

# 근사 선탐색을 이용한 동적 반응 최적화

김민수\* · 최동훈\*\*

(1997년 8월 11일 접수)

## Dynamic Response Optimization Using Approximate Line Search

Min-Soo Kim and Dong-Hoon Choi

**Key Words :** Dynamic Response Optimization(동적 반응 최적화), Approximate Line Search(근사 선탐색), Augmented Lagrange Multiplier(ALM 방법)

### Abstract

An approximate line search is presented for dynamic response optimization with Augmented Lagrange Multiplier(ALM) method. This study employs the approximate augmented Lagrangian, which can improve the efficiency of the ALM method, while maintaining the global convergence of the ALM method. Although the approximate augmented Lagrangian is composed of only the linearized cost and constraint functions, the quality of this approximation should be good since an approximate penalty term is found to have almost second-order accuracy near the optimum. Typical unconstrained optimization algorithms such as quasi-Newton and conjugate gradient methods are directly used to find exact search directions and a golden section method followed by a cubic polynomial approximation is employed for approximate line search since the approximate augmented Lagrangian is a nonlinear function of design variable vector. The numerical performance of the proposed approach is investigated by solving three typical dynamic response optimization problems and comparing the results with those in the literature. This comparison shows that the suggested approach is robust and efficient.

### 1. 서 론

선형 정적 구조물의 최적화에는 근사 최적화(approximate optimization) 기법들이 잘 발달되어 있다.<sup>(1~3)</sup> 근사 최적화기법은 원래의 목적함수와 구속 조건함수들을 설계변수의 명시적인 함수로 근사화한 후, 이 근사화된 최적화 문제를 비선형 최적화 알고리즘을 적용하여 반복적으로 푸는 방법이다. 하지만, 동적 반응 최적화에서는, 이와 같은 근사

최적화기법을 적용한 예가 매우 드물다. 이는 동적 시스템의 해석과 최적화의 접속이 상대적으로 힘들기 때문이다.

동적 시스템의 최적화에 근사 최적화기법을 적용한 대표적 사례를 살펴보면, 1976년 Cassis와 Schmit가 최초로 구조물의 동적 반응을 선형 근사화한 후 외부형 벌칙함수방법(exterior penalty function method)을 적용하여 동적 반응을 고려한 구조 최적설계를 수행하였다.<sup>(4)</sup> 그리고, 1995년과 1996년에 Sepulveda와 Thomas는 중간변수(intermediate variables)로 중간 반응량(intermediate response quantities)을 근사화하는 개념을 도입하여 구조물의 동적 반응을 다양한 명시적 함수로 근사화하였다.<sup>(5,6)</sup>

\*회원, 삼성 자동차(주) 중앙연구소

\*\*회원, 한양대학교 기계설계학과

하지만, 이들이 제안한 근사 최적화기법들은 모두 모달해석방법에 기초를 두고서 이루어졌기 때문에 동적 반응이 비선형인 경우에는 적용할 수 없는 단점이 있다. 그래서, 일반적인 동적 시스템의 최적화는 대역적 수렴성(global convergence)이 보장되는 비선형 최적화 알고리즘을 직접 이용하는 것이 지금까지의 추세이다.

본 논문에서는 일반적인 동적 시스템의 최적화에 적용이 가능하면서도 대역적 수렴성이 보장되는 효율적인 동적 반응 최적화 알고리즘을 새로이 제시하고자 한다. 이 알고리즘은 ALM방법을 기본으로 한다. 이는 ALM 방법이 대형 규모의 동적 반응 최적화에 타당하다는 기존의 연구 사례가 있기 때문이다.<sup>(11)</sup> 본 연구에서 제안하는 최적화방법의 중요한 특징은 탐색방향을 결정할 때는 대역적 수렴성의 보장을 위하여 정확한 확장 라그랑지안(exact augmented Lagrangian)을 이용하고, 선택탐색을 할 때는 효율 향상을 위하여 근사 확장 라그랑지안(approximate augmented Lagrangian)을 이용한다는 점이다. 선택탐색을 위하여 사용하는 근사 확장 라그랑지안은, 먼저 목적함수와 구속조건을 선택탐색 시작점에서 선형 근사화하고 이들을 탐색방향벡터에 투영시킨 후, 이들을 조합하여 만든 범함수이다.

## 2. 선택탐색을 위한 근사화

### 2.1 확장 라그랑지안

본 연구에서 제안하는 근사화기법을 설명하기 위하여, 동적 반응 최적화 문제를 먼저 정의하고자 한다. 제안하는 근사화기법의 개념을 설명하기 위한 것이므로 동적 반응 최적화 문제는 단순하게 정의하고자 한다. 단, 설명하는 근사화기법은 보다 복잡한 형태의 동적 반응 최적화 문제에도 바로 적용할 수 있다. 이제, 동적 반응 최적화 문제를 다음과 같이 정의하자.

$$\text{Minimize } \Psi_0(\mathbf{b}), \quad (1)$$

$$\text{subject to } \Psi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) \leq 0,$$

$$t_i \leq t \leq t_f; i=1, \dots, m \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{b} \in R^n$ 는 설계변수벡터를,  $\mathbf{z} \in R^k$ 는 일반속도 및 변위벡터를,  $t$ 는 시간을,  $t_i$ 와  $t_f$ 는 각각 시간영역의 시작점과 끝점을, 그리고  $m$ 은 구속조건 개수를 의미한다. 식 (1)은 목적함수이고, 식 (2)는 시간영역에서 만족시켜야만 하는 구속조건이

다.

ALM 방법의 확장 라그랑지안(augmented Lagrangian)은 다양한 형태로 정의될 수 있다.<sup>(13)</sup> 본 연구에서는 이들중 Rockafeller가 제안한 확장 라그랑지안<sup>(14)</sup>을 시간 종속 구속조건을 취급할 수 있도록 식 (3)과 같이 확장하여 사용한다.

$$A(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mu, r) = \Psi_0(\mathbf{b}) + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^m [\mu_i(t) \cdot \Omega_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) + \frac{1}{2} r_i \Omega_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t)^2] dt \quad (3)$$

여기서,  $\Omega_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) = \max[\Psi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t), -\mu_i(t)/r_i]$ ;  $\mu_i(t) > 0$ 와  $r_i > 0$ 는 각각  $i$ 번째 시간종속구속조건에 대한 라그랑지 승수함수와 벌칙계수이다.

### 2.2 근사화된 확장 라그랑지안

본 연구에서는 ALM 방법의 부 최적화(suboptimization) 단계인 구속조건이 엮는 최적화의  $k$ 번째 반복 단계의 선택탐색을 위하여, 먼저 목적함수는 식 (5a)와 같이 선형 근사화하고, 구속조건함수는 식 (5c)와 같이 선형 근사화한 후 이를 사용하여  $\Omega_i$ 를 식 (5b)와 같이 근사화한다. 그리고 이와 같이 근사화된  $\tilde{\Psi}$ 와  $\tilde{\Omega}_i$ 를 사용하여 식 (4)와 같이 확장 라그랑지안을 구성한다.

$$\tilde{A}(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mu, r) = \tilde{\Psi}_0(\mathbf{b}) + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^m [\mu_i(t) \tilde{\Omega}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) + \frac{1}{2} r_i \tilde{\Omega}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t)^2] dt \quad (4)$$

여기서,

$$\tilde{\Psi}_0(\mathbf{b}) = \Psi_0(\mathbf{b}_k) + \nabla \Psi_0(\mathbf{b}_k) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_k) \quad (5a)$$

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) = \max\{\tilde{\Psi}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t), -\mu_i(t)/r_i\} \quad (5b)$$

$$\tilde{\Psi}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) = \Psi_i(\mathbf{b}_k, \mathbf{z}_k, t) + \nabla \Psi_i(\mathbf{b}_k, \mathbf{z}_k, t) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_k) \quad (5c)$$

이고, 기호  $\sim$ 는 근사화된 값을 나타낸다. 식 (5)에서  $\mathbf{b}_k$ 는 목적함수와 구속조건함수를 선형화한 설계점을, 그리고  $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}(\mathbf{b}_k, t)$ 는 설계점  $\mathbf{b}_k$ 에서 계산한 동적 시스템의 상태변수값을 의미한다.

식 (4)의 근사확장 라그랑지안을 구성할 때, 식 (3)의  $\Omega_i$ 를 직접 선형 근사화하지 않은 점에 주목할 필요가 있다. 즉, 우리는 먼저  $i$ 번째 구속조건함수를 식 (5c)로 근사화 한 후, 이를 이용하여  $\tilde{\Omega}_i$ 를 식 (6)과 같이 표현하였다.

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, t) = \max\{\tilde{\Psi}_i(\mathbf{b}_k, \mathbf{z}_k, t) + \nabla \Psi_i(\mathbf{b}_k, \mathbf{z}_k, t)$$

$$\cdot (b-b_k), -\mu_i(t)/r_i\} \quad (6)$$

$\Omega_i$ 를 이와 같이 근사화 한 개념의 장점을 도식적으로 설명하기 위하여, Fig. 1에 임의의 시간점에서 근사화된  $\tilde{\Omega}_i$ 를 설계변수  $b$ 의 함수로 도시한다.

Fig. 1에서와 같이, 선택색 시작점  $b_k$ 에서  $\Psi_i(b_k) < -\mu_i/r_i$ 이며,  $-\mu_i/r_i$ 는 설계변수에 대하여 상수이므로  $\tilde{\Omega}_i(b_k) = -\mu_i/r_i$ 가 된다. 이는 실제 함수  $\Omega_i(b_k)$ 를  $-\mu_i/r_i$ 의 값을 갖는 수평선으로 근사화한 것으로 근사화의 질이 크게 나빠진다. 그러나, 본 연구에서 제안하는 바와 같이  $\Psi_i$ 를  $b_k$ 에서 선형으로 근사화하여  $\tilde{\Psi}_i(b)$ 를 구한 후  $\tilde{\Omega}_i(b) = \max\{\tilde{\Psi}_i(b), -\mu_i/r_i\}$ 로 정의하면 Fig. 1에서 볼 수 있는 바와 같이 근사화의 질이 크게 향상된다. 즉, 본 연구에서 제안하는 근사화기법은 ALM 알고리즘이 지난  $\Omega_i$  함수의 수학적 특징을 잘 이용하였기 때문에, 선형 근사화했을 지라도  $\tilde{\Omega}_i$ 를 설계변수와 라그랑지승수의 비선형 함수로 표현한다.

$\Omega_i$ 를 잘 근사화한 것 뿐만 아니라, 근사 확장 라그랑지안에 2차식 형태인  $\tilde{\Omega}_i^2$ 이 있다는 것도 주목할 만하다. 이 2차 항이 있음으로써, 제안하는 근사화기법의 정확도가 Fig. 1에 보인 것 보다 훨씬 좋아지게 된다. 이에 대한 이론적 근거를 알아보기 위하여, 식 (4)의 근사화 된 벌칙항을 주목할 필요가 있다. 근사화된 벌칙항을 식 (4)에서 분리하여 따로 정리하면 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(b, z, \mu, r) = & \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^m [\mu_i(t) \tilde{\Omega}_i(b, z, t) \\ & + \frac{1}{2} r_i \tilde{\Omega}_i^2(b, z, t)] dt \quad (7) \end{aligned}$$

이론 전개의 명확성을 위하여, 함수들을 설계변수 벡터의 함수로만 표기하기로 하고, 식 (6)을 식 (7)에 대입하면 근사 벌칙항은 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(b) = & \int_{t_i}^{t_f} \left[ \sum_{i \in I} [\mu_i \{\Psi_i(b_k) + \nabla \Psi_i(b_k) \cdot (b-b_k)\} \right. \\ & + \frac{1}{2} r_i \{\Psi_i(b_k) + \nabla \Psi_i(b_k) \cdot (b-b_k)\}^2] \\ & \left. + \sum_{i \notin I} (-\mu_i^2/2r_i) \right] dt \quad (8) \end{aligned}$$

여기서, 집합  $I = \{i/\Psi_i(b_k) \geq -\mu_i/r_i\}$ 이다. 식 (8)을 정리하면 식 (9)와 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{P}(b) = P(b_k) + \nabla P(b_k) \cdot (b-b_k)$$

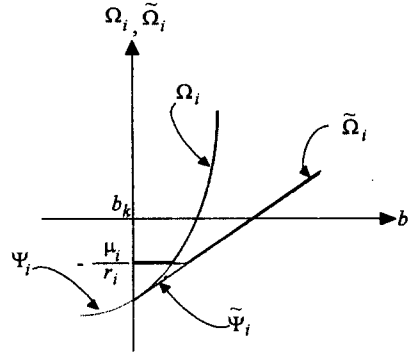


Fig. 1 Graph of  $\tilde{\Omega}_i$  for the case of  $\tilde{\Psi}_i(b_k) < -\mu_i/r_i$ .

$$+ \frac{1}{2} (b-b_k)^T \tilde{G}_p(b_k) (b-b_k) \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} P(b_k) = & \int_{t_i}^{t_f} \left[ \sum_{i \in I} \{\mu_i \Psi_i(b_k) + \frac{1}{2} r_i \Psi_i(b_k)^2\} \right. \\ & \left. + \sum_{i \notin I} (-\mu_i^2/2r_i) \right] dt \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\nabla P(b_k) = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i \in I} [\{\mu_i + r_i \Psi_i(b_k)\} \nabla \Psi_i(b_k)] dt \quad (10b)$$

$$\tilde{G}_p(b_k) = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i \in I} [r_i \nabla \Psi_i(b_k) \nabla \Psi_i(b_k)^T] dt \quad (10c)$$

식 (10)에서,  $P(b_k)$ ,  $\nabla P(b_k)$  및  $\tilde{G}_p(b_k)$ 는 설계변수 벡터  $b_k$ 에서 계산한 정확한 확장 라그랑지안의 벌칙항의 식 (11)의 함수, 구배 및 근사 헤시언이다.

$$P(b) = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^m [\mu_i(t) \Omega_i(b) + \frac{1}{2} r_i \Omega_i(b)^2] dt \quad (11)$$

식 (11)의 벌칙항에 대한 정확한 헤시언은 식 (11)을 설계변수에 대하여 두 번 미분함으로써 식 (12)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} G_p(b_k) = & \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i \in I} [\{\mu_i + r_i \Psi_i\} \nabla^2 \Psi_i(b_k) \\ & + r_i \nabla \Psi_i(b_k) \nabla \Psi_i(b_k)^T] dt \quad (12) \end{aligned}$$

여기서,  $\nabla^2 \Psi_i(b_k)$ 는 설계변수 벡터  $b_k$ 에서 계산한  $i$ 번째 구속조건함수의 정확한 헤시언이다. 최적화가 진행됨에 따라 설계변수  $b_k$ 는 최적점  $b^*$ 에 접근하게 된다. 여기서 주목할 것은 최적해에 가까워질수록 구속조건  $\Psi_i(b_k)$ ,  $i \in I$ 는 위배량이 작아질 것이기 때문에 '0'으로 접근할 것이고, 식 (12)의 우변 첫째항의 계수는  $\mu_i$ 에 접근할 것이다. 또한,

벌칙계수  $r_i$ 는 일정한 상한치까지는 계속 증가할 것이기 때문에 라그랑지승수  $\mu_i$ 는 벌칙계수인  $r_i$ 보다 작은 값을 가지게 되므로, 최적화가 진행됨에 따라 식 (12)에서 우변 둘째항의 기여도가 첫째항 기여도 보다 크게 된다. 따라서, 설계변수  $b_k$ 가 최적점  $b^*$ 에 접근하면 할수록 식 (10c)의  $\tilde{G}_p(b_k)$ 는 식 (12)의  $G_p(b_k)$ 와 유사한 특성을 갖게 된다. 이는 식 (9)의 근사화된 벌칙항은, 비록 구속조건을 선형 근사화했을 지라도, 최적해 근처에서는 거의 2차식 근사화에 준하는 정확도를 가짐을 의미한다.

### 2.3 탐색방향벡터에 투영시킨 근사확장 라그랑지안

본 연구의 목적은 일반적인 동적 반응 최적화 문제를 풀 수 있는 효율적이면서도 대역적 수렴성(global convergence)이 보장된 최적화방법을 개발하는 것이므로, 본 연구에서는 대역적 수렴성을 보장하기 위하여 탐색방향을 결정할 때는 정확한 확장 라그랑지안을 이용하고, 효율 향상을 위하여 선탐색을 할 때는 근사확장 라그랑지안을 적용한다. 더구나, ALM 방법에서는 목적함수와 구속조건함수의 구배만 계산되면, 확장 라그랑지안에 대한 정확한 탐색방향을 결정할 수 있기 때문에, 근사확장 라그랑지안을 이용하여 탐색방향을 결정할 이유가 없다. 또한, 선탐색을 위한 근사화기법의 적용은 탐색방향이 결정된 다음에 바로 이루어지기 때문에 근사화를 위하여 별도의 구배계산은 요하지 않고 탐색방향 결정에서 구한 것들을 그대로 이용하면 된다.

벡터  $s_k$ 를 준-뉴턴(quasi-Newton) 방법 또는 공액 구배(conjugate gradient) 방법에서 결정한 탐색방향 벡터라 하고,  $\alpha$ 를 그 탐색방향벡터를 따라서 결정하는 선탐색 스텝이라고 하자. 그러면, 식 (4)와 같이 정의된 근사확장 라그랑지안을 탐색벡터 방향에 투영시킨 형태는 식 (13)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) = & \tilde{\Psi}_0(\alpha) + \int_u^{u'} \left[ \sum_{i=1}^m \{\mu_i(t) \tilde{\Omega}_i(\alpha, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} r_i \tilde{\Omega}_i(\alpha, t)^2 \right] dt \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$\tilde{\Psi}_0(\alpha) = \Psi_0(b_k) + \{\nabla \Psi_0(b_k) \cdot S_k\} \alpha \quad (14a)$$

$$\tilde{\Omega}_i(\alpha, t) = \max\{\tilde{\Psi}_i(\alpha, t), -\mu_i(t)/r_i\} \quad (14b)$$

$$\tilde{\Psi}_i(\alpha, t) = \Psi_i(b_k, z_k, t)$$

$$+ \{\nabla \Psi_i(b_k, z_k, t) \cdot S_k\} \alpha \quad (14c)$$

식 (14a)와 (14c)는, 선탐색 전/후의 설계변수 변화량을 의미하는  $b - b_k = \alpha S_k$ 를 식 (5a)와 (5c)에 대입함으로써 구할 수 있다.

## 3. 근사 선탐색을 이용한 동적 반응 최적화 알고리즘

### 3.1 ALM 알고리즘

다양한 종류의 ALM 방법<sup>(13)</sup>이 알려져 있지만, 본 연구에서 제안하는 근사화기법은 다음의 ALM 방법에 기초를 둔다.

단계 1: 초기 설계점  $b^0$ , 초기 라그랑지승수 벡터  $\mu^0$ 와 초기 벌칙계수 벡터  $r^0$ 를 결정한다. 그리고  $q=0$ 으로 정의한다.

단계 2:  $q$ 번째 반복단계의 설계점인  $b^q$ 를 초기 설계점으로 하여, 목적함수가 식 (3)의  $A(b, z, \mu^q, r^q)$ 이고 구속조건이  $b^l \leq b \leq b^u$ 인 최적화 문제를 푼다. 여기서,  $b^l$ 와  $b^u$ 는 설계변수벡터에 대한 상/하한치 벡터이다. 본 연구에서는 구속조건이 없는 최적화 단계에서 설계변수 상/하한치 제한조건을 직접 취급한다.<sup>(15)</sup> 여기서 구한 최적점을  $b^{q+1}$ 로 한다.

단계 3: 새로운 설계점  $b^{q+1}$ 에서, 시간 종속 구속조건 함수의 최대치가 정해진 허용치  $\varepsilon_1$ 보다 작고, 동시에 목적함수의 상대 편차가 정해진 허용치  $\varepsilon_2$ 보다 작으면, 수렴하였으므로 최적화 단계를 끝낸다. 그러나 이 조건들이 동시에 만족되지 않으면 단계 4로 간다.

단계 4: 라그랑지승수를 다음 공식으로 개선한다.

$$\begin{aligned} \mu_i(t)^{q+1} = & \mu_i(t)^q + \max[\Psi_i(b^{q+1}, z^{q+1}, t), \\ & -\mu_i(t)/r_i]^q, \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

또한, 벌칙계수는, 확장 라그랑지안의 볼록성(convexity)을 유지하기 위하여 제안된 공식<sup>(16)</sup>을 적용하여 구속조건의 만족정도 및 라그랑지승수값에 따라 개선한다. 그리고,  $q=q+1$ 로 증가시킨 후, 단계 2로 간다.

### 3.2 근사 선탐색을 수반한 구속조건이 없는 최적화 알고리즘

ALM 알고리즘은 단계 2에서 구속조건이 없는

최적화 알고리즘을 반복적으로 이용하기 때문에, 구속조건이 없는 최적화 알고리즘의 대역적 수렴성(global convergence) 및 효율은 ALM 알고리즘의 성능에 중대한 영향을 미친다. 따라서, 본 연구에서는 대역적 수렴성 및 효율이 우수한 다음과 같은 알고리즘을 제시한다.

단계 1: 초기 설계점  $b_0$ ( $b_0$ 는 ALM 알고리즘에서의  $b^*$ 와 동일한 값임)에서, 동적 시스템을 해석하여 정확한 확장 라그랑지안(exact augmented lagrangian)의 함수값과 구배를 계산한다. 설계점  $b_0$ 에서 구한 함수값과 구배를  $A_0$ 와  $\nabla A_0$ 로 표기한다. 또한, 반복횟수  $k$ 와 재실행에 대한 인식지수  $\eta$ 를 0으로 설정한다.

단계 2: 준-뉴턴(quasi-Newton) 방법 또는 공액구배(conjugate gradient) 방법을 이용하여 탐색방향  $S_k$ 를 결정한다.

단계 3: 식 (14b)의  $\tilde{Q}_i$ 를 다음과 같이 변경하여 식 (13)의 근사 확장 라그랑지안을 구성한다.

$$\tilde{Q}_i(a, t) = \max\{\tilde{\Psi}_i(a, t) + \delta_i(t), -\mu_i(t)/r_i\}$$

여기서,  $\delta_i(t)$ 는  $i$ 번째 근사화된 구속조건함수의 경계를 가용영역(feasible region)으로 밀어 넣는 ‘+’ 값의 이송(shifting)량으로 본 연구에서는  $\nu/|\Psi_i(b_k, z_k, t)|$ 으로 정의한다. 여기서, 계수  $\nu$ 는 ‘+’인 작은 값이다. 또한, 선택색의 스텝량에 대한 이동 제한(move limit)량  $\alpha_k^m$ 을 정한다. 이에 대한 자세한 설명은 3-3장에서 자세히 설명하기로 한다.

단계 4: 단계 3에서 정의한 근사화된 확장 라그랑지안  $\tilde{A}(a)$ 을 황금분할법으로 최소화하고, 그 해를  $a^*$ 으로 표기한다.

단계 5: 근사 최적치  $a^*$ 에 상응하는 정확한 확장 라그랑지안 값  $A(a^*)$ 을 계산한다. 만약  $A(a^*) \geq A(0)$ 이면, 근사한 선택색이 실패하였으므로 단계 6으로 간다. 그러하지 않으면  $\alpha_k^m = a^*$ 로 설정하고 설계변수벡터를  $b_{k+1} = b_k + \alpha_k^m S_k$ 로 개선한 후 단계 8로 간다.

단계 6: 선택색 시작점에서의 함수값  $A(0)$ , 도함수값  $\nabla A(0)$ 과 근사 선택색에서 구한  $A(a^*)$ 를 이용하여,  $a$ 에 대한 2차 근사식인  $\tilde{A}(a)$ 를 만든 후, 이에 대한 해석적인 최소치인  $a^{**}$ 를 구한다. 만약  $\tilde{A}(a^{**}) < A(0)$ 이면,  $\alpha_k^m = a^{**}$ 로 설정하고 설계변수 벡터를  $b_{k+1} = b_k + \alpha_k^m S_k$ 로 개선하고 단계 8로 간다. 그러하지 않으면, 방향 수정(restarting)을 위하여 단계 7로 간다.

단계 7: 재실행에 대한 인식지수가  $\eta=1$ 이면, 더 향상된 최적해를 구할 수 없기 때문에 구속조건이 없는 최적화단계를 끝낸다. 아니면, 탐색방향  $S_k$ 를 급강하(steepest descent) 방향으로 수정하고,  $\eta=1$ 로 하여 단계 3으로 간다.

단계 8: 새로운 설계점  $b_{k+1}$ 에서 동적 시스템을 해석하여, 정확한 확장 라그랑지안의 함수값과 구배를 결정한다. 이 값을 각각  $A_{k+1}$ 와  $\nabla A_{k+1}$ 로 표기한다. 이 값에서 정해진 수렴조건을 만족하면 구속조건이 없는 최적화 단계를 끝낸다. 아니면,  $\eta=0$ 으로 하고 새로운 탐색방향 결정을 위하여 단계 2로 간다.

### 3.3 선택색에서의 이동 제한

근사화를 시작하는 점에서 구속조건들이 식 (15)의 조건을 만족하면 식 (14b)의  $\tilde{Q}_i$ 가 비선형적인 특징이 있다고 해도 탐색방향에 투영된  $\tilde{A}(a)$ 는 유한하지 않은(unbounded) 함수가 될 수 있고, 이러한 경우에는 근사 선택색이 실패할 우려가 있다.

$$\tilde{\Psi}_i(a, t) \leq -\mu_i(t)/r_i; t_i \leq t \leq t_f, \quad i=1, \dots, m \quad (15)$$

이러한 어려움은 선택색 단계에 이동 제한을 도입함으로써 쉽게 해결할 수 있다.

본 연구에서는 이동 제한을 위하여 다음의 두가지 값을 기본적으로 이용한다. 첫째는,  $\tilde{A}(a)$ 가 유한하지 않은 점을 고려하기 위한 것으로  $b_k$ 에서  $a$ 의 선형함수로 근사화된 확장 라그랑지안이  $A(b_k)$ 의 50%가 되는 스텝량이다. 이 값은  $\alpha_k^m$ 으로 표기한다. 선형화된 함수를 수식으로 표현하면 식 (16)과 같다.

$$A(b_k) + (\nabla A(b_k) \cdot S_k) \alpha_k^m = 0.5A(b_k) \quad (16)$$

식 (16)에서,

$$\alpha_k^m = \left| \frac{0.5A(b_k)}{\nabla A(b_k) \cdot S_k} \right| \quad (17)$$

으로 된다. 둘째는 선택색 과정에서 설계변수가 상/하한치를 벗어나지 않도록 제한하는 스텝량인  $\alpha_k^2$ 이다. 이  $\alpha_k^2$ 는 설계변수의 상/하한치 제한조건을 구속조건이 없는 최적화 단계에서 직접 처리하는 방법과 밀접한 관계가 있다. 이에 대한 보다 자세한 내용은 참고문헌 (17)을 참조하기 바란다.  $\alpha_k^2$  계산에 대한 기본 개념은 다음과 같다. 탐색방향 벡터  $S_k$ 의 요소 부호에 따른 스텝 제한량인

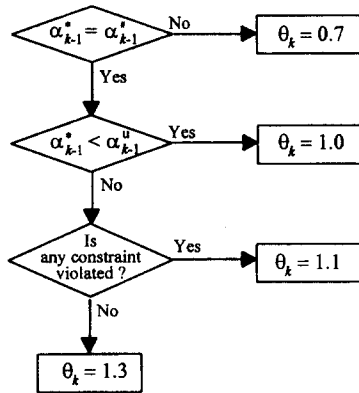


Fig. 2 Scheme of assigning the value of  $\theta_k$ .

$\alpha_{mv}^l$ 과  $\alpha_{mv}^u$ 를 식 (18)과 같이 구한 후, 이들 중 작은 값을 취하면  $\alpha_k^{u2}$ 가 된다.

$$\alpha_{mv}^l = \text{minimum of } \left\{ \frac{b_k^l(i) - b_k(i)}{S_k(i)} \right\},$$

$$i=1, \dots, n \text{ for } S_k(i) < 0 \quad (18)$$

$$\alpha_{mv}^u = \text{minimum of } \left\{ \frac{b_k(i) - b_k^u(i)}{S_k(i)} \right\},$$

$$i=1, \dots, n \text{ for } S_k(i) > 0 \quad (18)$$

그래서, 선택색에서의 이동 제한은 이들 두 값  $\alpha_k^l$ 과  $\alpha_k^{u2}$ 을 이용하여

$$\alpha_k^l = \min\{\theta_k \alpha_k^l, \alpha_k^{u2}\}; \quad k=1, \dots \quad (19)$$

으로 정의된다. 식 (19)에서  $k$ 는 구속조건이 없는 최적화 단계의 반복회수가 있다. 변수  $\theta_k$ 는 근사 선택색에서 구한 최적치  $\alpha^*$ 에서 구속조건의 위배 여부와 전 단계에서 설정한 이동 제한량과  $\alpha^*$ 의 관계에 따라 정하는 승수(multiplier)이다.  $\theta_k$ 를 결정하는 과정은 Fig. 2에 도시한다. 단,  $\theta_0=1$ 로 한다.

Fig. 2에서  $\theta_k$ 를 정하는 기본 개념은 선형 근사화를 이용한 선택색에서 구한 최적 스텝  $\alpha^*$ 가  $A(\alpha^*) < A(0)$ 을 만족하면 이동 제한량을 늘리고 그러하지 않으면 이동 제한량을 줄인다는 것이다. 따라서,  $\theta_k$ 에 할당된 0.7, 1.1 및 1.3의 값은 이동 제한량을 조절하는 의미를 표현한 것인데, 알고리즘의 수렴에는 영향을 끼치지 않는다.

#### 4. 예제를 통한 수치적 검증

제한하는 방법의 수치적 성능을 검증하기 위하

여, 3장에서 설명한 알고리즘을 바탕으로 동적반응 최적화 프로그램<sup>(15)</sup>을 개발하였다. 개발된 프로그램은 구속조건이 없는 최적화 알고리즘을 다양하게 선택할 수 있다. 수치적 검증을 위하여 8가지의 동적 반응 최적화 문제를 풀어 보았다. 각 예제에 대한 상세한 설명은 참고문헌 (7)을 참조하기 바란다.

본 연구에서는 동적 시스템 해석을 위하여 Runge-Kutta-Verner 5차 및 6차 방법을, 그리고 설계 민감도해석을 위하여 직접미분방법(direct differentiation method)을 사용하였다. 또한, 시간의 함수인 확장 라그랑지안의 수치적분은 Simpson방법을 이용하였다. 이 연구에서 구속조건의 수렴 한계치와 목적함수의 수렴한계치는  $\epsilon_1=1 \times 10^{-4}$ 와  $\epsilon_2=1 \times 10^{-1}$ 으로 하였고, 구속조건이 없는 최적화 문제의 수렴한계치는  $1 \times 10^{-2}$ 으로 하였다. 3-2절에서 설명한 '구속조건이 없는 최적화 알고리즘'의 단계 3에서 근사화된 구속조건의 경계를 가용영역으로 밀어넣는 이송(shifting) 계수  $\nu$ 의 값으로는 가용영역에 있는 구속조건의 경우에는 0.05를, 위반영역에 있는 구속조건의 경우에는 0.01을 설정하였다.

참고문헌 (7)의 초기점에서 출발하여 얻은 최적치인 Tables 1~6에서 NF와 NG는 최적화 과정에서 요구된 함수 및 설계 민감도 계산회수이고, COST는 최적치에서의 목적함수 값이다.

#### 4.1 구속조건이 없는 최적화 알고리즘에 따른 성능비교

3장에서 자세히 언급하였지만, ALM 알고리즘의 주된 골격은 라그랑지승수와 벌칙계수를 개선해 가면서 구속조건이 없는 최적화를 반복적으로 수행한다는 것이다. 특히, 개선되는 라그랑지승수의 정확도를 유지하려면 구속조건이 없는 최적화에서 구한 최적치가 다소 정확해야만 한다. 그러하지 않으면, ALM 알고리즘의 수렴성은 극히 나빠지게 된다. 그러나, 구속조건이 없는 최적화를 정확하게 하려면 많은 해석 및 설계 민감도가 소요된다. 이를 보완하기 위하여, 본 논문은 2장에서 근사확장 라그랑지안을, 3장에서 이를 이용한 근사 선택색 방법을 제시하였다.

본 절에서는, 우리가 제안한 근사화방법의 질(quality)이 ALM 방법을 수렴시키기에 충분한지

를 알아보기 위하여, 8가지 동적 반응 최적화 문제를 풀어 본다. 각 문제의 선탐색을 위하여는 본 연구에서 제시한 근사 선탐색방법을 적용하며, 탐색 방향 결정을 위하여는 4가지 준-뉴턴(quasi-Newton) 방법<sup>(18)</sup> 4가지의 공액구배(conjugate gradient) 방법<sup>(18,19)</sup>을 적용한다. 사용된 준-뉴턴방법은 BFGS, DFP, Hoshino 및 symmetric rank-one이고, 공액구배 Fletcher-Reeves, Polak-Ribiere, Hestenes-Stiefel 및 Beale's restarted. DFP와 symmetric rank-one 방법의 경우에는 수치적 특이(numerical singular) 현상을 방지하기 위하여 본 연구에서는 개선 공식을 다소 보완하였다.<sup>(15)</sup>

[1자유도 비선형 충격흡수기 설계] Fig.3에 도시한 1자유도 비선형 충격흡수기는 고정된 질량 M

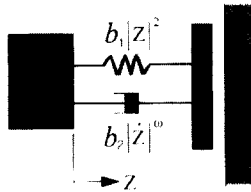


Fig. 3 Nonlinear impact absorber.

과 설계변수  $b_1$ 과  $b_2$ 로 각각 특성이 주어지는 스프링과 댐퍼로 구성되어 있다. 이 시스템은 시간  $t=0$ 일 때, 주어진 초기 속도로 벽에 충돌한다. 설계의 목적은 질량의 최대 변위에 대한 제한조건을 만족하면서, 질량의 최대 가속도를 최소화할 수 있는 설계변수  $b_1$ 과  $b_2$ 를 결정하는 것이다. 이 설계 문제는 Fig.3의 댐퍼를 위한 지수  $\omega$ 가 1,2,3 및 4인 경우에 대한 4가지 설계문제로 세분된다.

이 예제에 대한 최적치는 Table 1에 수록하였다. 검증에 사용된 모든 알고리즘들이 거의 동일한 최적치에 수렴했음을 알 수 있다. 이는 우리가 제안한 근사화의 질이 ALM 방법의 수렴을 보장할 정도로 우수함을 의미한다.

Table 1의 (a)와 (b)에서 보면, 4가지의 준-뉴턴방법과 4가지의 공액구배방법들이 각각의 방법에서 유사한 성능을 보여 준다. 하지만, 준-뉴턴방법과 공액구배방법을 비교해 보면, 준-뉴턴방법이 다소 효율적임을 알 수 있다. 이는 공액구배방법이 준-뉴턴방법보다 더 정확한 선탐색을 요구한다는<sup>(16)</sup> 사실을 입증한다.

[2자유도 선형 진동절연기 설계] Fig.4에 도시한 2자유도 선형 진동절연기 최적설계 문제는 주어

Table 1 Optimization results for the nonlinear impact absorber.

(a) Using quasi-Newton methods

	$\omega=1$			$\omega=2$			$\omega=3$			$\omega=4$		
	NG	NF	COST	NG	NF	COST	NF	NG	COST	NF	NG	COST
BFGS	13	14	0.5264	15	16	0.5972	16	16	0.6833	16	16	0.7541
DFP	13	14	0.5264	14	15	0.5972	16	16	0.6833	16	16	0.7540
Hoshino	13	14	0.5265	14	15	0.5972	16	16	0.6833	16	16	0.7540
SRO	13	14	0.5265	14	15	0.5972	16	16	0.6833	16	16	0.7540

SRO : Symmetric Rank-One

(b) Using conjugate gradient methods

	$\omega=1$			$\omega=2$			$\omega=3$			$\omega=4$		
	NG	NF	COST	NG	NF	COST	NF	NG	COST	NF	NG	COST
F-R	20	21	0.5265	15	16	0.5973	16	17	0.6833	19	20	0.7540
P-R	12	12	0.5265	13	13	0.5973	17	18	0.6833	18	18	0.7540
H-S	13	14	0.5264	16	16	0.5973	19	20	0.6833	21	21	0.7540
B-P	12	15	0.5264	15	15	0.5973	17	19	0.6833	20	21	0.7540

F-R : Fletcher-Reeves ; P-R : Polak-Ribiere ; H-S : Hestenes-Stiefel ; B-P : Beale-Powell

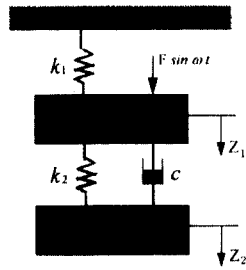


Fig. 4 Vibration isolator.

Table 2 Optimization results for the vibration isolator.

(a) Using quasi-Newton methods

	NG	NF	COST
BFGS	12	17	2.3594
DFP	15	24	2.3557
Hoshino	16	21	2.3611
Sym. Rank-One	14	23	2.4137

(b) Using conjugate gradient methods

Algorithm	NF	NG	COST
Fletcher-Reeves	12	16	2.4369
Polar-Ribiere	13	21	2.3555
Hestenes-Stiefel	8	8	2.3653
Beale-Powell	10	17	2.3654

진 가진주파수에 대하여 주질량의 최대 진폭을 최소화하는 주질량과 댐퍼질량의 고유진동수 비(b<sub>1</sub>)와 감쇠비(b<sub>2</sub>)를 구하는 것이다. 구속조건으로는 주질량과 댐퍼의 총돌에 대한 과도 응답량과 정상상태 응답량 제한과 설계변수에 대한 상/하한치 제한이 있다.

최적 설계치는 Table 2에 정리하였다. 최적화과정을 검토한 결과, 이 문제의 설계점은 거의 가용영역 내에서 움직였음을 알 수 있다. 그래서, 선택색 단계에서 근사확장 라그랑지안이 유한하지 않을 수 있음을 의미한다. 그럼에도 불구하고, 검증에 사용된 모든 알고리즘들은 유사한 최적해에 성공적으로 수렴했다. 이는, 근사 선택색 단계에서 적용한 설계변수의 이동 제한, 근사화된 구속조건함수의 경계를 가용영역으로 밀어 넣는 ‘+’ 값의 이송

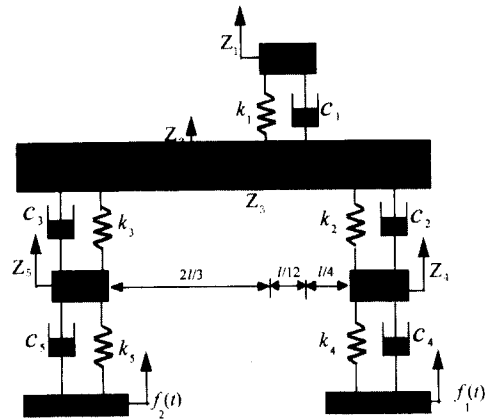
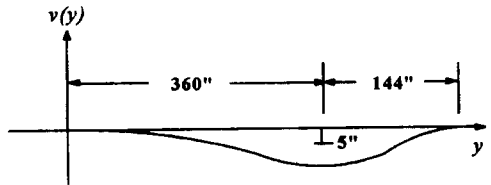
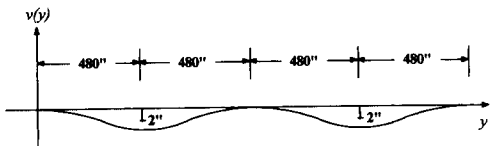


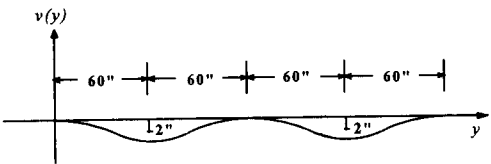
Fig. 5 Vehicle model.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 Road surface profiles.

량 및 식 (14b)의  $\tilde{\Omega}_i$ 의 특징 등의 유효성을 보여준다.

각 알고리즘 별로 성능을 비교하면, 준-뉴턴방법들 중에서는 BFGS와 DFP의 성능이 가장 우수하였고 symmetric rank-one 방법이 가장 나빴다. 공액구배방법에서는 Hestenes-Stiefel의 효율이 가장 우수하였고 Polak-Ribiere가 가장 나빴다.

[5자유도 차량 현가 시스템 설계] Fig. 5에 도시한 5자유도 차량 현가 시스템의 최적설계 문제는,



**Table 3** Optimization results for the vehicle model.

(a) Using quasi-Newton method

	Profile 1			Profile 2			Profile 3		
	NG	NF	COST	NG	NF	COST	NG	NF	COST
BFGS	15	19	254.84	10	10	99.27	13	17	73.63
DFP	21	25	254.91	12	13	98.92	6	9	73.79
Hoshino	27	33	254.91	9	12	99.33	6	9	73.76
Sym. Rank-One	20	24	254.90	5	5	105.87	14	24	73.57

(b) Using conjugate gradient methods

	Profile 1			Profile 2			Profile 3		
	NG	NF	COST	NG	NF	COST	NG	NF	COST
Fletcher-Reeves	18	21	254.87	7	8	98.92	6	14	73.62
Polar-Ribiere	19	22	254.93	11	14	98.92	13	19	73.63
Hestenes-Stiefel	17	20	254.97	8	9	105.09	7	9	76.29
Beale-Powell	17	20	254.97	8	9	105.09	10	14	74.12

차량이 주어진 속도를 가지고 Fig. 6의 세가지 노면을 각각 지나갈 때, 운전석에서의 최대 가속도를 최소화하는 것이다. Fig. 6에서, 노면 1은 험한 디취(ditch)를 표현한 것이고, 노면 2와 3은 고속도로를 표현한 것이다. 설계변수는 세 개의 장성계수  $k_1$ ,  $k_2$  및  $k_3$ 와 세 개의 감쇠계수  $c_1$ ,  $c_2$  및  $c_3$ 이다. 구속조건으로는 차체와 운전석 간의 상대변위, 차체와 앞/뒤 차축과의 상대변위 및 앞/뒤 바퀴와 노면과의 상대 변위에 대한 제한이 있다. 또한, 설계변수는 각각 상/하한치 제한이 있다.

세가지 노면에 대한 최적설계 결과치는 Table 3에 정리하였다. 여기서, 다시 주목할 것은 검증에 사용된 모든 알고리즘들이 거의 동일한 최적점에 성공적으로 수렴했다는 점이다. 이와 같은 사실은, 제안하는 근사화기법의 우수성을 다시 한번 더 입증하는 것이다. 특히, 노면 2와 3에 대한 설계가 노면 1에 대한 설계보다 함수 및 설계 민감도 계산 횟수가 훨씬 적는데, 이는 노면 2와 3에 대한 설계에서는 최적화의 전 과정에 걸쳐서 설계점이 가용 영역내에 있었기 때문이다. 그래서 노면 2와 3에 대한 최적 설계치는 근사 선탐색에서 정의한 이동 제한에 대한 유효성을 다시 한번 더 입증해 준다. 이들 세가지 설계문제에 대한 각 알고리즘들의 성

능을 보면, 공액구배방법이 준-뉴턴방법에 필적할 정도의 성능을 보여 준다. 이와 같은 사실은, 설계변수가 많은 동적 반응 최적화에서, 제안하는 근사화기법을 적용한 공액구배방법이 효과적일 수 있다는 가능성을 보여 준다.

#### 4.2 다른 선탐색기법과의 성능비교

제안하는 근사 선탐색기법의 성능을 평가하기 위하여, 본 연구의 최적화 결과를 순차적 다항식 근사화 선탐색기법을 적용한 동적 반응 최적화 결과치<sup>(17)</sup>와 비교하고자 한다. 순차적 다항식 근사화 기법은 선탐색의 진행상황(감소함수의 기울기, 근사화의 오차 등)에 맞추어 2점을 이용한 2차 함수 근사화, 3점을 이용한 3차 함수 근사화 및 4점을 이용한 3차 함수 근사화기법을 순차적으로 적용하는 선탐색 방법이다. 이에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (17)을 참조하기 바란다.

이들 두 선탐색기법의 성능비교를 공정하게 수행하기 위하여, 선탐색기법을 제외한 모든 수치적 기법은 동일한 것을 적용한다. 설계 민감도해석은 직접미분방법(direct differentiation method)을, ALM 알고리즘의 효율에 영향을 끼치는 벌칙계수의 개선 규칙은 참고문헌 (16)의 방법을 새로이 적용한다.

Table 4 Optimization results for nonlinear impact absorber.

	$\omega=1$		$\omega=2$		$\omega=3$		$\omega=4$	
	PLM	SPA	PLM	SPA	PLM	SPA	PLM	SPA
$b_1$	0.4413	0.4474	0.5971	0.5970	0.6822	0.6822	0.7540	0.7718
$b_2$	0.5264	0.5276	0.5972	0.5972	0.6833	0.6833	0.7540	0.7509
COST	0.5264	0.5292	0.5972	0.5972	0.6833	0.6833	0.7541	0.7626
NG	13	11	15	16	16	14	16	14
NF	14	37	16	47	16	46	16	40

Table 5 Optimization results for dynamic absorber.

	PLM	SPA
$b_1$	1.3285	1.3456
$b_2$	0.02768	0.0205
COST	2.3594	2.3559
NG	12	13
NF	17	41

또한, 확장 라그랑지안을 반복적으로 최소화하는 기법은 BFGS 방법을 사용한다.

성능비교에 이용되는 예제들은 4.1절에서 언급한 세가지 동적 반응 최적화 문제들과 최적화 알고리즘들의 성능비교에 자주 이용되는 Rosen-Suzuki 문제,<sup>(20)</sup> 용접보 설계문제,<sup>(21)</sup> 인장/압축 스프링 설계문제<sup>(20)</sup> 및 기어 감속기 설계문제<sup>(22)</sup> 등이다. 내용 전체의 일관성을 위하여, 본 절에서는 4.1절에서 언급한 세가지 동적 반응 최적화 문제에 대한 최적화 결과를 비교하고, 나머지 4가지 예제들에 대한 결과들은 부록에서 언급하고자 한다.

동적 반응 최적화 문제들에 상기의 두가지 선택색기법을 적용하여 구한 최적설계 결과치는 Tables 4~6에 비교한다. Table에서 PLM은 본 연구에서 제안하는 투영된 선형 근사화 선택색기법이고, SPA는 순차적 다항식 근사화 선택색기법이다.

1자유도 비선형 충격흡수기의 최적 설계치를 비교한 Table 4를 보면, 본 연구에서 제안하는 투영된 선형 근사화 선택색기법(PLM)이 순차적 다항식 근사화기법에 비하여 도함수 계산량은 1~2회 많지만, 함수 계산량은 60%를 줄일 수 있음을 알

수 있다.

2자유도 선형 진동절연기의 최적 설계치를 비교한 Table 5를 보면, 제안하는 PLM이 SPA에 비하여 도함수 계산량이 1회 적을 뿐만 아니라 함수 계산량도 58% 정도 적었다.

5자유도 차량의 현가 시스템 최적 설계치를 비교한 Table 6을 보면, 노면 1, 2 및 3을 각각 달리는 세가지 경우에는 모두 제안하는 PLM이 SPA에 비하여 함수 계산량을 줄일 수 있었다. 특히, 구속 조건의 경계치 근처에 최적해가 있는 노면 1의 경우에는 최적치가 가용영역에 존재하는 노면 2와 3의 경우에 비하여 제안하는 PLM이 SPA에 비하여 함수 계산량을 많이 줄일 수 있음은 주목할 만 하다.

## 5. 결론

동적 반응 최적화를 위하여, 본 연구에서는 효율적이면서도 내역적 수렴성(global convergence)이 보장된 새로운 최적화방법을 제시하였다. 이 방법은 대형 동적 반응 최적화를 위하여 ALM 알고리즘을 기본으로 하였다. 제안하는 방법에서는 ALM 알고리즘중 구속조건이 없는 최적화문제를 풀 때, 내역적 수렴성을 보장하기 위하여 정확한 확장 라그랑지안(augmented Lagrangian)을 사용하여 결정하고, 효율 향상을 위하여 근사확장 라그랑지안(approximate augmented Lagrangian)을 사용하여 선택색을 수행하였다. 선택색에 이용된 근사확장 라그랑지안은 선형화된 목적함수와 구속조건 함수들을 탐색방향 벡터에 투영시킨 것을 조합하여 구성되었다. 근사확장 라그랑지안의 정확도는, 선형화된 함수들로 구성되었음에도 불구하고 이 근사화

**Table 6** Optimization results for vehicle suspension system.

(a) Excited by profile 1

	PLM	SPA
b <sub>1</sub>	50.00	50.00
b <sub>2</sub>	200.02	200.00
b <sub>3</sub>	200.00	200.00
b <sub>4</sub>	44.50	30.46
b <sub>5</sub>	77.44	77.51
b <sub>6</sub>	80.00	80.00
COST	254.84	254.90
NG	15	17
NF	19	51

(b) Excited by profile 2

	PLM	SPA
b <sub>1</sub>	50.00	50.00
b <sub>2</sub>	200.00	200.00
b <sub>3</sub>	200.00	200.04
b <sub>4</sub>	50.00	50.00
b <sub>5</sub>	43.18	45.01
b <sub>6</sub>	80.00	80.00
f	99.27	99.25
NG	10	7
NF	10	12

된 확장 라그랑지안에 포함된 벌칙함수가 최적해 근처에서는 거의 2차식 근사화에 상당하는 정확도를 가지기 때문에, 2차식 근사화에 준하는 정확도를 가지게 됨을 이론적으로 살펴보았다.

제안하는 방법의 수치적인 검증을 위하여, 8가지의 구속조건이 없는 최적화기법을 선택적으로 적용할 수 있는 동적 반응 최적화 프로그램을 개발하고, 이를 이용하여 세 종류의 동적 반응 최적화문제의 8가지 예제를 풀었다. 이 결과에 따르면, 검증에 사용된 8가지의 구속조건이 없는 최적화기법들이 모두 유사한 최적해에 수렴함으로써 제안하는 근사화방법의 정확도가 ALM 알고리즘을 수렴시키

(c) Excited by profile 3

	PLM	SPA
b <sub>1</sub>	50.67	50.00
b <sub>2</sub>	200.00	200.00
b <sub>3</sub>	200.06	200.00
b <sub>4</sub>	4.90	4.84
b <sub>5</sub>	30.30	28.36
b <sub>6</sub>	5.03	5.00
f*	73.63	73.73
NG	13	9
NF	17	26

기에 충분하다는 것을 보여 주었다. 특히, 5자유도 차량 현가 시스템 최적화에서 공액구배(conjugate gradient) 방법이 준-뉴턴방법에 필적할 정도의 성능을 보인다는 사실을 알았다. 이와 같은 사실에서 우리는 제안하는 근사 선탐색기법을 동반한 공액구배(conjugate gradient) 방법이 대형 동적 반응 최적화 문제에서 효과적일 수 있다는 가능성을 보았다.

### 후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초 연구비 지원(과제번호 : ADD-90-5-09)으로 수행되었습니다. 이에 감사 드립니다.

### 참고문헌

- (1) Barthelemy, J. -F. M. and Haftka, R. T., 1993, "Approximation Concepts for Optimum Structural Design-a Review," *Structural Optimization*, Vol. 5, pp. 129~144.
- (2) Fleury, C. and Braibant, V., 1986, "Structural Optimization-a Rew Dual Method Using Mixed Variables," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 409~428.
- (3) Hansen, S. R. and Vanderplaats, G. N., 1990. "Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses," *AIAA Journal*, Vol.

- 28-1, pp. 161~168.
- (4) Cassis, J. H. and Schmit, L. A., 1976, "Optimum Structural Design with Dynamic Constraints," *Journal of Structural Division, ASCE ST10*, pp. 2053~2071.
- (5) Sepulveda, A. E. and Thomas, H. L., 1995, "New Approximation for Steady-State Response of General Damped Systems," *AIAA Journal*, 33-6, pp. 1127~1133.
- (6) Sepulveda, A. E. and Thomas, H. L., 1996, "Improved Transient Response Approximation for General Damped Systems," *AIAA Journal*, 34-6, pp. 1261~1269.
- (7) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience, New York, pp. 329~386.
- (8) Hsieh, C. C. and Arora, J. S., 1984, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 43, pp. 195~219.
- (9) Hsieh, C. C. and Arora, J. S., 1985, "Hybrid Formulation for treatment of Point-wise State Variable Constraints in dynamic Response Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, pp. 171~189.
- (10) Paeng, J. K. and Arora, J. S., 1985, "Dynamic Response Optimization of Mechanical Systems with Multiplier Methods," *ASME Journal of mechanism, Transmission, and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 73~80.
- (11) Chahande, A. and Arora, J. S., 1994, "Optimization of Large Structure Subjected to Dynamic Loads with the Multiplier Method," *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 413~430.
- (12) Choi, D.-H. and Kim, M.-S., 1996, *A New Approach to the Min-Max Dynamic Systems*, in IUTAM Symposium on Optimijation of Meclaniccl System, D. Bestle and W. Schielen (eds.), Kluwer Academic Publisher, pp. 65~72.
- (13) Bertsekas, D. P., 1982, *Constrained Optimization and lagrange Multiplier Methods*, Academinc Press.
- (14) Rockafells, R. T., 1973, "The Multiplier Method of hestenes and Powell Applied to Convex Programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 12-6, pp. 555~562.
- (15) Kim, M.-S. and Choi, D.-H., 1996, "Integrated Design Optimization Library 3.0 for Advanced Design," *AMOD Lab. Hanyang University, Technical Report OPT-9601*
- (16) 김민수, 최동훈, 1996, "동적반응 최적화를 위한 ALM 기법의 새로운 벌칙계수 개선 규칙", 대한기계학회 춘계학술대회 논문집 A, 96S111, pp. 610~613.
- (17) 김민수, 최동훈, 1995, "순차적 다항식 근사화를 적용한 효율적 선탐색기법의 개발", 대한기계학회논문집, 제19권, 제2호, pp. 433~442.
- (18) Fletcher, R., 1987, *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, pp. 44~96.
- (19) Haftka, R.T., Gürdal, Z. and Kamat, M.P., 1992, *Elements of Strucutral Optimization*, Kluwer Academic Publishers, pp. 136~137.
- (20) Belegundu, A.S. and Arora, J.S., 1985, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization Part I, II", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1583~1623.
- (21) Reklaitis, G.V., Ravindren, A. and Ragsdell, K.M., 1983, *Engineering Optimization Method and Application*, John Wiley and Sons, pp. 247-249 and 610-611.
- (22) Azam and Li, W.C., 1989, "Multi-Level Design Optimization using Global Monotonicity Analysis," *ASME, Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 259~263.

## 부 록

### 수학 및 기계설계 예제들을 통한 성능검증

최적화 알고리즘의 성능비교에 자주 이용되는 수학적인 예제와 기계설계문제들을 풀어 봄으로써 제안하는 PLM의 수렴성과 효율성이 동적 반응 최적

화 뿐만 아니라 일반적인 최적화에서도 우수함을 입증하고자 한다.

**1. Rosen-Suauki 문제<sup>(20)</sup>**

이 문제는 국부 최소치가 많은 수학적 문제로서, 설계변수에 대한 상/하한치 구속조건은 없고 세 개의 비선형 부등식 구속조건이 있다. 초기점은 (0, 0, 0, 0)이고, 최적점은 (0, 1, 2, -1)로 알려져 있다. 이 문제에 대한 자세한 수식은 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \Psi_0(\mathbf{b}) = b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2 + b_4^2 - 5b_1 - 5b_2 - 21b_3 + 7b_4 + 100$$

subject to

$$g_1(\mathbf{b}) = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_1 - b_2 + b_3 - b_4) / 8 - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{b}) = (b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 + 2b_4^2 - b_1 - b_4) / 10 - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{b}) = (2b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_4 - b_2 - b_4) / 5 - 2 \leq 0$$

**2. 용접보 설계<sup>(21)</sup>**

용접보(welded beam)의 치수설계는 설치비용, 인건비 및 재료비용을 합하여 최소화하는 것이 설계의 목적이며, 구속조건은 용접응력( $g_1$ ), 보의 굽힘응력( $g_2$ ), 좌굴( $g_3$ ), 끝단의 처짐량( $g_4$ ) 및 물리적인 의미를 갖기 위한 기하학적 제한조건( $g_5$ ) 등이며, 설계변수 상/하한치에 제한이 있다. 설계변수는 용접치수( $b_1$ ), 용접길이( $b_2$ ), 보의 폭( $b_3$ ) 및 보의 높이( $b_4$ )이다. 초기치는 (1, 7, 4, 2)이고, 최적치는 (0.2444, 6.2187, 8.2915, 0.2444)로 알려져 있다. 이 문제에 대한 자세한 수식은 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \Psi_0(\mathbf{b}) = 1.10471b_1^2b_2 + 0.0481b_3b_4 \cdot (14 + b_2)$$

subject to

$$g_1(\mathbf{b}) = \left\{ \frac{1}{2b_1^2b_2^2} + \frac{3(28+b_2)}{b_1^2b_2[b_2^3+3(b_1+b_3)^2]} + \frac{4.5(28+b_2)^2[b_2^2+(b_1+b_3)^2]}{b_1^2b_2^2(b_2^2+3(b_1+b_3)^2)^2} \right\}^{1/2} - \frac{13.6}{6} \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{b}) = 0.09267 - b_3b_4^3(1 - 0.02823b_3) \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{b}) = 8.7808 - b_3^2b_4 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{b}) = b_1 - b_4 \leq 0$$

$$0.125 \leq b_1 \leq 10, \quad 0.1 \leq b_2 \leq 10, \quad 0.1 \leq b_3 \leq 10,$$

$$\text{and } 0.1 \leq b_4 \leq 10$$

**3. 인장/압축 스프링 설계<sup>(20)</sup>**

인장/압축 스프링 설계는 스프링의 중량을 최소

화하는 것이 목적이며, 변형량(deflection), 전단 응력, 서지주파수(surge frequency) 및 코일 직경에 대한 기하학적인 구속조건들이 있다. 또한, 설계변수에 대한 상/하한치 구속조건도 있다. 설계변수는 와이어의 직경( $b_1$ ), 코일의 직경( $b_2$ ) 및 코일의 감긴 회수( $b_3$ )이다. 설계변수에 대한 초기치는 (1, 2, 3)이다. 이 문제에 대한 자세한 수식은 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \Psi_0(\mathbf{b}) = (b_3 + 2)b_2b_1^2$$

subject to

$$g_1(\mathbf{b}) = 1 - b_2^3b_3 / (71875b_1^4) \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{b}) = b_2(4b_2 - b_1) / (12566b_1^3(b_2 - b_1)) + 1 / (5108b_1^2) - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{b}) = 1 - 140.45b_1 / (b_2^2b_3) \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{b}) = (b_2 + b_1) / 1.5 - 1 \leq 0$$

$$0.005 \leq b_1, \quad 0.05 \leq b_2, \quad 1 \leq b_3$$

**4. 기어감속기 설계<sup>(22)</sup>**

기어감속기 설계는 감속장치의 중량을 최소화하는 것이 목적이며, 기어의 굽힘 및 접촉응력, 축의 횡방향 처짐 및 응력, 공간적 제약과 경험에 의하여 설정된 기하학적인 구속조건 및 설계변수 상/하한치에 대한 제한이 있다. 설계변수는 기어의 치폭( $b_1$ ), 모듈( $b_2$ ), 피니언의 이수( $b_3$ )와 베어링 1의 사이 거리( $b_4$ ), 베어링 2의 사이 거리( $b_5$ ), 축 1의 직경( $b_6$ )의 축 2의 직경( $b_7$ )이다. 설계변수의 초기치는 (3.1, 0.75, 22.5, 7.8, 7.8, 3.4, 5.25)이다. 이 문제에 대한 자세한 수식은 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \Psi_0(\mathbf{b}) = 0.7854b_1b_2^2(3.3333b_3^2 + 14.9334b_3 - 43.0934) - 1.508b_1(b_6^2 + b_7^2) + 7.477(b_6^3 + b_7^3) + 0.7854(b_4b_6^2 + b_5b_7^2)$$

subject to

$$g_1(\mathbf{b}) = 27 / (b_1b_2^2b_3) - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{b}) = 397.5 / (b_1b_2^2b_3^2) - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{b}) = 1.93b_1^2 / (b_2b_3b_6^2) - 1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{b}) = 1.93b_1^2 / (b_2b_3b_7^2) - 1 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{b}) = \left[ \left( \frac{745b_4}{b_2b_3} \right)^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{0.5} - 1100 \leq 0$$

$$g_6(\mathbf{b}) = \left[ \left( \frac{745b_5}{b_2b_3} \right)^2 + 15.79 \times 10^7 \right]^{0.5} - 850 \leq 0$$

**Table 7** Optimization results for four typical test problems.

(a) Rosen-Suzuki problem

	Initial	PLM	SPA
$b_1$	0	0.022	0.000
$b_2$	0	0.971	1.001
$b_3$	0	1.991	1.999
$b_4$	0	-1.016	-1.000
COST	100	56.006	56.000
NG	—	13	17
NF	—	13	47

(b) Welded beam design

	Initial	PLM	SPA
$b_1$	1	0.2442	0.2442
$b_2$	7	6.2150	6.2031
$b_3$	4	8.2968	8.3146
$b_4$	3	0.2443	0.2420
COST		2.3812	2.3823
NG	—	27	25
NF	—	27	80

(c) Tension/compression spring design

	Initial	PLM	SPA
$b_1$	1	0.0514	0.052
$b_2$	2	0.3510	0.378
$b_3$	3	11.6422	10.146
COST	10	0.01268	0.01271
NG	—	19	22
NF	—	20	77

(d) Gear reducer design

	Initial	PLM	SPA
$b_1$	3.1	3.500	3.500
$b_2$	0.75	0.700	0.700
$b_3$	22.5	17.000	17.000
$b_4$	7.8	7.482	7.300
$b_5$	7.8	7.884	7.714
$b_6$	3.4	3.350	3.363
$b_7$	5.25	5.286	5.286
COST	4144.83	2999.87	2998.02
NG	—	19	42
NF	—	22	93

**Table 8** Optimization results for severely violated problems.

(a) Rosen-Suzuki problem

	Initial	Optimum
$b_1$	100	-0.0003
$b_2$	100	1.0005
$b_3$	100	2.0000
$b_4$	100	-1.0000
COST	47700	55.99
Max. Violation	7999	0.00007
NG	—	50
NF	—	54

(b) Tension/compression spring design

	Initial	Optimum
$b_1$	5	0.05130
$b_2$	7	0.34746
$b_3$	3	11.86845
COST	875	0.01268
Max. violation	5	-0.00001
NG	—	35
NF	—	37

$$g_7(b) = b_2 b_3 / 40 - 1 \leq 0$$

$$g_8(b) = 5 - b_1 / b_2 \leq 0$$

$$g_9(b) = b_1 / b_2 - 12 \leq 0$$

$$g_{10}(b) = (1.5b_6 + 1.9) / b_4 - 1 \leq 0$$

$$g_{11}(b) = (1.1b_7 + 1.9) / b_5 - 1 \leq 0$$

$$2.6 \leq b_1 \leq 3.6, 0.7 \leq b_2 \leq 0.8, 17 \leq b_3 \leq 28,$$

$$7.3 \leq b_4 \leq 8.3, 7.3 \leq b_5 \leq 8.3, 2.9 \leq b_6 \leq 3.9,$$

$$5.0 \leq b_7 \leq 5.5$$

Table 7의 최적치를 보면 제안하는 PLM이 모든 예제에서 성공적으로 수렴함으로써, 우수한 수렴성을 수치적으로 입증하였다. 특히, 모든 예제에서 SPA에 비하여 함수 계산량을 70% 이상 줄이면서도 동일한 최적치에 수렴했다. 이는 제안하는 PLM이 동적 반응 최적화 뿐만아니라, 일반적인 최적화문제에도 효과적임을 입증한다.

제안하는 PLM의 수렴성을 보다 구체적으로 검

증하기 위하여 Rosen-Suzuki 문제와 인장/압축 스프링 설계 문제의 구속조건이 과도하게 위배되도록 초기치를 설정하여 최적설계를 수행하였다. 이에 대한 결과는 Table 8에 정리하였다. Table 8의 최

적치를 Table 7의 결과와 비교해 보면 함수 및 도함수 계산량은 증가하였지만 동일한 최적치에 수렴했다는 사실에 주목할 필요가 있다. 이는 제안하는 PLM의 수렴성이 매우 우수함을 입증한다.