2)의 기본해(fundamental solution)는 다음과 같다.

$$\phi^{(i)}(t) = e^{(i\lambda_i)t/T} q^{(i)}(t) \quad (4)$$

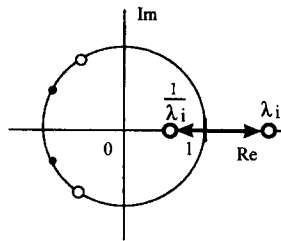
여기서, $\phi^{(i)}$ 는 Φ 의 (i)번째 열벡터이며, $q^{(i)}$ 는 Q 의 (i)번째 열벡터를 나타낸다. 그리고 λ_i 는 e^{tR} 의 특성치(eigenvalue)로서 식 (2)의 특성배수(characteristic multiplier)라 부른다. 식 (3)에서 $t=0$ 을 대입하면 $\Phi(0) = Q(0)$ 이고, $t=T$ 를 대입하면 $Q(T) = Q(0)$ 이므로

$$e^{tR} = \Phi(T)\Phi(0)^{-1} \quad (5)$$

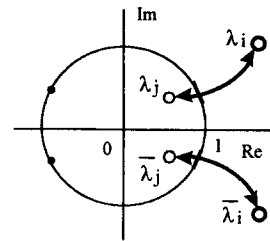
가 된다. 특성배수들을 구하게 되면 식 (4)에 의해 시간이 무한대로 접근할 때 기본해가 발산하는지 여부를 판단할 수 있게 된다. 즉, 식 (4)의 기본해는 특성배수에 따라 다음과 같은 특징이 있다. 첫



(a) All complex characteristic multiplier located in the stable region.



(b) 2 real characteristic multipliers moving from stable to unstable region.



(c) 4 complex characteristic multipliers moving from stable to unstable region.

Fig. 1 Loci of characteristic multipliers.

째로, $q^{(i)}$ 는 계수행렬 A 와 같은 주기를 갖는 주기 함수이기 때문에, 기본해 $\phi^{(i)}$ 의 발산여부는 $e^{\ln \lambda_i t/T}$ 의해 결정된다. 만일 복소수 λ_i 의 크기가 1보다 크면 $\ln \lambda_i$ 는 양의 실수부를 갖게 되어 $\phi^{(i)}$ 는 발산하게 된다. 둘째, λ_i 의 크기가 1이면 $\ln \lambda_i$ 은 순허수가 되어 $\phi^{(i)}$ 는 T 와 $2T$ 사이의 주기를 갖는 주기함수가 되어 발산하지 않는다. 예를 들어, λ_i 가 1일 때는 그 주기가 T , λ_i 가 -1 일 때는 그 주기가 $2T$ 가 된다.

위 과정에서 특성배수들을 구하려면 식 (5)에서 처럼 $\Phi(T)\Phi(0)^{-1}$ 를 알아야 한다. 식 (2)에 대한 해석적인 해는 구할 수 없으므로 $\Phi(T)\Phi(0)^{-1}$ 는 식 (2)를 수치적분해야만 얻을 수 있다. 이러한 수치적분을 피하기 위해 제시되는 방법이 무한행렬법이다. 무한행렬법 이론은 식 (4)가 발산하는 경우와 발산하지 않는 경우의 경계가 되는 특성배수들을 구하는 것으로부터 시작된다. 특성배수들은 시스템 매개변수들의 조합에 바뀔 때 따라 다른 값을 갖게 되므로, 매개변수에 따른 특성배수의 거동을 살펴보면 특성배수들 사이의 관계를 찾을 수 있다.

2.2 매개변수에 따른 특성배수의 거동

N -자유도 시스템인 식 (1)은 $2N$ 개의 특성배수를 갖는데, 복소수 λ_i 가 그 특성배수이면 그 공액복소수 $\bar{\lambda}_i$ 도 또한 특성배수가 된다. 또한 감쇄항이 없는 경우이므로 Jacobi-Liouville 공식에 의해⁽⁶⁾ 항상 다음 제한 조건식을 만족해야 한다.

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{2N} = 1 \tag{6}$$

따라서 매개변수의 변화에 따라 특성배수들은, 위 제한 조건식에 의해 Fig. 1에서와 같이 이동한다. Fig. 1(a)는 매개변수가 변하더라도 N 개의 독립적

인 특성배수들이 단위 원상에서만 움직이고 있을 때를 나타낸다. 즉, 시스템이 안정된 상태를 의미한다. Fig. 1(b)는 한 쌍의 특성배수 ($\lambda_i, \bar{\lambda}_i$)가 단위원을 벗어날 때를 나타낸다. 나머지 특성배수들이 단위원 상에 있고 그들의 곱은 1이므로, 식 (6)를 만족하기 위해서 $\lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$ 이어야 한다. 그러므로 단위원상에서 서로 공액복소수의 관계이다가 이를 벗어나면 실수축 상에서는 서로 역수 관계를 이룬다. Fig. 1(a)와 같은 안정상태에서 불안정상태가 될려면 반드시 λ_i 가 1 또는 -1 인 경계영역을 거쳐야 한다. 이 경우는 앞에서 언급한 것처럼 경계영역에 존재하는 기본해의 주기는 T 또는 $2T$ 이어야 한다. Fig. 1(b)의 경우와 다르게 단위원을 벗어나는 방법으로는 Fig. 1(c)에서와 같은 방법이 있다. 여기서 보여주는 방법은 2쌍의 특성배수들이 동시에 단위원을 벗어나는 경우로, 그들의 모두의 곱은 1이어야 함으로 서로 엇갈려서 역수의 관계를 갖는다. 따라서 실수축상에서 역수가 되는 Fig. 1(b)의 경우와 달리 λ_i 가 허수부를 갖는 복소수가 되며 λ_i 와 λ_j 가 단위원을 벗어나기 위해서는 단위원상을 서로 독립적으로 움직이다 반드시 한 점에서 일치하여야 한다. 이 경우 경계영역에 존재하는 기본해의 주기는 T 와 $2T$ 사이가 된다.

Fig. 1(b)의 경우는 대표적으로 가진주파수가 고유진동수의 2배 근처일 때 발생하는데 이를 주공진(principal resonance)이라 한다. 그리고, Fig. 1(c)의 경우는 가진주파수가 고유진동수들의 합 또는 차 근처에서 대표적으로 발생하며, 복합공진(combination resonance)이라 한다. 본 논문에서는 복합공진의 경계영역에 존재하는 기본해의 주기를 찾아냄으로써 기존의 무한행렬법을 확장하여 적용할 수 있도록 하는 것을 연구의 목표로 하고 있다.

3. 확장된 무한행렬법

3.1 주공진의 경우

식 (1)의 기본해들 중에서 주공진의 경계영역에 존재하는 기본해들의 주기는 $2T$ 또는 T 이므로, 이 해들을 Fourier 급수를 사용하여 나타내면 각각 다음과 같다.

(I-형) 주기 $2T$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t + b_k \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t \right\} \quad (7)$$

(II-형) 주기 T

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega t \quad (8)$$

여기서, a_k 와 b_k 는 상수인 임의의 복소수 벡터이다. 해를 나타내는 식 (7)과 식 (8)을 지배방정식 식 (1)에 대입한 결과식으로부터 $\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t$, $\sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t$, $\cos k \omega t$, $\sin k \omega t$ 의 계수들이 모두 0이면, 모든 시간영역에서 이 해들은 항상 식 (1)을 만족하게된다. 이때 얻어진 식으로부터 Fourier 계수들에 대한 연립방정식을 풀면 해를 얻을 수 있다. 그런데 Fourier 계수들은 무한히 많으므로 이 연립방정식은 무한한 크기를 가지며 따라서 그 명칭을 무한행렬법이라 부른다. 그러나 실제로는 무한한 크기의 방정식을 모두 풀어 해를 구할 수는 없으므로 유한한 Fourier 계수들에 대한 근사적 방정식을 사용하는 것이다. 예를 들어, $\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t$ 경우를 정리하면,

$$\begin{bmatrix} P_1 + \frac{\epsilon}{2}F & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & P_3 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

여기서, F 는 f_{ij} 를 요소로 갖는 행렬이고, P_k 는 대각행렬로 그 대각요소들의 값은 $\omega_i^2 - \left(\frac{k\omega}{2}\right)^2$ 이다. 식 (9)에서 계수 a_k 가 0이 아닌 값을 갖기 위해서는 행렬값(determinant)이 0이어야 하는 조건을 사용하게 된다. 식 (9)로부터 얻어진 행렬값을 Hill의 무한행렬값(Hill's infinite determinant)이라 부른다. 이 무한행렬값을 0으로 하는 식은 매개변

수들에 대한 비선형 방정식이며, 이 식을 만족하는 매개변수들이 존재하게 되면 식 (7), 식 (8)과 같은 기본해가 존재함을 의미한다. 그러므로 이 무한행렬식을 만족하는 매개변수들의 조합을 매개변수 평면상에 나타내면 안정영역과 불안정영역을 구분하는 곡선이 얻어지게 되며, 이를 전이곡선(transition curves)이라 부른다. 다음은 식 (7), 식 (8)에 의해 나타나는 4개의 주 공진 무한행렬식들로 식 (10)은 식 (9)로부터 얻어진 식이고 식 (11), 식 (12), 그리고 식 (13)은 이와 유사한 방법으로 $\sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \omega t$, $\cos k \omega t$, $\sin k \omega t$ 에 대해서 각각 구해진 식들이다.

(I-형) 주기 $2T$

$$\begin{bmatrix} P_1 + \frac{\epsilon}{2}F & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & P_3 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 - \frac{\epsilon}{2}F & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & P_3 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

(II-형) 주기 T

$$\begin{bmatrix} P_0 & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \epsilon F & P_2 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & P_4 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F P_4 & \frac{\epsilon}{2}F & \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & P_6 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

만약 식 (10)~(13)에서 ϵ 이 0라면 식 (10)~(13)으로부터 다음의 관계가 성립하는 것을 쉽게 알 수 있다.

$$[\omega_i^2 - (\frac{k}{2})\omega^2] = 0 \quad (14)$$

따라서 전이곡선이 ω 축상의 $\omega = \frac{2\omega_i}{k}$ ($k=1, 2, \dots$) 점들에서 시작됨을 확인할 수 있다.

3.2 복합공진의 경우

이 경우는 앞의 과정과 동일하지만 경계 영역의 기본해가 갖는 주기가 T 또는 $2T$ 가 되지 않는다는 점이 문제를 더 어렵게 한다. 따라서 이 경우에는 먼저 T 와 $2T$ 사이에 존재하는 주기를 결정해야 한다. Fig. 1(c)에서 경계영역일 때의 λ_i 를 λ^* 라 가정하면 이 때의 기본해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = e^{i\mu^*t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad (15)$$

여기서, μ^* 는 다음 식으로부터 결정되는 값을 갖는다.

$$e^{i\mu^*T} = \lambda^* \quad (16)$$

참고문헌 (6)에서는 식 (15)를 다음 두 식으로 구분해서 사용할 수 있음을 증명하였다.

(I-형)

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [C_{2k-1} \cos((k-\frac{1}{2})\omega + \mu^*)t] \quad (17)$$

(II-형)

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [C_{2k} \cos(k\omega + \mu^*)t] \quad (18)$$

여기서 C_k 는 임의의 실수 벡터이다. 이 기본해들을 식 (1)에 대입한 후에 주 공진시의 무한행렬식을 구하는 과정과 동일한 과정을 사용하여 행렬식을 구하면 그 결과는 다음과 같다.

(I-형)

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ C_{-3} & \frac{\epsilon}{2}F & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & C_{-1} & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & C_1 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}F & C_3 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

(II-형)

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ C_{-2} & \frac{\epsilon}{2}F & 0 \\ \frac{\epsilon}{2}F & C_0 & \frac{\epsilon}{2}F \\ 0 & \frac{\epsilon}{2}F & C_2 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

여기서, C_i 은 대각행렬로 대각요소의 값은 $\omega_i^2 - (\frac{k\omega}{2} + \mu^*)^2$ 이다. 식 (19)와 식 (20)에서 ϵ 이 0이면 행렬식을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\dots [\omega_i^2 - (\frac{k}{2}\omega + \mu^*)^2] [\omega_i^2 - (-\frac{k}{2}\omega + \mu^*)^2] \dots = 0 \quad (21)$$

또는

$$\dots [\omega_j^2 - (\frac{k}{2}\omega + \mu^*)^2] [\omega_j^2 - (-\frac{k}{2}\omega + \mu^*)^2] \dots = 0 \quad (22)$$

여기서, $\mu^* = \frac{\omega_j \pm \omega_i}{2}$ 로 설정하면, $\frac{k}{2}\omega = \frac{\omega_j \mp \omega_i}{2}$ 일 때 위의 두 식을 동시에 만족시킨다. 이는 $\mu^* = \frac{\omega_j - \omega_i}{2}$ 일 때는 $k\omega = \omega_i + \omega_j$ 에서, 그리고 $\mu^* = \frac{\omega_j + \omega_i}{2}$ 일 때는 $k\omega = \omega_j - \omega_i$ 에서 전이곡선이 시작됨을 의미한다. 이는 서론에서 언급된 바와 같이 복합공진이 $\omega = \frac{\omega_j \pm \omega_i}{k}$ 근처에서 발생한다는 것을 의미하는 것이다. 따라서 복합공진이 발생하는 μ^* 값을 가지고 ϵ 값을 변화시켜가며, 식 (19)와 식 (20)에 주어진 식을 만족하는 ω 값을 구하면 복합공진이 발생하는 영역의 전이곡선을 구할 수 있는 것이다.

4. 수치해석

Fig. 2와 같이 기둥(column)의 끝단에 종방향 힘을 시간에 대한 정현함수로 받는 시스템의 다중 스케일 섭동법을 이용한 안정성 해석결과가 참고문헌 (14), (15)에 제시되어 있다. 참고문헌 (14)에서 이 시스템에 대한 지배방정식 유도과정이 자세히 기술되어 있으므로, 본 논문에서는 간단하게 소개하고자 한다. 그림에서 임의점에서의 기둥의 처짐 w 에 대한 선형 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{d^2 w}{dt^2} + P \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (23)$$

여기서, E 는 영의 계수(Young's modulus), I 는 2차면적모멘트, m 은 단위길이당 질량, Ω 는 가진 주파수, 그리고 P 는 가진력의 최대크기를 나타낸다. 다음과 같이 기둥의 처짐 w 를 근사화한다.

$$w = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) q_i(t) \quad (24)$$

여기서, $\psi_i(x)$ 는 굽힘방향 모드함수들을 나타내며 $q_i(t)$ 는 시간에 대한 일반좌표들이고, N 은 일반좌표의 수이다. 일반적 해석결과를 얻기 위하여 다음과 같은 무차원변수 ξ 와 τ 를 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (25)$$

식 (24)와 식 (25)를 식 (23)에 대입하면 다음과

같다.

$$\psi_i(\xi) \frac{d^2 q_i(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial^4 \psi_i(\xi)}{\partial \xi^4} q_i(\tau) + \epsilon \cos \omega \tau \frac{\partial^2 \psi_i(\xi)}{\partial \xi^2} q_i(\tau) = 0 \quad (26)$$

여기서,

$$\epsilon = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega = \Omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (27)$$

식 (26)에서 모드함수를 외팔보의 정규모드함수를 이용하고 $\psi_i(\xi)$ 를 곱한 후 전체 영역에 대하여 적분하면 다음과 같이 식 (1)과 같은 형태가 된다.

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} + \omega_i^2 q_i + \epsilon \cos \omega \tau \sum_{j=1}^N f_{ij} q_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (28)$$

여기서,

$$f_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^2 \psi_i(\xi)}{\partial \xi^2} \psi_j(\xi) d\xi \quad (29)$$

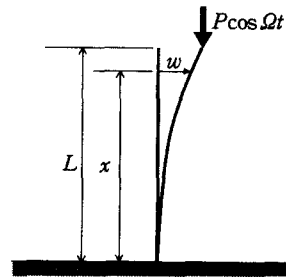


Fig. 2 Configuration of a free-fixed column undergoing a sinusoidal follower force.

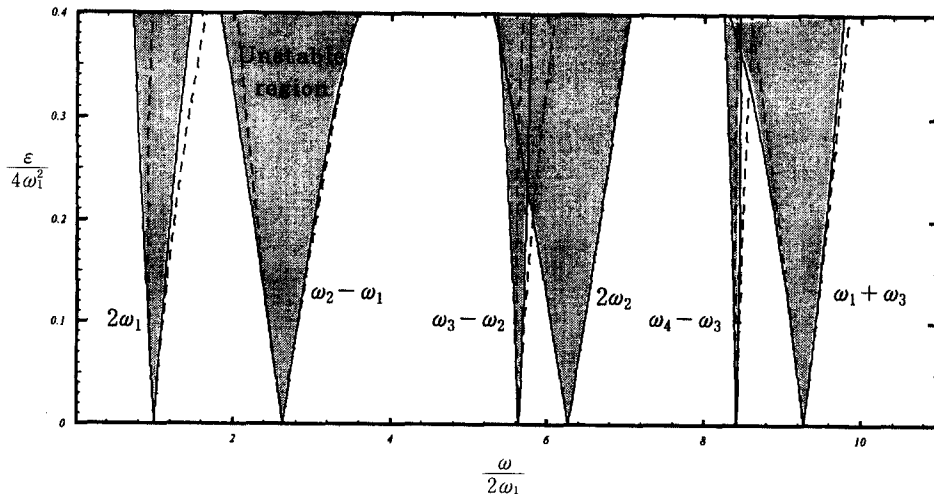


Fig. 3 Transition curves for a free-fixed column under the influence of a sinusoidal follower force.

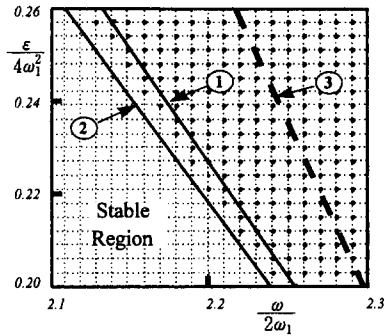


Fig. 4 Comparison of transition curves.

Fig. 3은 식 (28)에서 모드함수가 5개일 때, 이 시스템에 대한 동적안정성 해석결과이다. 그림에서 실선은 무한행렬법에 의해 첫번째 Fourier 계수만을 사용한 결과이고, 점선은 다중스케일 섭동법을 사용하여 얻은 결과이다. 두 결과는 주공진과 복합공진 모두 세로축으로 약 0.2까지의 범위에서는 비교적 잘 일치함을 보인다. 이는 복합공진과 관련된 전이곡선을 구하기 위해 본 논문에 제시된 무한행렬법의 결과가 적절한 정확성을 갖는다는 것을 보여주는 것이다. 그런데 이 그림에서는 $\varepsilon/(4\omega_1^2)$ 의 값이 0.2보다 커지면서 두 방법에 의한 결과가 상당히 달라지는 것을 보여주고 있는데, 그것은 다중스케일 섭동법의 경우 섭동의 크기가 커지면 그 정확도가 현저히 감소하기 때문이다 (좀더 정확히 말해서 다중스케일 섭동법을 사용할 때 ε 과 f_{mn} 의 곱이 ω_m^2 와 비슷한 값을 가지기 시작하면 오차가 증가한다). Fig. 4는 Fig. 3에서 세로축이 0.2에서 0.26 범위인 부분을 확대한 그림으로, 첫번째와 두번째 Fourier 계수까지만 사용하여 얻은 전이곡선과 다중스케일 섭동법에 의한 전이곡선을 나타내고 있다. 이 그림에는 또한 수치적분을 통한 결과도 함께 보여주는데 시스템이 불안정한 매개변수 조합에 대해서는 격자점으로 표시하였다. 이 그림에 나타난 엄밀한 수치적분 결과를 얻기 위해서 수치적분과 관련된 오차가 Fig. 4에 표시된 격자점의 위치에 미치는 영향이 격자점간의 거리에 비해 충분히 작은 값을 갖도록 하였다. 엄밀하게 얻어진 수치적분 결과와 비교해 보면 첫번째 Fourier 계수만을 사용한 전이곡선의 결과는 다중스케일 섭동법보다는 훨씬 더 정확함을 알 수 있다. 그리고 수치적분 결과에 의한 안정영역과 불안정영역의 경계선은 안정격자점과 불안정격자점 사이임을 고려하면 두번

째 Fourier 계수까지 사용한 결과가 첫번째 Fourier 계수만을 사용한 결과보다 좀 더 정확해짐을 알 수 있다. 다중스케일 섭동법에 의한 결과는 ε 값의 증가에 따라 오차가 점점 커지는데 비해 무한행렬법은 두 경우 모두 오차의 변동이 별로 없는 것을 이 그림은 보여주는 것이다. 즉, 본 논문에 제시된 무한행렬법에 의해 구해진 전이곡선의 정확성은 자신의 크기와 별 상관없이 있음을 의미하는 것이다. 또한 Fourier 계수도 하나 또는 두 개까지만을 고려한다 하여도 충분히 정확한 전이곡선의 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 매개변수 가진 시스템의 안정성 해석을 위해 기존의 무한행렬법을 확장한 새로운 무한행렬법을 제시하였다. 이 새로운 방법은 기존에 제시되지 않은 복합공진이 발생하는 영역의 전이곡선도 구할 수 있는 무한행렬식을 유도함으로써 가능하였으며, 이를 사용해 실제 예제에 적용하여 다중스케일 섭동법을 사용하여 얻어진 기존의 해석결과와 비교하였다. 그 결과 본 논문에서 제시한 무한행렬법이 섭동법에 비해서 보다 더 정확한 전이곡선을 얻을 수 있음을 확인하였다. 특히 다중스케일 섭동법의 경우 자신의 크기가 커지면 오차가 증가하지만, 무한행렬법의 경우는 오차가 가진 크기와는 별 상관없이 있음을, 수치적분에 의해 얻어진 엄밀해와 비교함으로써 확인하였다. 즉 무한행렬법은 자신의 크기가 큰 시스템의 안정성 해석에서 기존의 섭동법보다 우수성을 갖는다는 결론을 얻을 수 있었다.

후 기

본 논문의 연구는 1996년도 교육부 학술 연구조성비(ME96-D-27)에 의해 지원을 받아 수행되었으며, 저자들은 이에 관계자에게 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Faraday, M., 1831, "On a Peculiar Class of Acoustical Figures and on Certain Forms Assumed by a Group of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces," *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Lon-

- don), pp. 299~318.
- (2) Mathieu, E., 1868, "Memoire sur le Mouvement Vibratoire d'une Membrane de Forme Elliptique," *J. Math.*, 13, pp. 137~203.
- (3) Hill, G., 1886, "On the Part of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon," *Acta Math.*, 8, pp. 1~36.
- (4) Floquet, G. 1883, "Sur les Equation Differentielles Lineaires a Coefficients Periodique," *Annales de Ecole Normal Superior*, Paris, Vol. 2, No. 12, pp. 47~89.
- (5) Whittaker/Watson, 1969, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press.
- (6) Leonard Meirovitch, 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill.
- (7) Iwatsubo, T., Saigo, M. and Sugiyama, Y., 1973, "Parametric Instability of Clamped-Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," *J. of Sound and Vibration*, 30, pp. 65~77.
- (8) 현상학, 유희희, 1996, "축방향 왕복운동하는 외팔보의 동적 안정성 해석," 한국소음진동공학회지, 제6권, 제4호, pp. 469~474.
- (9) Kane, T. R. and Sobala, D., 1963, "A New Method for Attitude Stabilization," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 6, June, pp. 1365~1367.
- (10) Hsu, C. S. and Cheng, W. H., 1973, "Applications of Theory of Impulsive Parametric Excitation and New Treatments of General Parametric Excitation Problems," *J. Applied Mechanics*, March, pp. 78~86.
- (11) McLACHLAN, N. W., 1951, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press.
- (12) Bolotin, V. V., 1964, *Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco.
- (13) Kenneth G. Lindh and Peter W. Linkins, 1969, "Infinite Determinant Methods for Stability Analysis of Periodic-Coefficient Differential Equations," *AIAA J.*, Vol 8, No 4, pp. 680~686.
- (14) Nayfeh, A. and Mook, D., 1979, *Nonlinear Oscillation*, John Wiley & Sons, Inc.
- (15) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, 62, pp. 375~381.
- (16) Nayfeh, A., 1973, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc.