

열충격하 적층체의 열탄성 구배기능 계면영역을 고려한 동일선상 복수균열 해석

최형집* · 진태은** · 이강용***

(1997년 7월 28일 접수)

Collinear Cracks in a Layered Structure with a Thermoelastically Graded Interfacial Zone under Thermal Shock

Hyung Jip Choi, Tae Eun Jin and Kang Yong Lee

Key Words : Thermal Shock(열충격), Layered Medium(적층체), Collinear Cracks(동일선상 복수균열), Graded Interfacial Zone(구배기능 계면영역), Nonhomogeneity(비균질성), Singular Integral Equations(특이적분방정식), Transient Thermal Stress Intensity Factors(과도열 응력세기계수)

Abstract

In this paper, the thermal shock responses of collinear cracks in a layered medium are investigated based on the uncoupled, quasi-static plane thermoelasticity. The medium is modeled as a bonded structure composed of a surface layer and a semi-infinite substrate. Between these two dissimilar homogeneous constituents, a functionally graded interfacial zone exists with the nonhomogeneous features of continuously varying thermoelastic properties. Three cracks are assumed to be present in the layered medium, one in each one of the constituent materials, aligned collinearly normal to the nominal interfaces. A system of singular integral equations is solved, subjected to the forcing terms of equivalent transient thermal tractions acting on the locations of cracks via superposition. Main results presented are the transient thermal stress intensity factors to illustrate the parametric effects of various geometric and material combinations of the medium with the thermoelastically graded interfacial zone and the collinear cracks.

1. 서 론

급격한 온도변화를 수반하는 열악한 사용조건하의 기계요소 및 부품들은 용융, 부식, 마모, 산화 등의 손상기구로부터 금속 모재를 보호하기 위하여, 흔히 금속 표면에 낮은 열전도율을 가지는 세

라믹을 입혀 열차폐막(thermal barrier coating)의 역할을 부여하고 있다. 이러한 이중 접합재료(bonded dissimilar materials) 형태의 적층체를 활용할 때 제기되는 문제점은 구성재료들 사이의 확연한 열탄성 물성치 차이에 따른 접합부에서의 심각한 잔류 및 열응력 발생이다. 그러나 재료의 물성치가 위치에 따라 연속적으로 변하는 소위 구배기능재료(functionally graded materials)의 개발 및 응용방안이 최근 대두됨에 따라,⁽¹⁾ 비균질 특성의 구배기능 계면영역(graded interfacial zone)을 이중재료

*회원, 계명대학교 기계공학과

**회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

***회원, 연세대학교 기계공학과

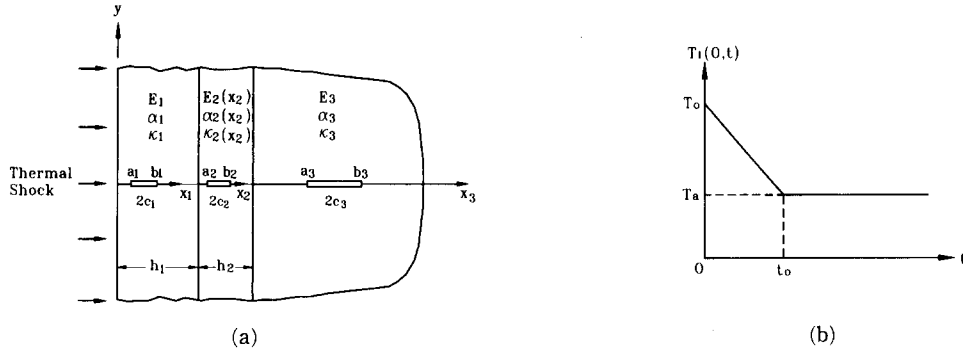


Fig. 1 (a) A layered medium with a graded interfacial zone and three collinear cracks under thermal shock, (b) Temperature change on the surface of the layered medium.

접합시 의도적으로 도입할 경우, 금속 모재와 세라믹 열차폐층 사이의 현격한 물성치 차이를 최소화하여 접합부위에서의 잔류 및 열응력 집중을 완화하고 구성재료들 사이의 접합강도를 증대시킬 수 있다고 보고되고 있다.^(2,3)

물성치의 비균질성을 고려한 접합구조물과 구배 기능재료의 균열에 대한 해석은 Erdogan⁽⁴⁻⁶⁾ 등, Bechel과 Kaw,⁽⁷⁾ Choi,⁽⁸⁻¹⁰⁾ 진태은 등⁽¹¹⁾ 그리고 Gu와 Asaro⁽¹²⁾ 등이 기계적 하중하에서 수행한 바 있다. 이상의 연구들에서는 균열 주위의 탄성계수가 함수형태로서 위치에 따른 연속성을 유지할 때, 기존의 이중재료 사이의 이상적 계면에 의해 야기되는 진동특이성(complex power singularity)⁽¹³⁾ 또는 비역평방특이성(nonsquare-root singularity)⁽¹⁴⁾과 같은 물리적 모순점을 해결하고, 균열형상에 관계없이 균열선단 응력장은 균질재료의 경우와 마찬가지로 역평방특이성이 유지됨을 보였다.

Noda와 Jin,⁽¹⁵⁾ Nemat-Alla와 Noda⁽¹⁶⁾ 및 Erdogan과 Wu⁽¹⁷⁾는 탄성계수와 같이 역시 함수적으로 변화하는 열전도계수와 열팽창계수의 열적 성질을 가정하고, 정상상태(steady state) 열하중하에서 비균질 구배기능재료의 균열문제에 대한 열응력세기계수(thermal stress intensity factors)를 산출하였다. 과도상태(transient state) 열하중하의 구배기능재료에 대한 균열문제 해석은 Noda와 Jin,⁽¹⁸⁾ Jin과 Noda⁽¹⁹⁾ 그리고 Jin과 Batra⁽²⁰⁾ 등이 수행하였다. 이러한 열하중하 구배기능재료와 관련된 해석모델들은, 대상 재료 전체를 하나의 비균질 연속체로 간주하고 하나의 단일 균열이 존재하는 문제에 국한되고 있다. 이밖에도 송준희와 임재규⁽²¹⁾는 구배기능성 세라믹/금속 복합재료의 열충격 파괴특성

을 실험적으로 검토한 바 있다. 한편 참고문헌^(22,23)에서는 적층재료의 열충격 균열문제를 다루었지만, 열탄성 물성치가 계면을 따라 불연속인 경우를 대상으로 하고 있기 때문에 균열선단의 계면 접촉시, 열응력특이성이 비역평방이 되는 문제점을 가지고 있다.

본 논문에서는 갑작스런 냉각의 열충격 조건에서, 구배기능 계면영역이 천이층으로 존재하는 적층체의 복수균열 거동을 선형탄성 파괴역학 관점에서 고찰하였다. 이를 위하여 이중의 균질표면층(surface layer)과 반무한 기층(substrate)이 비균질 계면층을 매개로 접합되어 있다고 가정하였다. 그리고 전체 적층 반무한체를 구성하는 세개의 구성층(constituents) 내부에는 각기 하나씩 모두 세개의 임의길이 동일선상 복수균열(collinear cracks)이 가상계면(nominal interface)에 수직방향으로 존재한다고 간주하였다. 이론 전개는 비연계 준정적 열탄성론(uncoupled, quasi-static thermoelasticity)을 기본으로 하여 관성(inertia)과 열탄성연성(thermoelastic coupling) 효과 및 온도에 대한 물성치의 의존성은 무시하였다. 결국 본 열충격 하중하 복수균열문제는, 중첩원리에 따라, 균열면 위치에 작용하는 등가 과도 열응력을 가중항으로 하여 연립 특이적 분방정식(a system of singular integral equations)의 해를 구하는 것으로 귀결된다. 결과로서 구배기능 계면영역을 고려한 적층체 내부의 동일선상 복수균열에 대한 과도 열응력세기계수를 문제의 기하학적 형상과 열탄성 물성치 조합에 대한 시간의 함수로 산출하여 균열들 사이의 상호작용과 함께 검토하였다.

2. 문제의 정의

이중의 균질 특성을 가지는 두께 h_1 의 표면층과 반부한 기층이 비균질 열탄성 물성치를 가지는 두께 h_2 의 구배기능 계면층을 매개로 Fig.1(a)와 같이 접합되어 있다. 세개의 구성층 내부에는 각각 길이 $2c_k = b_k - a_k$, $k=1, 2, 3$ 인 균열이 가상계면에 수직인 방향으로 동일선상에 존재한다. 열전도계수, 탄성계수, 열팽창계수는 x_k, E_k, α_k , $k=1, 2, 3$ 으로 나타내며 열확산계수는 $D_k = x_k / \rho_k s_k$, $k=1, 2, 3$ 이다. 여기서 ρ_k 와 s_k 는 각각 재료의 밀도와 비열이다.

과도 열하중조건으로서, 초기에 균일한 응력부재(stress-free) 온도 T_0 에 놓여있는 전체 적층체는 표면 $x=0$ 에서 Fig.1(b)와 같이 t_0 의 온도변화기간(ramp duration) 동안 T_a 의 온도로 냉각된다. 이때 $t_0=0$ 은 순간적 냉각에 의한 열충격에 해당된다. 균열의 배열과 열하중의 작용방향이 일치하므로, 균열로 인한 물체 내부의 온도장 교란은 발생하지 않으며, 따라서 온도분포는 일차원으로 나타난다. 결국 중첩원리에 의하여, 균열이 존재하지 않을 때의 외부 열충격으로 인한 과도 열응력분포로부터, 가상의 균열면 위치에 작용하는 응력벡터의 부호를 반대로 하여 본 동일선상 복수균열문제의 등가 균열면 조건으로 적용한다.

구배기능 계면층의 비균질 열탄성 물성치는 다음과 같이 지수함수적으로 나타낸다.^(18,19)

$$\begin{aligned} x_2(x) &= x_0 e^{\delta x} \\ E_2(x) &= E_0 e^{\beta x} \\ \alpha_2(x) &= \alpha_0 e^{\gamma x} \end{aligned} \quad (1)$$

이때 가상계면을 통한 물성치의 연속성을 국부좌표계 $(x, y) = (x_k, y)$, $k=1, 2, 3$ 에서 감안하면 $x_0 = x_1$, $E_0 = E_1$, $\alpha_0 = \alpha_1$ 이고, 비균질 파라미터(nonhomogeneity parameter) δ, β, γ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{h_2} \ln\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \\ \beta &= \frac{1}{h_2} \ln\left(\frac{E_3}{E_1}\right) \\ \gamma &= \frac{1}{h_2} \ln\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

한편 비균질체의 가변적 푸아송비^(5,6,10)와 열확산계수⁽¹⁸⁻²⁰⁾가 균열선단에 미치는 영향은 무시할 수 있다는 기존 연구결과에 근거하여, 푸아송비는 ν

$= \nu_k$, $k=1, 2, 3$ 과 같이 모두 동일한 값으로 가정하며, 계면층의 열확산계수 D_2 역시 해석의 편의상 상수로 가정한다.

3. 과도 온도 및 열응력분포

식(1)의 비균질 열적 성질에 대한 과도 열전도 지배방정식은 다음과 같다.

$$\delta \frac{\partial \theta_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2} = \frac{1}{D_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}; k=1, 2, 3 \quad (3)$$

여기서, $\theta_k(x, t) = T_k(x, t) - T_0$ 이고, $T_k(x, t)$ 는 시간 t 에서의 온도를 나타내며, 균질의 구성층인 경우($k=1, 3$) $\delta=0$ 이다.

적층체의 온도분포에 대한 초기 및 경계조건은 $(x, y) = (x_k, y)$, $k=1, 2, 3$ 의 국부좌표계에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_k(x_k, 0) &= 0; 0 \leq x_k \leq h_k \\ k &= 1, 2, 0 \leq x_3 < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

$$\theta_k^-(t) = \theta_{app}(t); t \geq 0 \quad (5)$$

$$\theta_k^+(t) = \theta_{k+1}(t); k=1, 2, t \geq 0 \quad (6)$$

$$x_k \frac{\partial \theta_k^+(t)}{\partial x_k} = x_{k+1} \frac{\partial \theta_{k+1}^-(t)}{\partial x_k}; k=1, 2, t \geq 0 \quad (7)$$

$$\theta_3^+(x_3, t) \rightarrow 0; x_3 \rightarrow \infty, t \geq 0 \quad (8)$$

여기서, 상첨자 $-/+$ 는 구성층의 왼쪽/오른쪽 표면을 지칭하며, $\theta_{app}(t)$ 는 적층체의 표면 $x=0$ 에 작용하는 외부 온도변화를 나타내는 함수이다.

$$\begin{aligned} \theta_{app}(t) &= \frac{\Delta \theta}{t_0} [tH(t) - (t-t_0)H(t-t_0)] \\ \theta_{app}(t) &= \Delta \theta H(t) \end{aligned} \quad (9)$$

위에서 첫번째 식은 Fig.1(b)와 같은 경사형(ramp) 온도변화($t_0 > 0$), 두번째 식은 계단형(step) 온도변화($t_0 = 0$), $\Delta \theta = T_a - T_0$ 그리고 $H(t)$ 는 Heaviside 계단함수이다.

p 를 변환변수로 하는 Laplace 변환에 따라

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_k(x_k, p) &= \int_0^\infty \theta_k(x_k, t) e^{-pt} dt \\ &; k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (10)$$

변환영역에서의 온도장에 대한 일반해는 다음과 같이 얻어진다.

$$\bar{\theta}_k(x_k, p) = A_k \exp\left(-\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{p}{D_k}}\right) x_k$$

$$+ B_k \exp\left(-\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{p}{D_k}}\right) x_k$$

$$; k=1, 2, 3 \quad (11)$$

여기서, $A_k(p)$ 와 $B_k(p)$, $k=1, 2, 3$ 은 임의 미지함수로서, 식 (4)~(8)을 적용하여 결정할 수 있다.

상기의 미지함수를 구한 후, 실시간 영역에서의 온도분포 $\theta_k(x_k, t)$, $k=1, 2, 3$ 은 아래의 Laplace 역변환 공식에 따라 산출한다. (24)

$$\theta_k(x_k, t) \cong \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^M V_n \bar{\theta}_k(x_k, \frac{n}{t} \ln 2)$$

$$; k=1, 2, 3, t > 0 \quad (12)$$

위에서 M 은 양의 값을 갖는 짝수이며, V_n 은 다음과 같다.

$$V_n = (-1)^{n+M/2} \sum_{k=(n+1)/2}^{\min(n, M/2)} \frac{k^{M/2} (2k)!}{(M/2-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}$$

$$(13)$$

식 (4)~(8)과 같은 초기 및 경계조건하의 균열 부재 적층체에 대해서, 물체의 표면은 응력부재(traction-free)이고 x 와 t 가 유일한 독립변수이므로, 적층체는 y 축과 z 축 방향으로 구속되어 있고 x 축 방향으로 구속이 없다고 간주할 수 있다. 이때 식 (12)의 과도 온도분포로 인한 열응력장은 다음과 같다. (25)

$$\sigma_{kxx}(x_k, t) = \tau_{kxy}(x_k, t)$$

$$= \tau_{kxz}(x_k, t)$$

$$= \tau_{kyz}(x_k, t)$$

$$= 0; k=1, 2, 3 \quad (14)$$

$$\sigma_{1yy}(x_1, t) = \sigma_{1zz}(x_1, t)$$

$$= -\frac{E_1 \alpha_1 \theta_1(x_1, t)}{1-\nu}; 0 \leq x_1 \leq h_1 \quad (15)$$

$$\sigma_{2yy}(x_2, t) = \sigma_{2zz}(x_2, t)$$

$$= -\frac{E_0 \alpha_0 e^{(\beta+n)x_2} \theta_2(x_2, t)}{1-\nu}; 0 \leq x_2 \leq h_2 \quad (16)$$

$$\sigma_{3yy}(x_3, t) = \sigma_{3zz}(x_3, t)$$

$$= -\frac{E_3 \alpha_3 \theta_3(x_3, t)}{1-\nu}; x_3 \geq 0 \quad (17)$$

4. 균열문제 해석

본 연구의 열충격하 균열문제는 실제 균열면 응

력벡터가 영의 값을 가진다. 이때 증첩원리에 따라, 등가 과도 열응력 $\sigma_{Tk}(x_k, t)$, $k=1, 2, 3$ 은 유일한 외 부하중으로 균열면 위치에 작용하며, 식 (15)~(17)로부터 다음과 같이 보정한다.

$$\sigma_{Tk}(x_k, t) = -\sigma_{kyy}(x_k, t); a_k \leq x_k \leq b_k,$$

$$k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (18)$$

결국 등온의 준정적 문제로 취급하여, $u_k(x, y, t)$ 와 $v_k(x, y, t)$, $k=1, 2, 3$ 을 구성층의 x 축 및 y 축 방향 변위성분으로 놓으면, 식 (1)의 비균질 탄성 계수에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$(x-1)\nabla^2 u_k + 2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ \beta\left[(1+x)\frac{\partial u_k}{\partial x} + (3-x)\frac{\partial v_k}{\partial y}\right] = 0 \quad (19)$$

$$(x-1)\nabla^2 v_k + 2\left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ \beta(x-1)\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y}\right) = 0; k=1, 2, 3 \quad (20)$$

여기서, 평면변형률상태에서는 $x=(3-4\nu)$, 평면 응력상태에서는 $x=(3-\nu)/(1+\nu)$ 이다. 그리고 균질의 표면층($k=1$)과 기층($k=3$)에 대해서 $\beta=0$ 이고 비균질의 계면층($k=2$)에 대해서는 β 가 식 (2)에 정의된다.

균열면을 중심으로 한 대칭성으로부터, 관련 균일 경계 및 계면조건은 시간 $t \geq 0$ 에 대해 다음과 같고

$$\sigma_{1xx}(y, t) = 0, \tau_{1xy}(y, t) = 0; y \geq 0 \quad (21)$$

$$u_k^+(y, t) = u_{k+1}^-(y, t)$$

$$u_k^+(y, t) = v_{k+1}^-(y, t); k=1, 2, y \geq 0 \quad (22)$$

$$\sigma_{kxx}^+(y, t) = \sigma_{(k+1)xx}^-(y, t)$$

$$\tau_{kxy}^-(y, t) = \tau_{(k+1)xy}^-(y, t); k=1, 2, y \geq 0 \quad (23)$$

$$\tau_{kxy}(x_k, 0, t) = 0; 0 \leq x_k \leq h_k, k=1, 2 \quad (24)$$

$$\tau_{3xy}(x_3, 0, t) = 0; x_3 \geq 0 \quad (25)$$

$$u_k(x_k, y, t) \rightarrow 0,$$

$$v_k(x_k, y, t) \rightarrow 0; k=1, 2, 3, y \rightarrow \infty \quad (26)$$

$$u_3^+(x_3, y, t) \rightarrow 0,$$

$$v_3^+(x_3, y, t) \rightarrow 0; x_3 \rightarrow \infty \quad (27)$$

복수균열이 포함된 $y=0$ 평면에서의 혼합조건(mixed conditions)은 아래와 같이 주어진다.

$$v_k(x_k, 0, t) = 0; 0 \leq x_k \leq a_k, b_k \leq x_k \leq h_k,$$

$$k=1, 2 \quad (28)$$

$$v_3(x_3, 0, t) = 0; 0 \leq x_3 \leq a_3, x_3 \geq b_3 \quad (29)$$

$$\sigma_{kyy}(x_k, 0, t) = \sigma_{Tk}(x_k, t) ; a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k=1, 2, 3 \quad (30)$$

식 (19)와 식 (20)의 일반해로서, 변위성분 u_k 와 v_k 는 다음의 Fourier 적분형태로 나타낸다.⁽²⁶⁾

$$u_k(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{u}_{ak}(x, s, t) \cos sy \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{u}_{bk}(s, y, t) e^{-isx} \, ds \quad (31)$$

$$v_k(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}_{ak}(x, s, t) \sin sy \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{v}_{bk}(s, y, t) e^{-isx} \, ds ; k=1, 2, 3 \quad (32)$$

위에서 \bar{u}_a , \bar{u}_b 및 \bar{v}_a , \bar{v}_b 는 상기의 관계를 식 (19)와 식 (20)에 대입한 후 얻어지는 연립 상미분 방정식의 일반해로서 결정되며,⁽¹¹⁾ 응력성분은 다음의 구성방정식에서 구할 수 있다.

$$\sigma_{kxx} = \frac{\mu_k}{x-1} \left[(1+x) \frac{\partial u_k}{\partial x} + (3-x) \frac{\partial v_k}{\partial y} \right] \quad (33)$$

$$\sigma_{kyy} = \frac{\mu_k}{x-1} \left[(3-x) \frac{\partial u_k}{\partial x} + (1+x) \frac{\partial v_k}{\partial y} \right] \quad (34)$$

$$\tau_{kxy} = \mu_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) ; k=1, 2, 3 \quad (35)$$

여기서, $\mu_k = E_k/2(1+\nu)$, $k=1, 3$ 과 $\mu_2 = E_0 \exp(\beta x)/2(1+\nu)$ 는 전단계수를 나타낸다.

이상과 같이 세개의 구성층으로 이루어진 적층체의 변위와 응력성분에 대한 일반해는 총 24개의 미지함수들을 일종의 적분상수로서 포함하고 있다. 이들중 21개의 미지함수들은 일단의 균열조건(homogeneous conditions)인 식 (21)~(27)을 적용하여 구할 수 있으며, 나머지는 균열면 $y=0$ 에서의 혼합경계조건인 식 (28)~(30)을 적용하여 구할 수 있다.

열충격 하중하 적층체의 동일선상 복수균열에 대한 해석은, 준정적상태를 가정하므로, 해당 특이적분방정식은 외부의 기계적 인장하중을 가정한 경우와 실질적으로 같다. 단, 여기서는 계면층이 탄성계수뿐만 아니라 열전도와 열팽창계수의 열적 성질까지도 비균질 구배기능 특성을 가지고 있으며, 식 (18)의 균열면 등가 과도 열응력 $\sigma_{Tk}(x_k, t)$, $k=1, 2, 3$ 이 가중항으로서 외부의 유일한 하중으로 작용한다는 차이점이 있다.

따라서 아래와 같이 미지의 새로운 보조함수를 정의하고

$$\frac{\partial}{\partial x_k} v_k(x_k, 0, t) = \phi_k(x_k, t) ; a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (36)$$

점근적 방법에 따라 특이항을 분리하면, 본 연구의 열충격 하중하 혼합경계치 균열문제는 다음과 같은 형태의 연립 특이적분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^3 \int_{a_j}^{b_j} \left[\frac{\delta_{kj}}{r-x_k} + p_{kj}(x_k, r) \right] \phi_j(r, t) \, dr = \frac{\pi(x+1)}{4\mu_k} \sigma_{Tk}(x_k, t) ; a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (37)$$

여기서, δ_{kj} 는 Kronecker Delta이고, $p_{kj}(x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 은 무한적분 형태의 적분핵(kernel)으로 적층체의 기하학적 형상과 탄성계수, 푸아송비와 같은 기계적 물성치의 함수이다. 상기 적분핵의 수식적 표현과 적분방정식 유도에 수반되는 그 밖의 구체적 절차는 이전 논문⁽¹¹⁾에서 찾을 수 있다.

한편 식 (37)에서 시간항 t 는 우변의 가중항에만 포함되고 적분핵은 시간에 무관하므로, 적분방정식의 해는 주어진 시간 t 에 대하여 각기 독립적으로 구할 수 있다. 동시에 이러한 해는 다음의 균열면 외부의 변위성분에 대한 적합조건을 만족해야 한다.

$$\int_{a_k}^{b_k} \phi_k(r, t) \, dr = 0 ; k=1, 2, 3 \quad (38)$$

각 균열의 선단이 가상계면 위치인 $x_1=h_1$ ($x_2=0$) 또는 $x_2=h_2$ ($x_3=0$)에 도달하지 않은 경우, 상기 연립 적분방정식의 특이거동은 Cauchy형 적분핵 $1/(r-x_k)$ 에만 기인하므로, $p_{kj}(x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 은 폐구간 $[a_k, b_k]$ 에서의 유한한 Fredholm 적분핵으로 정의된다. 이때 균열선단 응력장은 역평방 특이성을 갖게 된다.⁽²⁷⁾ 반면에 균열선단이 가상계면과 접촉하는 경우, 적분핵 $p_{kj}(x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 은 대수특이성(logarithmic singularity)을 나타낸다. 그러나 이러한 특이성은 Cauchy형 특이적분핵과 함께 공존할 때, 유한한 Fredholm 적분핵의 일부로 취급할 수 있기 때문에, 균열선단에서의 특이 응력장은 역평방형태를 계속 유지한다.⁽⁴⁾

결국 Cauchy형 특이적분핵은 위의 두 가지 상황에 대하여 공히 지배적 특이항으로 작용하므로, 연립 적분방정식의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁷⁾

$$\phi_k(r, t) = \frac{g_k(r, t)}{\sqrt{(r-a_k)(b_k-r)}}; a_k < r < b_k, \\ k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (39)$$

여기서, $g_k(r, t)$, $k=1, 2, 3$ 은 유한한 함수로서 $r = a_k$ 과 $r = b_k$ 에서 영이 아니다.

독립변수들을 단위구간으로 치환시키면

$$\left\{ \frac{r}{x_k} \right\} = \frac{b_k - a_k}{2} \left\{ \frac{\eta}{\xi_k} \right\} + \frac{b_k + a_k}{2}; -1 < (\eta, \xi_k) < 1, \\ k=1, 2, 3 \quad (40)$$

보조함수 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 은 새로운 구간에서 다음의 급수형태로 전개할 수 있다.

$$\phi_k(\eta, t) = \frac{2}{b_k - a_k} \frac{g_k(\eta, t)}{\sqrt{1 - \eta^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn}(t) T_n(\eta); |\eta| < 1, \\ k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (41)$$

여기서, c_{kn} , $k=1, 2, 3$, $n \geq 0$ 은 미지계수이고, T_n 은 제1종 Chebyshev 다항식이다. 이때 식 (41)과 T_n 의 직교성으로부터 식 (38)의 적합조건은 $c_{k0} = 0$, $k=1, 2, 3$ 이면 만족됨을 알 수 있다.

식 (41)을 식 (37)에 대입한 후, Chebyshev 다항식의 관련 공식을 이용하면 적분방정식의 특이성을 제거할 수 있다.⁽¹¹⁾ 이어서 미지계수 c_{kn} , $k=1, 2, 3$, $1 \leq n \leq N$ 에 대한 일차연립방정식을 구성하기 위하여 선정법(collocation method)을 적용한다. 본 균열문제에서는 해의 수렴성을 높이기 위하여 끝단의 특이점 $\xi_k = \pm 1$ 부근에서 밀도가 높은 N 차 제1종 Chebyshev 다항식 T_n 의 근을 선정점(collocation points)으로 선택한다.

$$T_N(\xi_{ki}) = 0 \\ \xi_{ki} = \cos \left[\frac{\pi(2i-1)}{2N} \right] \\ ; k=1, 2, 3, i=1, 2, \dots, N \quad (42)$$

이와 같이 c_{kn} 를 미지수로 하는 $3N \times 3N$ 의 일차연립방정식을 구성할 수 있으며, 이때 식 (41)의 급수전개 항수 N 은 해의 정확성을 위하여 충분히 커야 한다.

적분방정식의 해로서 미지계수 값들이 결정되면, 식 (37)의 좌변은 균열선단 $|\xi_k| > 1$ 의 특이 트렉션 $\sigma_{kyy}(\xi_k, 0, t)$, $k=1, 2, 3$ 을 제공한다. 따라서 열충격으로 인한 균열선단 a_k 와 b_k , $k=1, 2, 3$ 에서의 열림형 과도 열응력세기계수 $K(a_k)$ 와 $K(b_k)$ 는 다

음과 같이 정의된다.

$$K(a_k) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} \sqrt{2(a_k - x_k)} \sigma_{kyy}(x_k, 0, t) \\ ; x_k < a_k \quad (43)$$

$$K(b_k) = \lim_{x_k \rightarrow b_k} \sqrt{2(x_k - b_k)} \sigma_{kyy}(x_k, 0, t) \\ ; x_k > b_k, k=1, 2, 3, t \geq 0 \quad (44)$$

여기서 언급할 것은 비균질 계면층을 통한 적층체의 열탄성 물성치 연속성으로, 가상계면 위치의 응력성분도 $\sigma_{kyy}^+(y, t) = \sigma_{(k+1)yy}^-(y, t)$, $y \geq 0$, $k=1, 2$ 와 같이 연속이다. 이에 따라 위의 응력세기계수에 대한 정의는 균열선단이 가상계면 위치에 접촉하는 경우에도 적용됨을 알 수 있다.

결국 균질의 표면층과 기층에 위치한 균열의 과도 열응력세기계수는 연립 적분방정식의 해의 항으로 다음과 같이 산출할 수 있으며

$$K(a_k) = \frac{4\mu_k}{1+\chi} \sqrt{\frac{b_k - a_k}{2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n c_{kn}; k=1, 3 \quad (45)$$

$$K(b_k) = -\frac{4\mu_k}{1+\chi} \sqrt{\frac{b_k - a_k}{2}} \sum_{n=1}^N c_{kn}; k=1, 3 \quad (46)$$

비균질 계면층 내부의 균열에 대한 응력세기계수도 아래와 같이 산출된다.

$$K(a_2) = \frac{4\mu_o e^{\beta a_2}}{1+\chi} \sqrt{\frac{b_2 - a_2}{2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n c_{2n} \quad (47)$$

$$K(b_2) = -\frac{4\mu_o e^{\beta b_2}}{1+\chi} \sqrt{\frac{b_2 - a_2}{2}} \sum_{n=1}^N c_{2n} \quad (48)$$

여기서, $\mu_o = E_o/2(1+\nu)$ 이다.

5. 결과 및 고찰

열충격하 적층체의 동일선상 복수균열 거동을 구체적으로 분석 검토하기 위해, 다음의 열탄성 물성치와 기하학적 조건을 평면변형상태에서 우선 고려하였다.

$$x_3/x_1 = 3.385, D_3/D_1 = 4.070, \alpha_3/\alpha_1 = 2.294, \\ E_3/E_1 = 0.611, \nu_1/\nu_3 = 1.0, h_2/h_1 = 2 \quad (49)$$

상기 물성치 조합은 금속기층 표면에 세라믹 층을 입힌 세라믹/금속 접합체의 열탄성 물성치 비에 해당되며,⁽²²⁾ 푸아송비는 $\nu = \nu_k = 0.3$, $k=1, 2, 3$ 이다. 한편 비균질 계면층의 열전도계수, 탄성계수, 열팽창계수는 식 (1)과 같은 지수함수 형태이며, 열화

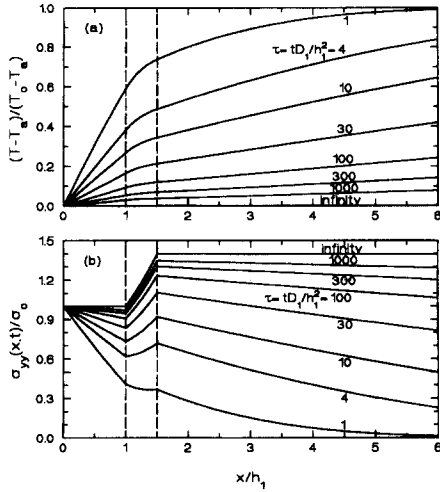


Fig. 2 Transient temperature and thermal stress distributions for $\tau_0 = t_0 D_1 / h_1^2 = 0$ where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta \theta / (1 - \nu)$.

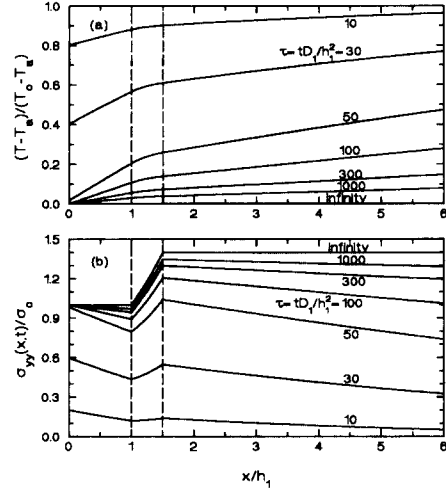


Fig. 3 Transient temperature and thermal stress distributions for $\tau_0 = t_0 D_1 / h_1^2 = 50$ where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta \theta / (1 - \nu)$.

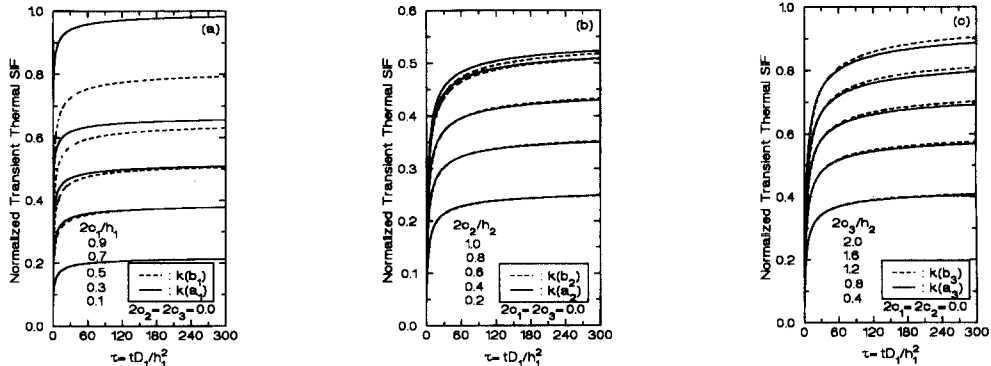


Fig. 4 Normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 h_1^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 h_1^{1/2}$, $k = 1, 2, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta \theta / (1 - \nu)$ for different sizes of a single crack.

산계수는 인접 세라믹층과 금속기층의 열확산계수에 대한 평균치로 가정하였다.

실시간 온도와 열응력 분포를 구하기 위한 Laplace 역변환은 식 (12)에서 $M=14$ 항까지 전개하여 수행하였다. 식 (18)의 균열면 등가 과도 열응력을 가중항으로 하는 연립 적분방정식의 해는 식 (41)과 식 (42)에서 최대 $N=20$ 항까지 전개하여 정확한 수렴해를 얻을 수 있었다.

균열부재시, 적층체 표면온도의 계단형 ($t_0=0$)과 경사형 ($t_0>0$) 변화로 인한 내부 온도 및 열응력 분포는 Fig. 2와 Fig. 3에서 보이고 있다. 여기서 수직점선은 가상계면의 위치, $\tau = t D_1 / h_1^2$ 는 무차원 시

간으로서 Fourier수⁽²⁵⁾ 그리고 $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta \theta / (1 - \nu)$ 이다. Fig. 3에서 무차원 경사형 온도변화기간은 $\tau_0 = t_0 D_1 / h_1^2 = 50$ 로 하였다. 위의 결과에서 열충격으로 인해 적층체 내부에 발생한 인장응력은 비균질 계면층의 존재로 인하여 연속적 분포임을 알 수 있다. 또한 열충격 이후 시간경과에 따라, 이러한 열응력분포는 초기온도와 내부 발생온도와의 증대하는 차이에 비례하여 더욱 가혹해지며, 결국 두 가지 형태의 외부 온도변화에 대하여 공히 정상상태의 동일한 잔류응력값에 접근함을 보인다.

이어서 Fig. 4(a)~4(c)에서는 한 개의 균열이 적층체에 내재하고 있는 경우, 계단형 ($\tau_0=0$) 열충

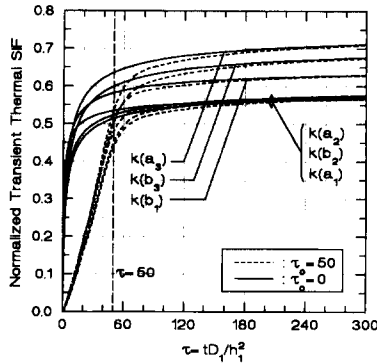


Fig. 5 Normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k)/\sigma_0 h_1^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k)/\sigma_0 h_1^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta\theta / (1-\nu)$ for three collinear cracks of $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ and $2c_3/h_2 = 1.0$.

격으로 인한 열응력세기계수 변화를 무차원 시간의 함수로 보이고 있다. 여기서, Fig. 4(a)는 균열의 표면층에만 한 개의 균열이 있으며 ($a_1 \neq b_1$, $a_k = b_k$, $k=2, 3$) 오른쪽 균열선단 b_1 이 가상계면 $x_1 = h_1$ 에 접촉하고 있을 때, Fig. 4(b)는 비균질 계면층의 중심 $x_2 = h_2/2$ 에 한 개의 균열이 있을 때 ($a_2 \neq b_2$, $a_k = b_k$, $k=1, 3$), 그리고 Fig. 4(c)는 균질의 반무한 기층에만 한 개의 균열이 존재하며 ($a_3 \neq b_3$, $a_k = b_k$, $k=1, 2$) 왼쪽 균열선단 a_3 이 가상계면 $x_3 = 0$ 에 접촉하고 있는 경우에 대한 결과이다. 위의 세 가지 경우 모두, 해당 응력세기계수는 비교를 위하여 동일한 값인 $K_0 = \sigma_0 h_1^{1/2}$ 로 무차원화 하였다. 결과로서 균열길이에 비례하는 각 균열선단의 응력세기계수는, 앞서 Fig. 2에서 보인 열충격 이후의 신속한 응력장 형성에 따라, 초반에 가파른 증가를 나타내다 결국 정상상태로 수렴하는 경향을 주고 있다.

각 구성층 내부에 각기 하나씩 모두 세개의 동일선상 복수균열이 $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ 와 $2c_3/h_2 = 1.0$ 으로 존재하는 경우, Fig. 5는 계단형 ($\tau_0 = 0$)과 경사형 ($\tau_0 = 50$) 두 가지 온도강하에 대해 각각 실선과 점선으로 결과를 보이고 있다. 여기서도 무차원 응력세기계수는 $K_0 = \sigma_0 h_1^{1/2}$ 이며, 두 균열선단 b_1 과 a_3 은 각각 $x_1 = h_1$ 과 $x_3 = 0$ 의 가상계면에 접촉하고 있고, 계면층 내의 균열은 $x_2 = h_2/2$ 의 중심위치에 놓여있다. 위의 결과로부터 주목할 점은 세라믹층과 비교하여 상대적으로 강성이 낮은 금속기층 내 균열이 그 밖의 구성층에 존재하는 균열들 보다

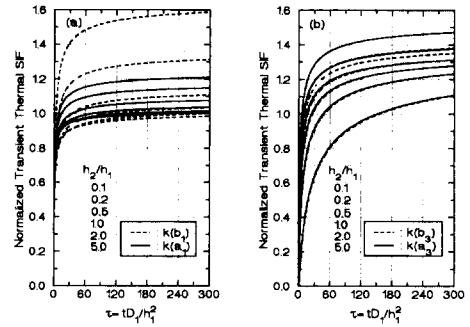


Fig. 6 Effect of layer thicknesses, h_2/h_1 , on the normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta\theta / (1-\nu)$ for two collinear cracks of $2c_1/h_1 = 2c_3/h_1 = 0.5$ and $2c_2 = 0.0$.

더욱 가혹한 특이응력상태에 있다는 것이다. 이는 금속기층 열탄성 물성치의 복합적 영향에 기인함으로 파악되며, 기계적 하중만을 고려한 기존의 연구 결과에서, ⁽¹¹⁾ 적층체의 강성이 높은 곳에 위치한 균열이 더 큰 응력세기계수를 갖는 예와 좋은 대비를 이룬다. 이 밖에도 균열들 사이의 상호영향으로 인하여, 복수균열에 대한 응력세기계수는 Fig. 4의 단일균열에 대한 결과와 비교하여 증대됨을 알 수 있다. 그리고 $\tau_0 = 50$ 의 경사형 온도강하 조건하의 응력세기계수가 $\tau_0 = 0$ 의 계단형 조건하의 결과와 비교하여 초반 $\tau < \tau_0$ 의 무차원 시간대에서 두드러지게 낮음을 알 수 있다.

Fig. 6은 비균질 계면층의 두께변화 h_2/h_1 로 인한 영향을 계단형 ($\tau_0 = 0$) 온도강하 조건에 대해 보이고 있다. 관련 균열형상으로서 균질의 표면층과 기층 내부에 각기 하나씩 모두 두개의 동일선상 복수균열을 $2c_1/h_1 = 2c_3/h_1 = 0.5$ 로 가정하였고, 균열선단 b_1 과 a_3 은 각각 $x_1 = h_1$ 과 $x_3 = 0$ 의 가상계면에 접촉시켰다. 이 경우 응력세기계수는 $K_0 = \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 3$ 으로 무차원화 하였다. 여기서는 계면층의 두께증가에 따라 균열들 사이의 상호영향이 감소하므로 과도 열응력세기계수의 크기는 h_2/h_1 에 대해 전반적으로 반비례함을 나타낸다.

적층체의 열탄성 물성치 변화가 동일선상 복수균열의 열충격 ($\tau_0 = 0$) 거동에 미치는 영향을 검토하기 위하여, 열전도계수비 λ_3/λ_1 , 탄성계수비 E_3/E_1 및 열팽창계수비 α_3/α_1 을 각각 변화시켜 그 결과를 Figs. 7~9에 제시하였다. 여기서 균열의 크기와 위

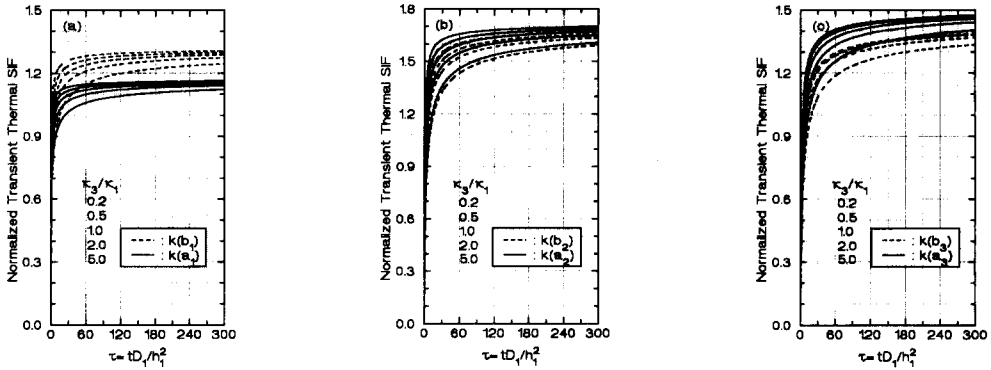


Fig. 7 Effect of thermal conductivity coefficients κ_3/κ_1 on the normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta\theta (1-\nu)$ for three collinear cracks of $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ and $2c_3/h_2 = 1.0$.

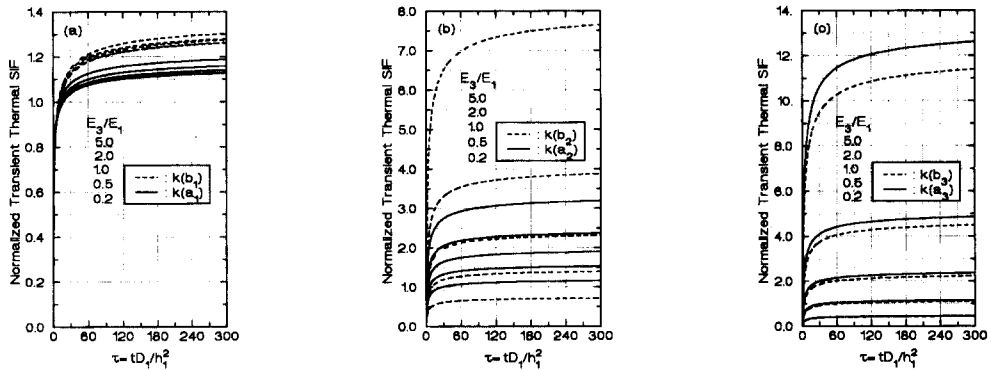


Fig. 8 Effect of elastic moduli E_3/E_1 on the normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta\theta / (1-\nu)$ for three collinear cracks of $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ and $2c_3/h_2 = 1.0$.

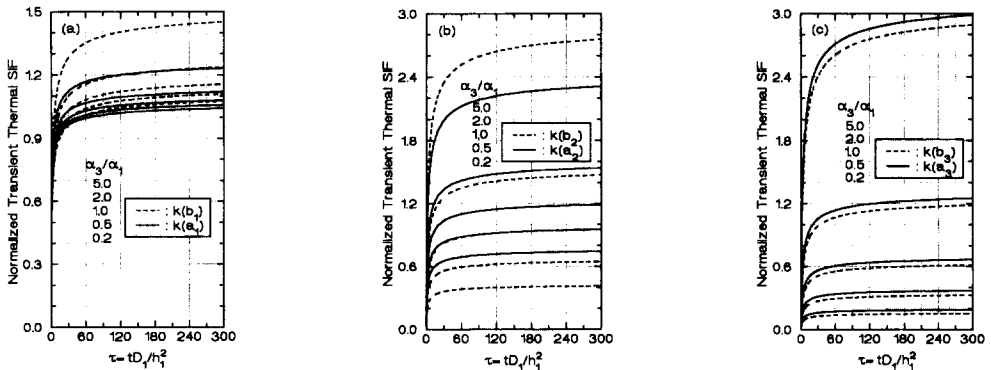


Fig. 9 Effect of thermal expansion coefficients α_3/α_1 on the normalized transient thermal stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k)/\sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, where $\sigma_0 = -E_1 \alpha_1 \Delta\theta / (1-\nu)$ for three collinear cracks of $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ and $2c_3/h_2 = 1.0$.

치는 Fig. 5의 경우와 동일하게 하였고, 각 균열의 무차원 응력세기계수는 $K_0 = \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$ 으로

하였다. 우선 Fig. 7에서 보면, 열전도계수만 변화시키고 나머지 물성치는 식 (49)와 같다고 놓았을

때, 즉 열차폐막 역할을 하는 표면층의 열전도계수 저하는 (x_3/x_1 의 증가) 모든 균열선단에서의 응력세기계수 크기를 낮추는 효과가 있음을 알 수 있다. 그러나 Fig. 8과 Fig. 9에서와 같이 표면층의 강성이나 열팽창계수를 저하시켰을 경우 (E_3/E_1 또는 α_3/α_1 의 증가), 균열선단의 거동이 이러한 물성치의 변화에 대하여 상당히 민감하게 반응하면서 해당 특이응력상태가 큰 폭으로 심화됨을 보인다. 특히 기층 내부에 위치한 균열의 응력세기계수가 가장 민감함을 나타낸다.

6. 결 론

적층체를 구성하는 이중의 균질표면층과 반무한 기층 사이에 열탄성 구배기능 계면영역을 비균질층으로 도입하여, 열충격 하중하의 동일선상 복수균열에 대한 해를 과도 열탄성론과 선형탄성 파괴역학 관점에서 도출하였다. 이에 따라 균열면 위치에 작용하는 등가 과도 열응력을 중첩원리에 따른 가중항으로 하여 연립 특이적분방정식의 해를 구한 후, 문제의 여러 가지 기하학적 형상과 물성치 조합에 대해 과도 열응력세기계수를 제시하였다. 결과로서 탄성계수와 열팽창계수의 변화가 열전도계수의 변화와 비교하여 복수균열의 열충격 거동에 더 주목할 만한 영향을 주고 있음을 보였다. 한편 표면층의 탄성계수 또는 열팽창계수 저하는 특히 반무한 기층에 존재하는 균열에 대하여 과도 열응력세기계수를 큰 폭으로 증대시킴을 나타내었다. 반면에 표면층의 열전도계수 저하는 복수균열 선단에서의 특이 열응력상태를 어느 정도 완화시키는 효과가 있음을 보였다.

참고문헌

- (1) Koizumi, M., 1993, "The Concept of FGM," *Ceramic Transactions : Functionally Gradient Materials* (Edited by J. B. Holt, et al), *American Ceramic Society*, Westerville, Ohio, Vol. 34, pp. 3~10.
- (2) Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F. and Sugano, Y., 1993, "An Improved Solution to Thermoelastic Material Design in Functionally Gradient Materials : Scheme to Reduce Thermal Stresses," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 109, pp. 377~389.
- (3) Lee, Y. -D. and Erdogan, F., 1995, "Residual/Thermal Stresses in FGM and Laminated Thermal Barrier Coatings," *International of Journal Fracture*, Vol. 69, pp. 145~165.
- (4) Erdogan, F., Kaya, A. C. and Joseph, P. F., 1991, "The Mode III Crack Problem in Bonded Materials with a Nonhomogeneous Interfacial Zone," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 419~427.
- (5) Erdogan, F., 1995, "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials," *Composites Engineering*, Vol. 5, pp. 753~770.
- (6) Ozturk, M. and Erdogan, F., 1996, "Axisymmetric Crack Problem in Bonded Materials with a Graded Interfacial Region," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 193~220.
- (7) Bechel, V. T. and Kaw, A. K., 1994, "Fracture Mechanics of Composites with Nonhomogeneous Interphases and Nondilute Fiber Volume Fractions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 2053~2070.
- (8) Choi, H. J., 1996, "An Analysis of Cracking in a Layered Medium with a Functionally Graded Nonhomogeneous Interface," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 479~486.
- (9) Choi, H. J., 1996, "Bonded Dissimilar Strips with a Crack Perpendicular to the Functionally Graded Interface," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 4101~4117.
- (10) Choi, H. J., 1997, "Mode I Interaction of a Periodic Array of Parallel Cracks in a Functionally Graded Nonhomogeneous Plane," *KSME International Journal*, Vol. 11, pp. 239~248.
- (11) 진태은, 최형집, 이강용, 1996, "비균질 구배기능 계면영역을 고려한 적층 반무한체의 동일선상 복수균열 해석," *대한기계학회논문집(A)*, 제 20권, 제4호, pp. 1275~1289.
- (12) Gu, P. and Asaro, R. J., 1997, "Cracks in Functionally Graded Materials," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, pp. 1~17.

- (13) Rice, J. R. and Sih, G. C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Materials," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 418~423.
- (14) Cook, T. S. and Erdogan, F., 1972, "Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp. 677~697.
- (15) Noda, N. and Jin, Z. -H., 1993, "Steady Thermal Stresses in an Infinite Nonhomogeneous Elastic Solid Containing a Crack," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 16, pp. 181~196.
- (16) Nemat-Alla, M. and Noda, N., 1996, "Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Gradient Half Space with an Edge Crack under Thermal Loading," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 66, 569~580.
- (17) Erdogan, F. and Wu, B. H., 1996, "Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 237~265.
- (18) Noda, N. and Jin, Z. -H., 1994, "A Crack in Functionally Gradient Materials under Thermal Shock," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 99~110.
- (19) Jin, Z. -H. and Noda, N., 1994, "Transient Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Semi-Infinite Plate of a Functionally Gradient Material," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 203~218.
- (20) Jin, Z. -H. and Batra, R. C., 1996, "Stress Intensity Relaxation at the Tip of an Edge Crack in a Functionally Graded Material Subjected to a Thermal Shock," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 317~339.
- (21) 송준희, 임재규, 1996, "경사기능성 세라믹/금속 복합재료의 열충격특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제7호, pp. 2134~2140.
- (22) Erdogan, F. and Rizk, A. A., 1992, "Fracture of Coated Plates and Shells under Thermal Shock," *International Journal of Fracture* Vol. 53, pp. 159~185.
- (23) Choi, H. J., Jin, T. E. and Lee, K. Y., 1995, "Transient Thermal Stresses in a Cladded Semi-Infinite Medium Containing an Underclad Crack," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 18, pp. 269~290.
- (24) Stehfest, H., 1970, "Numerical Inversion of Laplace Transforms," *Communications of the ACM*, Vol. 13, pp. 47~49.
- (25) Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1985, *Theory of Thermal Stresses*, Krieger Publishing Company, FL.
- (26) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., 1969, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (27) Muskhelishvili, N. I., 1953, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands.