

본드선도를 이용한 동적시스템의 주파수역 특성이해

박 전 수* · 김 종 식**

(1997년 8월 11일 접수)

Understanding of Dynamic System Properties in the Frequency Domain Using Bond Graphs

Jeon Soo Park and Jong Shik Kim

Key Words : Bond Graph Standards(일반본드선도), Bond Graph Prototypes(표준본드선도), Pole Dynamics(극점동역학), Zero Dynamics(영점동역학), Source-Load Decomposition(소스-로드 분해), Equivalent Structure(등가구조)

Abstract

Modeling and analysis of dynamic systems generally demand their results to be interpreted each other with a physical sense. It sometimes requires that there should exist a unified tool in the treatment of dynamic systems which can be applied to both their modeling and analysis equally. This paper shows how models just after the progress of modeling via bond graph standards are converted to ones which are appropriate for analyzing a dynamic system in the frequency domain. Four bond graph prototypes are introduced to obtain frequency properties of dynamic systems such as zero stability, relative order, zero and pole dynamics, etc. directly from bond graphs, and the method are proposed which reduces nearly all models of bond graph standards to one of the prototypes without any change of physical similarity. This procedure as a tool for the structural reduction of bond graphs and finding frequency properties of a dynamic system is further investigated to survey its effectiveness through an example.

1. 서 론

동적시스템은 일반적으로 그 특성상 다양한 물리 영역에서 작동하는 개별요소들의 동적 상호작용이 복잡하게 얽힌 결합체로서 서로의 연결방식에 따라 응답특성을 달리하는 시스템이다. 따라서 동적시스템의 모델링 및 해석시 사용될 도구의 유용성은 이와같은 연결특성을 얼마만큼 효과적으로 취급할 수 있느냐에 따라 평가할 수 있다. 본드선도(bond

graphs)^(1,2)는 동적시스템이 갖는 이런 고유한 특성을 도해적 및 수학적으로 분명하게 제공해 주는 모델링 도구로서, 특히 기계, 전기/자기, 유체/유압 및 열시스템 등이 혼용된 다에너지역 시스템(multi-energy domain systems)의 모델링 및 해석시 효과적으로 적용되는 방법이다.⁽³⁾ 또한 본드선도는 동적시스템을 시간역(time domain)에서 해석하고 설계할 때 흔히 이용되는 상태방정식을 쉽게 유도할 수 있는 장점도 있다.⁽³⁾

한편, 동적시스템은 시간역에서 뿐만아니라 주파수역(frequency domain)에서도 그 응답특성이 해석되어야 할 경우가 많다. 물론 동적시스템의 입/출력 관계식을 찾을 때 전기공학 분야에서 흔히 사

*회원, 창원대학교 메카트로닉스공학군

**회원, 부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소

용되는 고전적인 방법인 복소임피던스법(complex impedance method)⁽⁴⁾이나 본드선도로부터 직접 유도된 상태방정식과 출력방정식을 이용하면 동적시스템의 주파수역 해석을 위한 전달함수를 찾을 수도 있다. 그러나 이 방법들은 행렬에 대한 대수(algebra) 및 Laplace 변환과 같은 수학적 조작으로 인하여 동적시스템이 갖는 고유한 내부 동특성을 배제할 뿐만 아니라 특히, 구축된 본드선도가 직접 도해적으로 보여주는 모든 동적요소들의 동적 결합구조가 전달함수의 유도에 아무런 도움이 되지 못하는 단점을 갖는다.

본 논문에서는 본드선도로부터 직접 동적시스템의 주파수역 특성, 즉 전달함수를 구성하는 영점 및 극점동역학(zero and pole dynamics), 상대차수(relative order), 영점 안정도(zero stability) 등을 찾을 수 있는 방법을 제시한다. 이 방법은 Paynter⁽⁵⁾의 본드선도(일반본드선도(bond graph standards)라 함)에서 톱-다운방식에 의한 동적시스템의 모델링에 유리하도록 개발된 표준본드선도(bond graph prototypes)^(6,6)로의 구조적 축약(structural reduction)을 직접 수행하기 때문에 기존의 방법들에 비해 요구되는 수학적 기법이 훨씬 줄어들 뿐만 아니라 무엇보다도, 이와같은 본드선도 축약기법은 동적시스템의 동적거동을 지배하는 연결성(connectivity)과 인과성(causality) 특성을 전혀 상실하지 않는 도해적 변환으로서 각 단계에서 공학적 직관에 따른 합당한 물리적 의미를 즉시 부여할 수 있는 장점이 있다.

본드선도와 전달함수 혹은 동적시스템의 주파수역 특성과의 관계는 Redfield⁽⁷⁾와 Wu⁽⁸⁾에 의해서 연구된 바 있다. 그러나, Redfield는 주파수역에서 동적시스템의 개념설계(conceptual design)를 위한 방법으로 전달함수를 구하였기 때문에 본드선도가 다소 복잡하거나 다점접점 결합구조(multiple junctions)가 포함될 때에는 그 방법의 적용에 보다 세밀한 주의가 요구되기도 한다. 그리고 Wu는 본드선도 모델에서 전달함수의 유도보다는 영점과 극점 다항식 사이의 근의 차와 동적시스템에 대한 최소 혹은 비최소위상(minimum or non-minimum phase) 특징을 파악하는데 그쳤다. 하지만 Wu는 본드선도를 이용하여 동적시스템이 에너지를 발산하는 과정을 도해적으로 표시해 줄 수 있는 에너지 감쇠도(energy-decay diagram)를 분명히 제시해줌으로써 본드선도가 동적시스템의 해석에 더욱 활용될

수 있음을 보이기도 했다.

본 논문은 모두 6장으로 구성되어 있으며, 제 2장에서는 동적시스템의 일반모델(general models)로 제시된 4가지 표준본드선도에 대한 입/출력 관계식을 유도한다. 제 3장에서는 영점 및 극점 동역학에 대한 본드선도 입장에서의 정의와 표준본드선도에서의 수학적 표현식을 제시하고, 그리고 제 4장은 일반본드선도에서 표준본드선도로의 구조적 축약방법을 다루고 이의 응용 예가 제 5장에 나타나 있다. 끝으로, 본 논문에서 제시한 본드선도에 의한 동적시스템의 주파수역 해석이 실제로 동적시스템의 모델링, 해석 및 설계/종합시 사용될 수 있는 통합도구(unified tools)로서의 가능성과 기존의 방법들과의 비교는 제 6장에서 요약한다.

2. 표준본드선도의 입/출력 관계식

동적시스템을 구성하는 각 동적성분 혹은 요소들은 서로에 대한 여기(excitation)와 응답(response)으로 입/출력 관계식이 결정된다. 동적시스템의 또 다른 고유한 특징으로 나타나는 이와같은 인과성(causality)은 앞에서 언급한 연결성(connectivity)과 함께 동적시스템 자체의 동적거동을 완전히 기술할 수 있다. 다시 말하면, 동적시스템은 이를 구성하는 기본요소, 즉 에너지 저장요소, 에너지 발산요소, 에너지 변환요소 및 에너지 발생요소들이 정해지면 이들의 상관적 접합관계(0-접합 및 1-접합)에 의해 거의 모든 공학시스템이 반드시 만족해야 하는 일반 물리법칙인 평형방정식(equilibrium equations) 및 기하학적 접합조건식(compatibility equations)에 전혀 위배되지 않는 동적거동을 보장하며, 또한 이들의 개별적 인과관계(임피던스(impedance)와 어드미턴스(admittance))에 따라 동적거동의 형태와 이의 실제적 이식 가능성이 예측될 수 있다. 여기서 동적시스템의 인과성에 대한 강한 제약조건으로 서로 상호작용하는 두 동적요소 혹은 이들의 결합체인 동적성분들은 각 입력 및 출력의 결정시 서로에 대한 보완관계(complementary relation)로 반드시 구속되어야 함을 참고문헌 (5)에서 지적한 바 있다. 즉, 두 동적성분 혹은 요소들의 상호작용시 수반되는 에너지 교환 및 일률 흐름을 결정하는 일반화된 2개의 일률변수(power variables)인 힘 또는 전압과 같은 작력(effort) 변수와 속도 및 전류와 같은 흐름(flow) 변수는 동

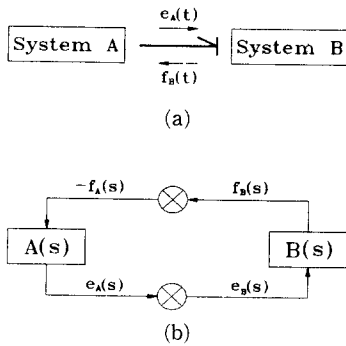


Fig. 1 Power and signal flows between two dynamically interacting systems.

일한 동적성분 혹은 요소에 의해서 두 변수가 동시에 결정될 수 없고 오직 한 변수만 결정되어야 한다. 임피던스와 어드미턴스는 전기회로망 설계자들이 흔히 사용하는 익숙한 개념이지만, 본 논문에서와 같이 서로 상호작용하는 동적시스템의 인과성 관점에서 보면 에너지 교환이 발생하는 포트(port) 상에 부과되는 일률변수들 사이의 일반화된 주파수의존함수로 정의할 수 있다. 즉, 임피던스는 흐름을 입력받아 그 응답으로 작력을 출력하는 동적시스템이며, 그리고 작력이 원인이 되어 그 결과로 흐름의 효과를 외부로 작용하는 모든 동적시스템은 어드미턴스가 된다. Fig. 1은 서로 보완관계로 구축된 두 동적시스템에 대한 본드선도와 이와 등가인 s-영역에서 표시된 블록선도이다.

Fig. 1에서 작력 $e_A(t)$ 는 시스템 A의 출력이지만 이는 시스템 B가 흐름 $f_B(t)$ 로 A를 여기함에 따라 결정되는 응답이며, 또한 반대로 흐름 $f_B(t)$ 는 B의 출력이지만 A의 $e_A(t)$ 에 대한 반작용으로 나타나는 응답임을 보여주고 있다. 여기서 주목해야 할 것은 Fig. 1(a)와 같은 본드선도는 1개의 본드에 의한 양방향 일률흐름(bilateral power flow)을, 그리고 Fig. 1(b)와 같은 블록선도는 2개의 직선에 의한 한방향 신호흐름(unilateral signal flow)으로 표시되기 때문에 동적시스템의 도해적 표현에 본드선도가 훨씬 더 간결한 모델을 제시해 준다

한편, 동적시스템은 이와같은 인과성 뿐만아니라 연결성에 따라 그 동적거동을 달리한다. 동적시스템의 연결성은 이를 구성하는 각 동적성분 혹은 요소들이 어떻게 구조적으로 상호작용하는가와 깊은 관계가 있으며, 이때 연결성에 대한 구속조건으로 대부분의 공학시스템에 흔히 적용되는 기본역학 및

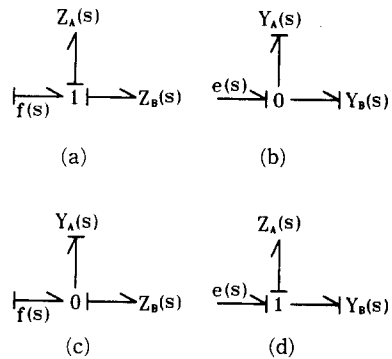


Fig. 2 Four bond graph prototypes with predefined causalities.

일반 물리법칙이 보장되도록 서로의 연결부에서 두 일률변수중 꼭 한 변수만 공통변수(common variable)로 선정되어야 한다. Fig. 2는 동적시스템의 인과성에 의한 2가지 동적거동 형태, 즉 임피던스와 어드미턴스가 동적시스템의 연결성에 의한 2가지 접합구조인 0-접합과 1-접합에 따라 구축될 수 있는 4가지 표준본드선도를 s-영역에서 도시한 그림이다.

여기서, Fig. 2(a) 및 (b)와 같은 종속형(dependent types) 에너지 접합구조에는 본 논문의 저자들에게 의해 처음 제시된 표준본드선도⁽⁵⁾와는 달리 이들의 인과관계가 에너지 발생부(energy source)에서 공통변수를 결정하도록 이미 인과관계가 할당되어 있음에 주의해야 한다. 이는 표준본드선도의 기본구조가 갖는 종속형과 Fig. 2(c) 및 (d)와 같은 독립형(independent types)은 동적시스템을 톱다운방식(top-down manner)에 따라 모델링해 갈 때에 실제로 가장 중요하게 적용되는 개념이지만, 본 논문에서 추구하고자 하는 목적과 같이 기존의 구축되어 있는 일반본드선도에서 전달함수를 직접 추구하고자 할 때에는 동적시스템의 연결성과 인과성에 대한 정보가 이미 파악되어 있기 때문에 별로 큰 의미를 갖지 못하기 때문이다.

이제, Fig. 2에 표시된 표준본드선도 각각에 대한 입/출력 관계식을 유도하기로 한다. 서로 상호작용하는 동적시스템의 입/출력 관계식(혹은 전달함수)은 일반적으로 입력측에서 관심있는 출력측까지 일률 흐름의 경로에 따라 에너지가 저장되고 발산하는 메카니즘을 이해함으로써 구할 수 있다. 따라서 입력과 출력에 관계있는 관심포트를 에너지 발생부(앞으로 소스(source)로 통용함)에 부착된

포트(흔히 구동포트(driving port)라 함)라 할 때, Fig. 2(a)와 (b)에서의 에너지 메카니즘은 소스에 의해 결정되는 공통변수, 즉 (a)에서는 흐름 $f(s)$ 그리고 (b)에서는 작력 $e(s)$ 가 각 접합부에 연결된 두 동적시스템(첨자 A와 B로 구분)에 직접 작용하여 각각 독립된 응답을 만들고 이들의 대수적 합이 반작용 효과로 다시 소스를 여기하는 것으로 설명할 수 있다. 그러므로 Fig. 2(a)와 (b)의 에너지 메카니즘에 대한 입/출력 관계식은 이미 잘 정의된 간단한 회로요소로부터 복잡한 회로망을 구성할 때 전기공학 분야에서 흔히 응용되는 직렬 및 병렬연결의 기본특성으로 쉽게 유도할 수 있다. 즉, 1-점합(직렬연결)에서의 등가임피던스(equivalent impedance)는 각 임피던스의 합과 같고, 또한 0-점합(병렬연결)에서의 등가어드미턴스(equivalent admittance)는 각 어드미턴스의 합과 같다. 하지만 본드선도의 1-점합과 0-점합은 동적시스템의 상호작용시 반드시 만족해야 하는 기본적인 물리법칙, 즉 전기계에서 Kirchhoff의 전압 및 전류법칙 또는 기계계에서 힘의 평형방정식 및 기하학적 접합조건식 등과 같은 역학적 의미를 함축하고 있기 때문에 전기회로도의 직/병렬 개념보다 훨씬 더 광범위한 적용분야를 갖는다.⁽²⁾ Fig. 2(a)의 등가임피던스 $Z_{eq}(s)$ 와 (b)의 등가어드미턴스 $Y_{eq}(s)$ 를 각 구동포트에서 평가할 때의 수학적 표현식들은 각각 다음과 같다.

$$Z_{eq}(s) = Z_A(s) + Z_B(s) \quad (1)$$

$$Y_{eq}(s) = Y_A(s) + Y_B(s) \quad (2)$$

식 (1)과 (2)는 각 점합에 연결된 동적시스템들이 임피던스 혹은 어드미턴스로 그 형태가 같을 때는 간단히 중첩하여 등가할 수 있음을 의미한다. 그리고 Fig. 2(a)와 (b)는 식 (1)과 (2)에 대한 실현가능한 물리구조를 나타내는 본드선도로서 외부에서 부가된 공통변수가 각 접합부에 연결된 두 동적시스템을 아무런 수정없이 직접 여기한다는 관점에서 “피드포워드(feedforward) 구조”의 연결특성을 갖는다고 말할 수 있다.

그러나 Fig. 2(c)와 (d)의 경우는 각 접합부에서 반드시 결정되어야 할 공통변수, 즉 (c)에서는 작력 그리고 (d)에서는 흐름이 소스에 의해서 직접 부가되지 않고 두 동적시스템 중 어느 한 시스템에 의해 간접적으로 결정되는 특징을 갖는다. 예를들어, Fig. 2(c)에서의 소스입력 $f(s)$ 는 시스템 A를

여기하기 전에 시스템 B에 의해서 0-점합의 공통변수 $e(s)$ 가 $Z_B(s)f(s)$ 로 먼저 바뀌게 된다. 이런 관점에서 Fig. 3(c)와 (d)는 두 동적시스템을 연결할 때 “피드백(feedback)구조”와 같은 연결특성을 갖게 되며, 이때 시스템 B의 입력변수는 $f(s) - f_A(s)$, 그리고 시스템 A의 입력변수는 $e_B(s) = Z_B(s)f(s)$ 이기 때문에 Fig. 2(c)의 구동포트에서의 $Z_{eq}(s)$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Z_{eq}(s) = \frac{Z_B(s)}{1 + Z_B(s)Y_A(s)} \quad (3)$$

식 (3)의 유도시 이미 잘 정의된 본드선도의 0-점합에서의 구속조건, 즉 0-점합에 연결된 모든 포트에서의 작력은 같고 0-점합을 향하여 들어오는 모든 흐름변수의 대수적 합은 0이다라는 조건이 적용되었다. 마찬가지로, 본드선도의 1-점합에서의 구속조건, 즉 1-점합에 연결된 모든 포트에서의 흐름은 같고 1-점합을 향하여 들어오는 모든 작력변수의 대수적 합은 0이다라는 조건을 적용하면 Fig. 3(d)의 구동포트에서의 $Y_{eq}(s)$ 도 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$Y_{eq}(s) = \frac{Y_B(s)}{1 + Y_B(s)Z_A(s)} \quad (4)$$

3. 영점 및 극점동역학

이제 동적시스템의 전달함수를 구성하는 영점 및 극점동역학을 앞에서 언급한 Fig. 2의 표준본드선도에서 직접 유도할 수 있는 방법을 언급하기로 한다. 극점(poles)과 영점(zeros)은 동적시스템 자체의 고유한 성질을 암시하는 것으로서 그 개수와 s -평면상의 배치를 통하여 이의 응답특성을 개략적으로 파악할 수 있는 매우 중요한 요소이다. 다시 말하면, 극점은 동적시스템의 고유진동수와 감쇠비를 완전히 결정하여 과도상태(transient state)에서의 응답을 지배하며, 영점은 과도응답의 형태 뿐만 아니라 동적시스템이 갖는 중요한 특성 중의 하나인 최소위상 또는 비최소위상에 관한 정보를 제공해 준다.

그리고 동적시스템의 응답은 보통 초기치에 의한 응답(zero-input response)과 외부입력에 의한 응답(zero-state response)으로 분류할 수 있다. 초기치에 의한 응답은 외부입력이 배제된 동적시스템의 고유한 특성을 나타내기 때문에 그 시스템의 극

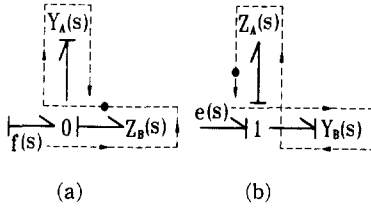


Fig. 3 Indication for path direction and response variables.

점동역학(pole dynamics)에 의해 결정되는 반면에, 입력에 의한 응답은 동적시스템의 초기조건이 0일 때의 외부입력에 의한 응답으로서 영점동역학(zero dynamics)과 깊은 관계를 갖는다. 따라서 동적시스템의 선형조건하에서는 각 응답을 개별적으로 평가하여 서로 중첩함으로써 동적시스템의 전체 응답을 구할 수 있다.

3.1 영점동역학

영점동역학(zero dynamics)은 선택된 입력신호에 의하여 출력을 0으로 보장하는 동적시스템의 내부동역학으로 정의할 수 있다. 따라서 동적시스템에 축적된 초기에너지가 전혀 없을 때에는 전적으로 외부입력에 의하여 그 응답이 결정되기 때문에 이와같은 동적시스템의 영점동역학은 입력에서 출력까지 분포되어 있는 모든 전달요소(또는 시스템의 구성성분 혹은 요소)의 대수적 곱을 0으로 만들어 줌으로써 결정할 수 있다. 예를 들어, 만약 Fig. 2(a)에서 구동포트에 부가되는 $f(s)$ 를 입력 그리고 이 포트에서의 응답 $e(s)$ 를 출력이라고 하면, $e(s)$ 는 식 (1)의 등가임피던스와 직접적인 관계를 갖기 때문에 $e(s)=0$ 라는 조건을 만족하기 위해서는 $Z_A(s)$ 와 $Z_B(s)$ 가 동시에 0이 되어야 한다. 같은 맥락에서, Fig. 2(b)의 $f(s)=0$ 을 보장하기 위해서는 $Y_A(s)$ 와 $Y_B(s)$ 가 동시에 0이 되어야 한다. 즉, 피드포워드구조를 갖는 Fig. 2(a) 및 (b)와 같은 표준본드선도에서의 영점동역학은 각각 다음과 같이 수학적으로 표현될 수 있다.

$$Z_A(s) \rightarrow 0 \text{ and } Z_B(s) \rightarrow 0 \tag{5}$$

$$Y_A(s) \rightarrow 0 \text{ and } Y_B(s) \rightarrow 0 \tag{6}$$

한편 Fig. 2(c)와 (d)는 Fig. 2(a)와 (b)와는 다르게 입/출력 사이에 피드백경로를 포함하고 있다. 이와같은 피드백구조는 입력에서 출력까지의 에너지 메카니즘을 복잡하게 만들지만 Fig. 3에 표시된

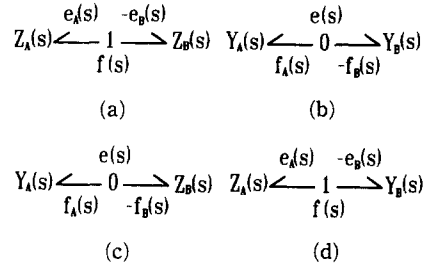


Fig. 4 Dynamic connections for zero-input response.

바와같이 에너지 흐름에 대한 가지적인 경로를 표준본드선도에 함께 도시함으로써 피드백구조를 갖는 동적시스템의 영점동역학도 비교적 쉽게 유도할 수 있다.

Fig. 3에서 점선은 입력이 전체시스템을 여기해 가는 경로(path)를 나타내고 점은 점은 요구되는 출력으로 가정된 응답변수(response variable)를 의미한다. 따라서 위에서 언급한 영점동역학의 조건, 즉 출력/입력 $\rightarrow 0$ 을 적용하면 Fig. 3(a)의 $e_B(s)/f(s)$ 와 Fig. 3(b)의 $e_A(s)/e(s)$ 에 대한 영점동역학은 각각 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Z_B(s) \rightarrow 0 \text{ as } \frac{e_B(s)}{f(s)} \rightarrow 0 \tag{7}$$

$$Y_B(s)Z_A(s) \rightarrow 0 \text{ as } \frac{e_A(s)}{e(s)} \rightarrow 0 \tag{8}$$

3.2 극점동역학

극점동역학(pole dynamics)은 외부입력이 없어도 저절로 여기되는 동적시스템의 고유한 동특성으로 정의할 수 있다. 따라서 극점동역학은 초기치에 의한 응답의 특성으로 완전히 규명되며, 이때 초기치에 의한 응답은 시스템의 외부입력에는 무관하고 그 시스템에 포함된 에너지 저장요소에 저장된 초기에너지에 의한 응답과 같다. Fig. 4는 표준본드선도에서 극점동역학을 유도하기 위하여 Fig. 2의 기본구조에서 외부입력으로 간주되는 구동포트가 모두 제거된 그림을 보여주고 있다.

Fig. 4와 같이 외부입력이 배제된 상태에서 서로 상호작용하는 두 동적시스템은 연결포트를 통하여 전달되는 일률의 양이 결국에는 평형을 유지하는 정상상태(steady state)에 도달해야 한다. 만약 일률 흐름이 어느 기간동안 평형을 이루지 않았다면 두 동적시스템중 한 시스템은 에너지발생기 그리고 다른 시스템은 에너지흡수기로 각각 생각할 수

지만, 이와같은 비평형 일률 흐름인 경우에는 소스의 출력이 에너지흡수기에 대한 또 다른 외부입력으로 역할하기 때문에 이 시스템이 갖는 고유한 동적특성을 전혀 결정할 수 없다. 따라서 극점동역학을 얻기 위한 전제조건으로 서로 상호작용하는 두 동적시스템 사이에 전달되는 순수일률(net power) $P(s)$ 는 반드시 0이 되어야 한다. 즉,

$$P_{AB}(s) = P_{BA}(s) \quad (9)$$

여기서, $P_{AB}(s)$ 는 시스템 B에서 A로 전달되는 일률을, 그리고 $P_{BA}(s)$ 는 시스템 A에서 B로 전달된 일률을 각각 나타낸다. 따라서 Fig. 4에 포함된 본드선도의 1-접합 및 0-접합에서의 구속조건과 식 (9)를 이용하면 Fig. 2와 같은 표준본드선도에서의 극점동역학을 구할 수 있게 된다. 즉, Fig. 4(a)와 (b)에서의 극점동역학은 각각 다음과 같다.

$$Z_A(s) + Z_B(s) = 0 \quad (10)$$

$$Y_A(s) + Y_B(s) = 0 \quad (11)$$

또한 Fig. 4(c)에서 유도된 극점동역학은 Fig. 4(d)의 극점동역학과 같고 다음과 같이 계산된다.

$$1 + Y_A(s)Z_B(s) = 0 \quad (12)$$

4. 일반본드선도에서 표준본드선도로의 변환

모든 동적시스템은 주위(surroundings) 혹은 상호 작용하는 다른 동적시스템에 따라 에너지 발생기 혹은 흡수기의 역할을 한다. 예를들어, 실린더와 램(ram)을 갖춘 간단한 유압 서보시스템을 생각해 보자. 이 시스템이 어떻게 운용되는가 하는 문제는 이와 상호작용하는 또 다른 동적시스템이 무엇인가에 크게 의존한다. 즉, 이 서보시스템이 자동차의 현가장치에 장착되면 에너지 흡수기가 되겠지만 크레인과 같은 시스템에 사용되면 이 서보장치는 유압모터로서 에너지 발생기로 역할하게 될 것이다. 결론적으로, 모든 동적시스템은 서로 상호 작용하는 각 동적성분들의 역할에 따라 적어도 2부분으로 나눌 수 있으며, 이때 한 부분은 소스(source) 그리고 다른 부분은 부하(load)로 그 사이에 있는 에너지 연결포트(linking port)를 통해 일률을 전달하는 것으로 이해할 수 있다. 이와같은 개념을 본 논문에서는 본드선도에 의한 동적시스템의 소스-부하 분해(source-load decomposition)로 통용할

것이며, 이는 톱-다운 방식에 의한 동적시스템의 모델링 개념과 유사하다.⁽⁵⁾

이제 동적시스템을 관심있는 포트를 중심으로 소스와 부하의 동적성분으로 분해할 수 있는 사실을 근거로 각 경우에 대한 등가구조(equivalent structure)를 찾아내어 기존의 일반본드선도에서 표준본드선도로 변환하는 방법을 유도하기로 한다. 만약 관심있는 동적시스템이 이와같은 소스와 부하로 분해되었다면 그 각각은 분명히 질량 및 스프링과 같은 에너지 저장요소와 감쇠기와 같은 에너지 발산요소, 그리고 외부입력인 작력 및 흐름에 대한 에너지 발생요소를 포함하게 된다. 그리고 분해된 각 동적성분은 내부에 저장된 에너지의 상태, 즉 에너지 저장요소의 매 순간의 동특성을 규정하는 상태변수(state variables)라고 불리는 작력 혹은 흐름 변수 및 이들의 조합에 따라 동적상태가 결정된다. 여기서 각 동적성분의 상태변수는 에너지 저장요소가 자신이 포함된 접합구조의 공통변수를 완전히 결정하는 독립형 저장요소가 될 때 이 에너지 저장요소의 출력변수로 선정할 수 있다.

운동에너지 저장요소를 갖는 동적성분을 생각하기로 한다. 질량과 같은 동적요소가 독립형 에너지 저장요소가 되기 위해서는 흐름 $f(t)$ 가 작력 $e(t)$ 와 동적 인과연산자(dynamic causal operator)로 표시되어야 한다. 즉, $t=t_0$ 에서의 $f(t)$ 의 값은 $t=0$ 에서 $t=t_0$ 까지의 $e(t)$ 의 값으로 완전히 규명할 수 있어야 한다. 이와같은 인과연산은 동적시스템의 기본 특성으로서 수학적으로 입력과 출력 사이의 적분관계를 의미한다. 즉,

$$f(t) = y \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \quad (13)$$

여기서, $f(t)$ 와 $e(t)$ 는 연결포트에 부가되는 흐름 및 작력변수를 각각 나타내며, y 는 해석되는 동적성분의 크기와 그 구조에 따라 결정되는 시스템 파라미터이다. 만약 에너지 저장요소의 동적거동이 선형이고 y 의 값이 시간에 따라 변하지 않는다고 가정하면 식 (13)에 대한 Laplace 변환은 다음과 같다.

$$f(s) = y \left[\frac{e(s)}{s} + \frac{e(0)}{s} \right] \quad (14)$$

여기서, $e(0)$ 는 $e(t)$ 의 초기값을 의미한다. 식 (14)에서 분명히 지적되어야 할 것은 운동에너지 형태의 에너지 저장요소를 갖는 모든 동적성분은

외부입력에 관계없이 또 다른 여유의 에너지 발생 요소, 즉 $ye(0)/s$ 를 갖는다는 것이다. 한편, 식 (14)를 본드선도로 표시하기 위해서는 수학적인 조작보다는 물리적 의미가 부여되어야 한다. 왜냐하면, 본드선도상의 임의의 포트에 부과되는 작력 및 흐름은 동적시스템이 갖는 고유한 성질인 인과성 때문에 동시에 두 변수가 결정될 수 없고 한 본드에서 서로 반대방향으로 작용해야 하기 때문이다. 따라서 본드선도 모델로의 표현을 위하여 식 (14)에 이와같은 의미를 첨가하여 다시 수정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(s) = f_{eq}(s) - Y_{eq}(s)e(s) \quad (15)$$

여기서, $f_{eq}(s)$ 는 등가흐름발생기(equivalent flow source) 그리고 $Y_{eq}(s)$ 는 등가어드미턴스로 식 (14)와 비교할 때 각각 $ye(0)/s$ 및 y/s 가 되며, 이의 등가본드선도가 Fig. 5(a)에 나타나 있다.

Fig. 5(a)에서 $f(s)$ 는 소스로 역할하는 임의의 동적성분이 부하로 역할하는 다른 동적성분에 추가하는 실제신호로서 에너지 저장요소의 초기에너지 상태에 따라 결정되는 $f_{eq}(s)$ 와 부하에 의한 소스의 반작용인 $Y_{eq}(s)e(s)$ 에 의해서 만들어 진다. 또한 각 동적성분의 선형조건하에서 식 (15)를 작력변수 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$e(s) = e_{eq}(s) - Z_{eq}(s)f(s) \quad (16)$$

여기서, $e_{eq}(s) = f_{eq}(s)/Y_{eq}(s)$ 는 등가작력발생기(equivalent effort source)이고, $Z_{eq}(s) = 1/Y_{eq}(s)$ 는 등가임피던스이다. 그리고 Fig. 5(b)는 식 (16)에 대한 등가본드선도를 나타낸다. 식 (15)와 (16)은 본드선도의 구조변환에 필요한 기본적인 식으로서 어떤 방정식 혹은 어떤 본드선도를 이용하더라도 연결포트에서 서로간의 일률 흐름은 순전히 똑 같게 된다. 그리고 만약 분해된 소스 및 부하가 위치에너지 저장요소를 갖고 있다하더라도 식 (15) 및 (16)과 전적으로 같은 결과를 유도할 수 있으며, 단지 이 경우에는 작력과 흐름변수의 역할이 바뀔 뿐임을 알 수 있다.

식 (15)와 (16) 그리고 이들의 본드선도 모델인 Fig. 5는 기존의 일반본드선도에서 표준본드선도로의 변환 관점에서 대단히 중요한 의미를 갖는다. 우선, 에너지 저장요소를 갖는 거의 모든 공학시스템은 에너지 소스 및 부하로 구분되어 Fig. 5와 같은 등가모델로 구축할 수 있으며, 나아가 식 (15)

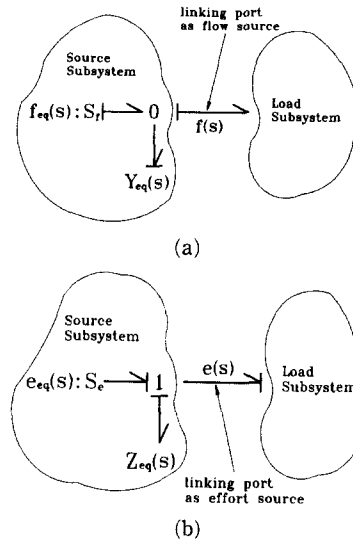


Fig. 5 Equivalent source transformations.

와 (16)은 입/출력의 역할이 바뀌었을 뿐 서로 상호작용하는 동적시스템의 연결포트에서는 전적으로 같은 동적거동을 보여주는 식이기 때문에 Fig. 5에서 보는 바와 같이 0-접합에 부착된 등가흐름소스는 1-접합에 부착된 등가작력소스와 같은 역할을 담당하고 있음을 알 수 있다. 또한, 식 (15)와 (16) 그리고 Fig. 5는 동적시스템의 에너지 소스부에 작력 혹은 흐름을 동시에 추가할 수 없으며 이의 지정된 형태 역시 각각을 정확하게 구분할 수 없음을 보여주고 있다. 즉, 소스가 어떤 형태로 지정되어야 하는가의 문제는 소스부로 역할하는 동적성분의 실제적 제약조건과 소스부와 연결된 부하성분의 동적특성에 따라 결정되어야 함을 의미한다. 이와같은 문제는 특히 Dorny에 의하여 소스의 성능특성그래프(source-performance characteristic graph)로 비교적 논리적으로 설명된 바 있다. 끝으로, 에너지 저장요소 이외의 외부소스(external sources)를 갖는 동적시스템인 경우에는 각 소스의 형태에 따라 Fig. 5(a)와 같은 0-접합 또는 (b)와 같은 1-접합에 부착하여 그림에 표시된 등가소스들과 직접 중첩할 수 있음도 아울러 보여주고 있다.

5. 적용 예

앞에서 설명한 표준본드선도와 동적시스템의 관심포트에 대한 등가구조를 제시해 주는 식 (15)와 (16)을 이용하여 일반본드선도로부터 직접 영점 및

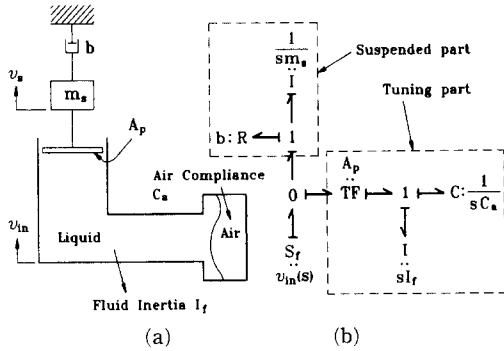


Fig. 6 Schematic diagram and bond graph standard of a passive tuned isolator.

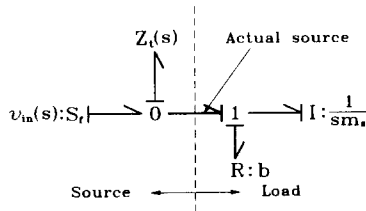


Fig. 7 Reduced bond graph for Fig. 6(b).

극점동역학을 구하는 방법을 실제 예를 통하여 입증해 보기로 한다. Fig. 6(a)는 수동진동흡진기 (passive tuned isolator)⁽⁹⁾의 개략적 모델이고 이의 일반본드선도가 Fig. 6(b)에 나타나 있다.

Fig. 6의 수동진동흡진기는 질량 m_s 가 공진될 때 유체관성 I_f 와 공기 컴플라이언스 C_a 를 조정하여 외부입력 $v_{in}(t)$ 에 대한 m_s 의 진동을 줄이고자 하는 장치이다. 따라서 이 시스템을 해석하기 위한 관심포트는 부상부분(suspended part)의 1-접합에 결합된 m_s 와 관련된 포트가 될 것이다. 먼저, 조정부분(tuning part)의 전체 임피던스는 Fig. 6(b)의 일반본드선도에 표시된 각 기본요소의 임피던스⁽¹⁰⁾를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Z_i(s) = A_p^2 [sI_f + 1/sC_a] \quad (17)$$

다음, Fig. 6(b)로 주어진 수동진동흡진기의 일반본드선도에 식 (17)로 표시된 $Z_i(t)$ 를 삽입하여 다시 구축하면 Fig. 7과 같은 본드선도를 얻을 수 있다.

Fig. 7은 동적시스템을 소스 및 부하로 분해할 때 일반적으로 사용할 수 있도록 본 논문에서 제시한 Fig. 5와는 실제소스가 작력인 반면에 외부소스인 $v_{in}(s)$ 이 흐름으로 부착되어 있다는 점에서 다른 구조를 갖는다. 이는 실제 진동을 조정하는 작

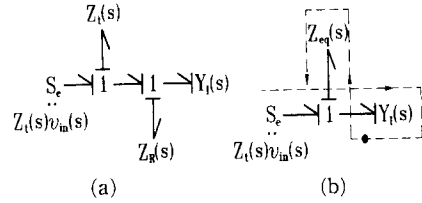


Fig. 8 Further reduced bond graph (a) and its bond graph prototype (b).

력 (isolation force)인 조정부분의 출력이 진동흡진기의 부상부분에 직접 영향을 주기 전에 $v_{in}(s)$ 이외에 또 다른 첨가된 소스에 의해 능동적으로 만들어 질 수 있음을 의미하지만, 본 논문에서는 기존의 일반본드선도에서 전달함수를 직접 구하는 방법에 관심이 있기 때문에 이와같은 능동진동흡진기 (active tuned isolator)에 대한 자세한 구조 및 메카니즘의 설명은 생략하기로 한다. 그렇지만, 본 논문에서 제시한 소스-부하 분해를 통하여 기존의 일반본드선도에서 표준본드선도로 축약해 가는 과정에서 이와같은 다양한 물리적 직관을 부여할 수 있음을 적시하는 것도 큰 의미가 있다. 이제, 식 (15)와 (16)의 등가식을 이용하여 Fig. 7의 0-접합을 1-접합으로 바꾸고자 한다. 이때 부상부분의 진동을 조정해 주는 힘 $e(s)$ 는 m_s 의 운동인 $f(s)$ 항으로 다음과 같이 표시된다.

$$e(s) = Z_i(s) [v_{in}(s) - f(s)] \quad (18)$$

식 (18)은 앞에서 중요하게 언급된 식 (16)과 같은 형태로 이를 이용하여 다시 본드선도를 축약하면 Fig. 8(a)와 같이 구축할 수 있다. 그리고 Fig. 8(a)의 1-접합에 부착된 두 임피던스 $Z_i(s)$ 와 $Z_r(s)$ 를 단순히 중첩하여 본드선도를 다시 그리면 Fig. 8(b)와 같이 나타낼 수 있고, 이때 $Z_{eq}(s)$ 는 다음과 같다.

$$Z_{eq}(s) = A_p^2 [sI_f + 1/sC_a] + b \quad (19)$$

끝으로, Fig. 8(b)는 앞에서 제시한 4개의 표준본드선도 중의 하나와 일치하는 구조이기 때문에 그림에 표시된 일률 흐름 경로와 검은 점으로 나타난 부상부분의 출력에 대한 영점 및 극점동역학을 구할 수 있다. 즉, Fig. 8(b)에서 $Z_{eq}(s) Y_i(s) \rightarrow 0$ 를 만족하게 하는 이 장치의 영점동역학은 다음과 같이 계산된다.

$$s^2 + \frac{A_p^2/m_s C_a}{m_e/m_s} = 0 \quad (20)$$

여기서, $m_e = A_p^2 I_f$ 는 유체관성 I_f 에 의한 등가질량(equivalent mass)을 의미한다. 그리고 이 장치의 극점동역학은 식 (12)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$s^2 + \frac{b/m_s}{1+m_e/m_s}s + \frac{A_b^2/m_s C_a}{1+m_e/m_s} = 0 \quad (21)$$

식 (20)과 (21)은 Fig. 6(a)의 수동진동흡진기에 대한 응답거동을 결정하는 2개의 중요한 특성식(characteristic equations)으로서 이 장치는 식 (20)의 영점동역학으로부터 최소위상 시스템의 특징을 갖고, 또한 식 (21)의 극점동역학으로부터 감쇠 특성을 갖는 안정한 시스템 및 식 (20)과 (21)로부터 상대차수가 0임을 알 수 있다. 아울러, Fig. 6(a)의 수동진동흡진기에 대한 전체 전달함수 $T(s) = v_s(s)/v_{in}(s)$ 는 앞에서 구한 영점 및 극점동역학의 비로서 다음과 같다. 즉,

$$T(s) = \frac{K(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (22)$$

여기서, ω_0 , ζ 및 ω_n 은 식 (20)과 (21)에 의하여 각각 결정될 수 있고, 또한 DC게인 K 는 $s \rightarrow 0$ 일 때의 $Z_i(s) Y_I(s)$ 와 $1 + Z_{eq}(s) Y_I(s)$ 의 비로서 다음과 같이 계산된다.

$$K = \frac{m_e/m_s}{1+m_e/m_s} = \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2 \quad (23)$$

식 (22)와 (23)은 본 논문에서 예로서 인용한 수동진동흡진기가 수록된 논문⁽⁶⁾의 결과와 같다. 그러나 이 논문에서는 기존의 일반본드선도에서 비교적 조직적으로 유도되는 상태공간 모델을 전달함수로의 변환시 간단하면서도 일의적으로 적용할 수 있는 일반적인 방법인 Laplace 변환과 같은 수학적 조작을 이용하였지만, 본 논문에서 수행한 방법은 동적시스템의 실제 물리구조를 표현해 주는 본드선도를 직접 다루었기 때문에 전달함수로의 변환 과정에서 동적시스템에 대한 물리적 직관(physical intuition)을 쉽게 습득할 수 있었다.

6. 결 론

본 논문에서는 동적시스템의 연결성과 인과성을 대표하는 4가지 표준본드선도를 통하여 기존의 일반본드선도로부터 직접 전달함수를 구성하는 영점 및 극점동역학을 찾는 방법을 제시하였다. 또한,

해석될 동적시스템의 일반적인 본드선도 모델이 4가지의 표준본드선도중 하나와 등가구조가 됨을 밝혔다. 이 방법은 복소임피던스법이 동적시스템의 기본요소에 이미 정의되어 있는 수학적 표현식들을 연속적으로 곱하거나 나누어가는 비인과방법(non-causal method)인데 비해 동적시스템의 인과특성을 전혀 상실않는 구조변환을 본드선도에서 직접 수행한다는 점에서 큰 의미가 있고, 또한 기존의 몇몇 방법들이 상태방정식에서 Laplace 변환과 같은 수학적 조작으로 주파수역 전달함수를 유도하는 것과는 달리 동적시스템이 갖는 고유한 연결특성 즉, 0-점합 및 1-점합에 대한 등가구조를 각 변환 단계에서 합당한 물리적 의미를 부여해 가면서 직접 찾을 수 있기 때문에 대상시스템에 대한 공학적 감각(engineering sense)을 더욱 풍성하게 할 수 있는 장점도 있다.

표준본드선도는 처음 톱-다운방식에 의한 동적시스템의 모델링을 위하여 개발되었지만, 지금은 앞서 발표된 몇몇 논문들에서 처럼 동적시스템의 해석 및 종합에도 똑같이 사용할 수 있는 통합도구(unified tools)로의 가능성이 어느 정도 입증되었다고 생각된다. 특히, 본 논문에서 채택한 소스-부하 분해 개념을 이용한 본드선도 축소기법(reduction technique)은 동적시스템의 종합(synthesis)⁽¹⁰⁾을 위하여 제시된 본드선도 확장기법(expansion technique)⁽¹¹⁾과 더불어 거의 수학적 조작없이 동적시스템의 물리구조를 직접 취급한다는 점에서 큰 의미가 있을 것이다. 하지만 표준본드선도가 동적시스템의 모델링, 해석, 종합 및 설계에 일의적으로 적용할 수 있는 완전한 통합도구가 되기 위해서는 이를 동적시스템의 제어분야에 활용할 수 있어야 한다. 이는 본문에서 언급된 4가지 표준본드선도가 일반적인 피드백 및 피드포워드 제어시스템의 구조와 일치하기 때문에 각각에 맞는 최적구조 및 파라미터 선정 알고리즘에 관심을 가지므로써 충분히 가능할 것으로 사료된다.

참고문헌

- (1) Paynter, H., 1961, *Analysis and Design of Engineering Systems*, M. I. T. Press.
- (2) 김종식, 박전수, 1993, "본드선도 모델링방법의 기본개념 및 그 적용 예," 대한기계학회지, 제33권, 제1호, pp. 22~32.

- (3) Karnopp, D. Margolis, D. and Rosenberg, R., 1990, *System Dynamics: A Unified Approach*, John Wiley & Sons, New York.
- (4) Brewer, J., 1974, *Control Systems Analysis, Design, and Simulation*, Prentice-Hall, New Jersey.
- (5) 박전수, 김중식, 1997, “표준분드선도 : 분드선도에 의한 동적시스템의 일반모델,” 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제9호, 1414~1421.
- (6) 박전수, 김중식, 1996, “분드선도로부터 직접 영점 및 극점동역학을 얻는 절차,” 대한기계학회 춘계학술회의 논문집(A), pp. 486~491.
- (7) Redfield, R. and Krishnan, S., 1993, “Dynamic System Synthesis With a Bond Graph Approach,” *ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control*, Vol. 115, pp. 357~363.
- (8) Wu, S. and Toumi, K., 1993, “Identification and Adjustment of Relative Degrees and Zero Dynamics using Bond Graphs,” *Proc. of IFAC*, Vol. 7, pp. 377~380.
- (9) Margolis, D. and Baker, D., 1992, “The Variable Fulcrum Isolator: A Low Power, Nonlinear, Vibration Control Component,” *ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control*, Vol. 114, pp. 148~154.
- (10) Anderson, B. and Vongpanitied, S., 1973, *Network Analysis and Synthesis: A Modern System Theory Approach*, Prentice-Hall, New York.
- (11) 박전수, 김중식, 1996, “분드선도를 이용한 동적시스템의 해석적 종합방법,” 대한기계학회 논문집(A), 제20권, 제11호, pp. 3507~3515.