

# 폐쇄연쇄계를 갖는 탄성 다물체계의 효율적인 조인트반력 해석

최용철\* · 김광석\* · 김외조\* · 유완석\*\*

(1997년 10월 13일 접수)

## Analysis of Joint Reaction Forces of Flexible Multibody System with Closed Loops

Y. C. Choi, K. S. Kim, O. J. Kim and W. S. Yoo

**Key Words :** Joint Reaction Force/Moment(조인트반력), Flexible Multibody System(탄성 다물체동역학), Cartesian Coordinate(직교좌표계), Joint Relative Coordinate(조인트 상대좌표계), Inverse Dynamics(역동역학), Velocity Transformation(속도변환법)

### Abstract

The analysis of dynamic forces is essential to the design of systems, stress analysis, or life prediction of part of machine. Calculation of dynamic forces has very close relations with multibody dynamics algorithm. In this paper, an algorithm which calculates joint reaction force/moment of flexible multibody dynamic systems is proposed by using inverse dynamic algorithm and velocity transformation technique.

### 1. 서 론

가상일의 원리 혹은 D'Alembert 원리를 이용한 라그랑지법을 이용하여 구속조건을 가지는 다물체계의 운동방정식의 유도는 좌표의 선정에 따라 크게 두 가지의 방법이 있다. 첫째는 절대직교좌표계(global cartesian coordinate)와 각 물체의 국부적 좌표계(local cartesian coordinate)를 정의하여 각 물체의 운동을 기술하는 것이며, 이 때의 좌표계의 위치 및 자세는 3개의 병진좌표와 3개의 회전각도(오일러각, 브라이언트각) 혹은 4개의 오일러 매개변수(Euler parameters)로 표시된다. 둘째는 다물체의 연결구조(tree structure)에서 직렬로 연결된 물체들에 일련번호를 설정하고 각 물체의 위

치와 자세를 그 물체의 기준물체(reference body)의 위치와 자세, 그리고 두 물체사이의 상대변위(relative displacement)를 이용하여 나타내는 방법이다. 직교좌표계를 이용한 방법은 시스템의 기구학적인 구조가 바뀌더라도 기구학적 구속조건이 가·감이 쉽고, 운동방정식의 유도가 일반적이며 간단하다. 그러나 운동방정식과 기구학적 구속조건식의 수가 많아지므로 운동방정식의 적분 및 구속조건을 만족시키기 위해 많은 계산량이 필요하다. 상대좌표계를 이용한 방법은 구속조건 유도의 운동방정식의 유도가 일반적이지 않고 복잡한 반면, 최소의 운동방정식 및 기구학적 구속조건식을 얻게되므로 효율적인 계산을 할 수 있다.

이러한 다물체계의 해석에서 동하중의 해석은 시스템 설계 및 그 시스템을 이루고 있는 부품의 응력 해석이나 내구도해석에 있어서 필수적이다. 이러한 동하중 해석은 조인트반력 해석과 원하는 운

\*부산대학교 대학원

\*\*회원, 부산대학교 기계기술연구소

동을 일으키게 하는 구동력 해석으로 나누어 생각할 수 있는데, 전자는 시스템을 구성하고 있는 부품의 구조설계에 필요하고, 후자는 기계시스템의 액츄에이터(actuator)의 용량결정 또는 역동역학적 힘 분석을 통한 제어를 위해 수행되는 해석이다.

다물체 시스템의 동하중 해석은 다물체동역학 알고리즘과 밀접한 관계를 가지고 있다. 직교좌표계를 이용하는 경우에서의 동하중 해석은 미분방정식의 운동방정식과 각 물체사이의 연결관계를 기구학적인 구속조건을 나타내는 대수방정식으로 정식화하여 라그랑지승수 이론으로부터 유도된 미분-대수 방정식(differential-algebraic equation)을 풀어서 동하중을 계산한다. Shabana<sup>(1, 2)</sup>는 탄성체를 포함하는 다물체계에서 직교좌표계에서의 일반 구속력으로부터 실제 조인트반력을 구하는 과정을 유도하였다. 상대좌표계를 이용하는 경우 폐쇄계에서의 절단조인트(cut-joint)를 제외한 모든 조인트의 구속조건이 운동방정식과 대수방정식에 포함되지 않으므로 시스템에 대한 동역학 해석시 조인트반력은 절단조인트에서만 구해지게 된다. 따라서, 절단조인트 이외의 조인트에서 조인트반력은 뉴턴-오일러 방정식(Newton-Euler equation)에 근거하여 시스템의 연결구조로부터 말단물체(tree end body)에서부터 내향경로(inner loop)를 따라 순차적으로 구하여야 한다. Kim<sup>(3, 4)</sup>은 상대좌표계를 이용한 순환 동역학(recursive multibody dynamics) 공식에서 순환적으로 조인트에 걸리는 반력을 계산하였으며, 동하중의 계산시 특정한 조인트에서의 반력만을 계산하기 위한 비순환적(nonrecursive)인 동하중 해석 알고리즘을 제시하였다. Lee<sup>(5, 6)</sup>는 강체 및 탄성체에서의 조인트구속력 및 구동력을 역속도변환 행렬(inverse velocity transformation matrix)을 이용하여 계산하는 알고리즘을 제시하였으나, 폐쇄계(closed loop)의 처리방법에 대한 연구는 수행되지 않았다.

본 논문에서는 개방계(open loop) 및 폐쇄계에서 속도변환기법(velocity transformation technique)<sup>(7)</sup>을 이용한 상대좌표계에서의 다물체동역학 해석에서 조인트반력을 구하기 위한 역동역학(inverse dynamics) 해석 알고리즘을 이용하여, 강체 및 탄성체로 이루어진 다물체계의 동역학 해석에서 각 조인트에 걸리는 반력을 구하는 알고리즘을 제시한다. 제시된 역동역학 해석 알고리즘을 차량동역학 해석 전용 프로그램 AUTODYN7<sup>(8~10)</sup>에 프로그램

화하고, 평면 슬라이드-크랭크기구의 강체 및 탄성체 해석 예제와 전차량 모델(full car model) 예제를 통해 그 타당성을 확인하였다.

## 2. 속도변환기법을 이용한 상대좌표계에서의 운동방정식 유도

### 2.1 직교좌표계를 이용한 기구학 해석

Fig. 1은 공간상의 임의의 물체  $i$ 의 상태를 기술하기 위한 벡터를 도시하였다. 좌표계 XYZ는 절대좌표계이고, 물체상에 있는 좌표계  $x'y'z'$ 은 국부좌표계를 의미한다. 벡터  $r_i$ 는 절대좌표계에서 물체  $i$ 의 국부좌표계의 원점까지의 거리벡터이고, 벡터  $r_i^p$ 는 절대좌표계에서 물체  $i$ 상의 임의의 점까지의 거리벡터이다. 물체  $i$ 의 자세를 나타내기 위해서는 3개의 회전 각도 또는 오일러 매개변수 등을 이용하여 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 오일러 매개변수를 사용하였으며, 물체  $i$ 의 자세를 오일러 매개변수  $p_i = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ 로 표시한다. 물체의 국부좌표계로부터 절대좌표계로 변환하는 변환행렬  $A_i$ 는 위의 각들로부터 계산된다. 또한 탄성체 해석에서 탄성변형을 나타내기 위해 사용되는 좌표로는 절점좌표와 모드좌표로 구분되는데, 변형모우드 방법에 기초한 식은 절점좌표보다 훨씬 적은 모드좌표를 사용함으로써 계산의 효율을 높이므로, 모드좌표  $a_i$ 를 사용한다. 물체상의 임의의 절점  $P_0$ 는 변형 전이고,  $P$ 는 변형 후의 절점이다. 벡터  $s_{i0}$ 는 국부좌표계의 원점에서 절점  $P_0$ 까지 국부좌표계에서 정의한 벡터이고, 벡터  $s_i^p$ 는 국부좌표계의 원점에서 절점  $P$ 까지 국부좌표계에서 정의한 벡터이

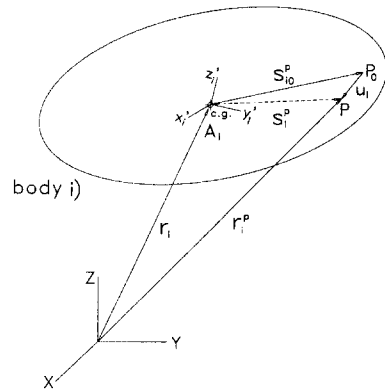


Fig. 1 Coordinate system and flexible deformation shape using cartesian coordinates.

다. 따라서, 직교좌표계를 이용하여 물체  $i$ 의 상태를 기술하기 위한 좌표벡터  $x_i$ 는 다음과 같다.

$$x_i = [r_i^T, p_i^T, a_i^T]^T \quad (1)$$

벡터  $x_i$ 를 이용하여 물체상의 임의의 점  $P$ 에 대한 벡터  $r_P$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_P^i &= r_i + A_i s_P^i \\ &= r_i + A_i (s_{i0}^i + u_i) \\ &= r_i + A_i (s_{i0}^i + \Psi_i a_i) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\Psi_i$ 는 탄성체  $i$ 의 전체 변형모드행렬 중에서 점  $P$ 의 병진변위성분만을 뽑아내는 투영행렬 (projection matrix) 이고,  $u_i$ 는 점  $P$ 의 변형량이다.

물체  $i$ 의 속도는 식 (1)의 시간미분이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_i = [\dot{r}_i^T, \dot{p}_i^T, \dot{a}_i^T]^T \quad (3)$$

회전에 대한 속도항을 회전 각속도  $\omega$ 로 나타내면, 속도벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{y}_i = [\dot{v}_i^T, \omega_i^T, \dot{a}_i^T]^T = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 2E_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{m \times m} \end{bmatrix} \dot{x}_i \quad (4)$$

여기서,  $E_i$ 는 오일러 매개변수로 이루어진  $3 \times 4$  행렬이며,  $m$ 은 사용한 변형모드의 개수이다. 이 식을 역으로 표시하면 다음 식과 같이 표시할 수도 있다.

$$\dot{x}_i = D \dot{y}_i \quad (5)$$

$$\text{여기서, } D = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 E_i^T & 0 \\ 0 & 0 & I_{m \times m} \end{bmatrix} \text{이 된다.}$$

물체  $i$ 의 가속도는 식 (4)의 시간미분이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{y}_i = [\dot{v}_i^T, \dot{\omega}_i^T, \ddot{a}_i^T]^T \quad (6)$$

$n$ 개의 물체로 이루어진 다물체계의 위치, 속도 그리고 가속도에 대한 전체 좌표벡터는 각각 식 (7)~(9)와 같이 나타낸다.

$$x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T \quad (7)$$

$$\dot{y} = [\dot{y}_1^T, \dot{y}_2^T, \dots, \dot{y}_n^T]^T \quad (8)$$

$$\ddot{y} = [\ddot{y}_1^T, \ddot{y}_2^T, \dots, \ddot{y}_n^T]^T \quad (9)$$

## 2.2 상대좌표계를 이용한 기구학 해석

상대좌표계를 이용한 다물체계 해석방법은 그래프이론 (graph theory)을 이용하여 일반화할 수 있다. <sup>(11,12)</sup> Fig. 2는 공간 상에서 기구학적으로 연결된 임의의 물체  $i$ 와  $j$ 를 도사한 것이다. 조인트 정의점  $P_i$ 와  $P_j$ 에 정의된 좌표계  $x^i y^i z^i$ 는 조인트축을 정의하는 조인트좌표계이며,  $C_i$ 와  $C_j$ 는 각각 물체  $i$ 와  $j$ 의 국부좌표계에서 조인트좌표계로의 변환행렬이다. 그래프 이론에 따라 물체  $j$ 를 물체  $i$ 의 기준물체로 정의하면, 물체  $j$ 의 절대좌표계에 대한 위치와 두 물체사이의 상대 변위로부터 물체  $i$ 의 위치가 정의된다. 상대 변위는 두 물체를 연결하는 기구학적 조인트의 형태에 따라 다르지만 일반적으로 회전 변위와 병진 변위로 구분되어진다. <sup>(11)</sup> Fig. 2에서 정의된 상대병진변위  $d_{ij}$ , 상대회전변위  $\phi_{ij}$ 를 사용하면, 물체  $i$ 와 물체  $j$ 의 상대변위벡터  $q_{ij}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$q_{ij} = [[d_{ij} \ \phi_{ij}] \ a_i^T]^T = [q_{ij}^T \ a_i^T]^T \quad (10)$$

여기서,  $q_{ij}$ 는 물체  $i$ 와 물체  $j$  사이의 상대변위벡터,  $a_i$ 는 탄성체해석시 모드에 대한 모드좌표를 나타낸다.

$n$ 개의 물체로 이루어진 다물체계에서의 상대좌표의 수가  $ng$ 라 할때, 전체 상대좌표벡터는 다음과 같다.

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_{ng}]^T \quad (11)$$

상대속도벡터와 상대가속도벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{ng}]^T \quad (12)$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_{ng}]^T \quad (13)$$

상대좌표계에서 정의한 상대속도와 상대가속도로

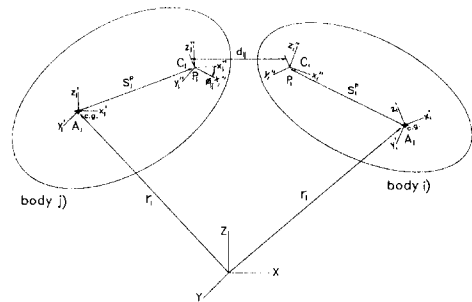


Fig. 2 Coordinate system using joint relative coordinates.

부터 절대좌표계에서의 속도와 가속도로의 변환은 Jerkovsky가 제안한 속도변환기법<sup>(7)</sup>과 Kim<sup>(11)</sup>이 체계적으로 구한 속도변환행렬  $B$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서, 속도변환행렬은 각 물체가 연결되어 있는 모양(topology)을 나타내는 경로행렬(path matrix)과 각각의 물체들간을 연결하는 조인트들의 정보에 의해 만들어진다.

$$\dot{y} = B(q) \dot{q} \quad (14)$$

$$\ddot{y} = B(q) \ddot{q} + \dot{B}(q) \dot{q} \quad (15)$$

### 2.3 운동방정식

상대좌표계에서의 운동방정식을 라그랑지방정식과 속도와 가속도변환식을 사용하여 유도하였다. 먼저 구속조건을 가지는 다물체계의 라그랑지 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial T}{\partial q} \right)^T + \Phi_q^T \lambda = Q \quad (16)$$

여기서,  $T = \sum_{i=1}^{NB} \frac{1}{2} \dot{y}^T m^i \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{y}^T M \dot{y}$ 인 운동에너지를 의미하며,  $NB$ 는 시스템 전체의 물체개수를 의미한다. 또한,  $\dot{y} = B\dot{q} = B(q) \dot{q}$ 이므로 위의 식의 각 항은 다음 식과 같이 계산될 수 있다.

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} \right)^T = B^T \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right)^T \quad (17)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^T = M \dot{y} = MB \dot{q} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T = B^T MB \ddot{q} + B^T \dot{M} \dot{q} + B^T \dot{M} B \dot{q} + \dot{B}^T MB \dot{q} \quad (19)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial q} \right)^T = \left( \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} \right)^T + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} \right)^T$$

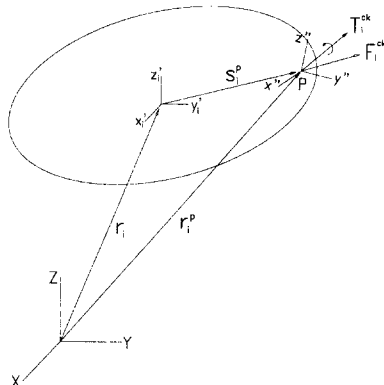


Fig. 3 Constraint reaction force and torque.

$$= B^T \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right)^T + \dot{B}^T MB \dot{q} \quad (20)$$

따라서 상대조인트좌표계에서의 전체 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{M} \ddot{q} + \Phi_q^T \lambda_q \\ & = B^T \left( F - MB \ddot{q} - \dot{M} B \dot{q} + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)과 절단조인트에 대한 구속조건식의 가속도식을 연립하여 구성하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서,  $\bar{M}$ 는 일반질량행렬,  $\bar{g}$ 는 수정일반력(modified generalized force)을 의미하며,  $\gamma$ 는 구속조건식의 가속도식에 대한 우측항(R. H. S of acceleration)을 의미한다. 이 항들을 구체적으로 표시하면 다음 식과 같다.

$$\bar{M} = B^T MB$$

$$\bar{g} = B^T \left( F - MB \ddot{q} - \dot{M} B \dot{q} + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right)^T \right)$$

$$\gamma = -(\dot{\Phi}_q \dot{q} + \dot{\Phi}_t)$$

## 3. 다물체계의 동하중의 해석

### 3.1 절대좌표계에서의 조인트반력 해석

Fig. 3에서  $F_i^{ck}$ ,  $T_i^{ck}$ 는 물체  $i$ 상의 점  $P$ 에 부착된 임의의 조인트  $k$ 에서의 구속력으로 조인트반력과 모멘트로 조인트좌표계에서 나타낸다. 벡터  $r_i$ 는 관성직교좌표계에서 물체  $i$ 의 국부좌표계 원점까지의 거리벡터이며, 벡터  $r_p$ 는 관성직교좌표계에서 조인트 정의점  $P$ 까지의 거리벡터이다.  $S_p$ 는 국부직교좌표계의 원점에서 조인트 정의점  $P$ 까지의 거리벡터로 국부좌표계에서 정의한다.

임의의 조인트  $k$ 에 대한 기구학적 구속조건식을  $\Phi = 0$ 라 하고 그에 관련된 라그랑지승수를  $\lambda^k$ 라고 정의한다. 조인트반력과 모멘트에 의한 가상일과 구속조건식의 직교좌표에 대한 변분은 다음과 같다.

$$\delta W^k = \delta r_i^{p^T} F_i^{ck} + \delta \pi_i^{p^T} T_i^{ck} \quad (23)$$

$$\Phi_{r_i} \delta r_i + \Phi_{\pi_i} \delta \pi_i + \Phi_{a_i} \delta a_i = 0 \quad (24)$$

식 (23)과 식 (24)에서 물체  $i$ 의 국부좌표계 원

점의 변위에 대한 가상변위  $\delta r_i$ ,  $\delta \pi_i$ 와 조인트 정의점에서의 조인트좌표계의 변위에 대한 가상변위  $\delta r_i^p$ ,  $\delta \pi_i^p$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\delta r_i = (A_i C_i) \delta r_i^p + (A_i S_i^p) A_i C_i \delta \pi_i^p - \{ (A_i S_i^p) A_i \Psi_i^p + A_i \Psi_i^p \} \delta a_i \quad (25)$$

$$\delta \pi_i = A_i C_i \delta \pi_i^p - A_i \Psi_i^p \delta a_i \quad (26)$$

식 (25)와 식 (26)을 식 (24)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \Phi_{r_i} (A_i C_i) \delta r_i^p + (\Phi_{r_i} A_i S_i^p + \Phi_{\pi_i}) A_i C_i \delta \pi_i^p \\ & - \{ \Phi_{r_i} (A_i S_i^p A_i \Psi_i^p + A_i \Psi_i^p) + \Phi_{\pi_i} A_i \Psi_i^p - \Phi_a \} \delta a_i \\ & = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)을 만족하는 변분  $\delta r_i^p$ ,  $\delta \pi_i^p$ ,  $\delta a_i$ 에 대해서 구속력에 의한 가상일은 영이어야 하므로, 라그랑지곱수이론에 의해 다음 식을 만족하는 곱수  $\lambda^k$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} & \delta r_i^{pT} \{ F_i^{ck''} + (A_i C_i)^T \Phi_{r_i}^T \lambda^k \} \\ & + \delta \pi_i^{pT} \{ T_i^{ck''} + (A_i C_i)^T (A_i S_i^p)^T \Phi_{r_i}^T \lambda^k + (A_i C_i)^T \Phi_{\pi_i}^T \lambda^k \} \\ & - \delta a^T \{ \Phi_{r_i} ((A_i S_i^p) A_i \Psi_i^p + A_i \Psi_i^p) + \Phi_{\pi_i} A_i \Psi_i^p - \Phi_a \}^T \lambda^k = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)에서 변분은 임의의 값이므로, 조인트 좌표계에서의 구속력  $F_i^{ck''}$ ,  $T_i^{ck''}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_i^{ck''} &= - (A_i C_i)^T \Phi_{r_i}^T \lambda^k \\ T_i^{ck''} &= - (A_i C_i)^T (A_i S_i^p)^T \Phi_{r_i}^T \lambda^k - (A_i C_i)^T \Phi_{\pi_i}^T \lambda^k \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)를 절대좌표계의 값으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_i^{ck} &= - \Phi_{r_i}^T \lambda^k \\ T_i^{ck} &= - (A_i S_i^p)^T \Phi_{r_i}^T \lambda^k - \Phi_{\pi_i}^T \lambda^k \end{aligned} \quad (30)$$

위의 과정을 물체 i의 국부좌표계원점의 변위에 대한 가상변위  $\delta r_i$ ,  $\delta \pi_i$ ,  $\delta a_i$ 에 대해서 풀어보면 다음 식과 같은 직교좌표계를 일반좌표계로 하는 경우에서의 일반 구속력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_c^k &= [Q_{c_r}, Q_{c_\pi}, Q_{c_a}]^T \\ &= - \Phi_y^T \lambda \\ &= - [\Phi_r \ \Phi_\pi \ \Phi_a]^T \lambda \end{aligned} \quad (31)$$

따라서, 일반 구속력과 조인트좌표계에서의 실제 구속력의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_c^k &= - \begin{bmatrix} \Phi_r^T \\ \Phi_\pi^T \\ \Phi_a^T \end{bmatrix} \lambda \\ &= \begin{bmatrix} F_i^{ck} \\ T_i^{ck} + A_i S_i^p F_i^{ck} \\ (A \Psi_i^p)^T A_i S_i^p F_i^{ck} + (A \Psi_i^p)^T F_i^{ck} + (A \Psi_i^p)^T T_i^{ck} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

Fig. 4에서 (a)는 조인트 정의점에 작용하는 조인트반력  $F_i^{ck}$ 와 조인트모멘트  $T_i^{ck}$ 이고, (b)는 물체의 국부좌표계의 원점에서의 조인트 정의점에 작용하는 조인트반력/모멘트의 등가력이다. 물체가 강체인 경우 조인트 정의점에 작용하는 조인트반력은 국부좌표계의 원점에서의 등가의 힘과 우력으로 대체된다. 또한 조인트모멘트는 미끄럼벡터이므로 물체상의 어느 점에서도 같은 효과를 가진다. 그러나, 탄성체인 경우는 강체와 같지 않다. 우선 조인트 정의점에 작용하는 조인트반력/모멘트는 식

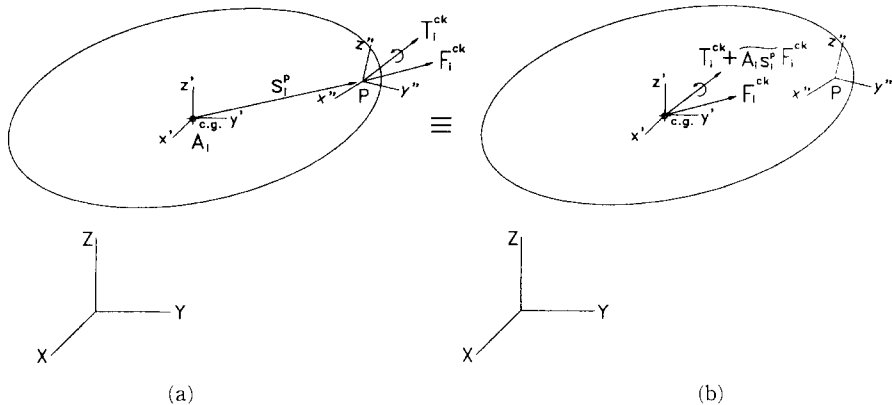


Fig. 4 Constraint reaction force/torque.

(32)에 의해 물체의 국부좌표계에서의 등가력을 계산한다.

3.2 상대좌표계에서의 조인트반력 해석

3.1절에서는 절대좌표계에서 라그랑지곱수를 이용하여 일반 구속력과 실제 구속력을 계산하는 식을 유도하였다. 이 절에서는 상대좌표계에서 절단된 조인트에서 구한 구속력으로부터 절단된 조인트 이외의 다른 조인트에서의 조인트반력을 구하는 식을 유도한다.

위의 식에서 절단조인트에 대한 구속조건식의 상대좌표에 대한 자코비안행렬  $\Phi_q$ 는 구속조건식의 절대좌표에 대한 자코비안행렬  $\Phi_y$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Phi_q^T = B^{cT} \Phi_y^T \quad (33)$$

여기서,  $\Phi_y^T$ 는 절단조인트에 대한 구속조건식  $\Phi^c = 0$ 의 절대좌표에 대한 수정된 자코비안행렬이며,  $B^c$ 는 절단조인트에 대한 속도변환행렬을 의미한다.

마찬가지로  $\lambda_q$ 는  $\lambda_x$  중에서 절단조인트에 해당하는 라그랑지곱수임을 의미한다. 절단조인트에 걸리는 실제 조인트반력은 식 (32) 또는 식 (33)을 이용하여 구할 수 있다.

절단조인트 이외의 조인트반력은 뉴턴-오일러 공식에 근거하여 시스템의 연결구조로부터 말단물체에서부터 내향경로를 따라 순차적으로 구하여야 하며, 동하중 해석 알고리즘은 다음과 같다.

**Step 1.** Fig. 5와 같은 다물체계에서 물체  $i$ 와 물체  $j$ 를 연결하는 기구학적 조인트가 절단조인트로 결정되었을 때, 그래프이론에 따라 계의 연결구조로부터 끝단물체  $i$ 와  $j$ 로부터 기본물체까지 내향경로를 따라 조인트반력을 계산할 물체의 순서를 정한다.

**Step 2.** 식 (22)의 미분-대수방정식으로부터 구

해진 라그랑지곱수  $\lambda_q$ 로부터 식 (29) 또는 식 (30)을 이용하여 절단 조인트에서의 실제 조인트반력을 계산한다.

**Step 3.** Fig. 4와 같이 절단조인트에서 구한 조인트반력을 끝단물체의 중심(C.G.)에서의 등가의 힘과 모멘트로 대치한다.

**Step 4.** Step 1에서 정한 순서에 따른 물체  $k$ 에 대해 강체인 경우 식 (34), 탄성체인 경우 식 (35)와 같은 뉴턴-오일러 공식에 대입하여 기준물체  $k-1$ 과 연결된 조인트에서의 반력  $F_{ji}$ ,  $T_{ji}$ 을 구한다. Step 3과 같은 방법으로 기준물체에서의 조인트 반력을 기준물체의 중심(C.G.)에서의 등가의 힘과 모멘트로 대치한다.

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= \vec{F}_g + \vec{F}_{ji} \\ &= m_i \vec{a}_{cg} \\ \Sigma \vec{M} &= \vec{T}_g + \vec{T}_{ji} + \vec{d}_{jc} \times \vec{F}_{ji} \\ &= I\vec{a} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) \end{aligned} \quad (34)$$

$$[M_j] \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{\omega} \\ \ddot{a} \end{bmatrix} = Q - S(\omega, \dot{a}) - U(a) \quad (35)$$

여기서,  $[M_j]$ 는 강체 또는 탄성체의 질량행렬,  $S(\omega, \dot{a})$ 은 속도의 제곱항으로 표시되는 코리올리력과 원심력에 의한 힘, 그리고  $U(a)$ 는 일반내력을 표시하며,  $Q$ 는 다른 식과 같이 표시된다.

$$Q = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N F_g + F_{ji} \\ \sum_{i=1}^N (T_g + T_{ji} + \vec{s}_i F_{ji}) \\ \sum_{i=1}^N (\Psi_i^{pT} A^T F_g + \Psi_i^{pT} A^T T_g) + (A \Psi_i^T)^T \\ \vec{A} \vec{S}_i^p F_{ji} + \Psi_i^{pT} A^T F_{ji} + \Psi_i^{pT} A^T T_{ji} \end{bmatrix}$$

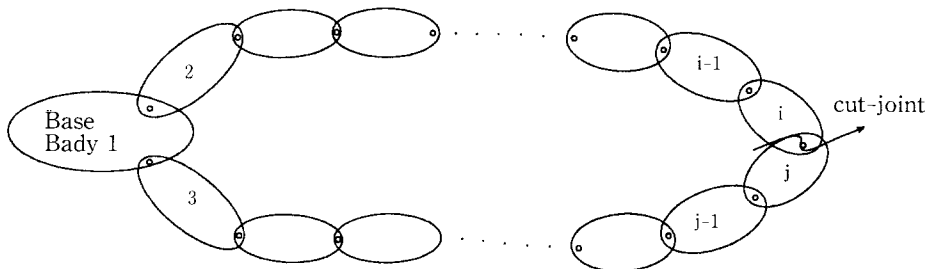


Fig. 5 Multibody system with a cut-joint.

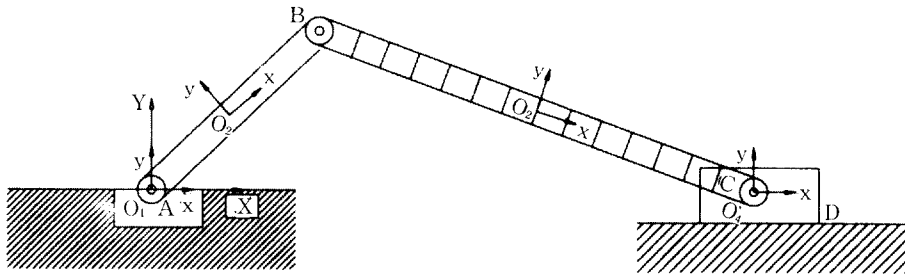


Fig. 6 A planar slider crank mechanism.

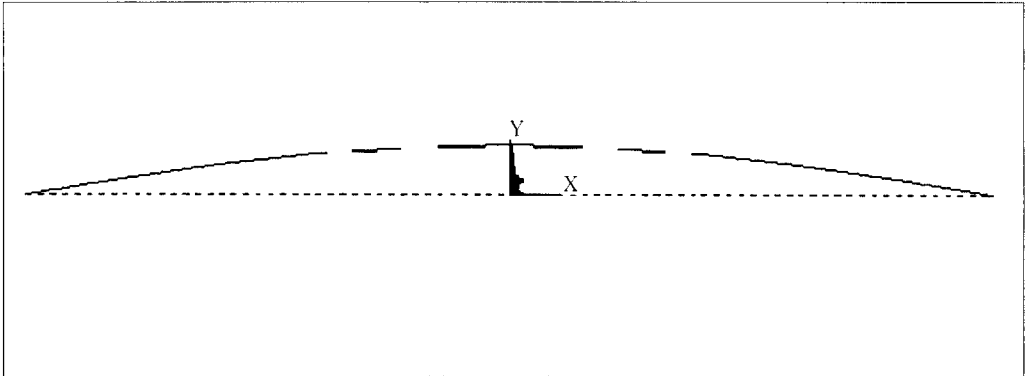


Fig. 7 The first mode of a simply supported beam.

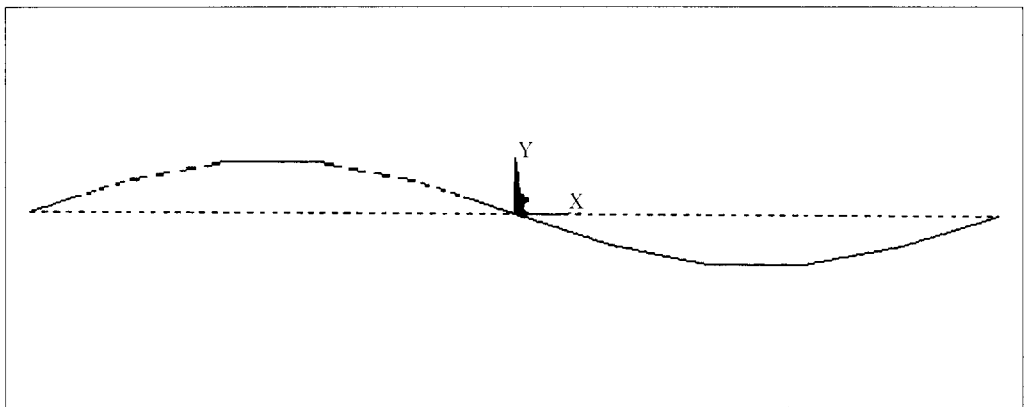


Fig. 8 The second mode of a simply supported beam.

**Step 5.** 조인트반력을 계산할 물체가 기본물체일 때까지 step 4를 반복한다.

#### 4. 수치예제

앞 절들에서 제시한 상대좌표계를 이용한 탄성 다물체계에서의 조인트반력 계산의 타당성을 확인하기 위하여 차량 전용 해석프로그램 AUTODYN7

에 프로그래밍하였으며, 다음과 같은 두가지 예제의 결과와 동역학 범용프로그램인 DADS<sup>(17)</sup>의 결과를 서로 비교하여 그 타당성을 보였다.

##### 4.1 탄성체를 포함하는 슬라이더-크랭크기구

Fig. 6은 강제 구동링크 AB, 연결링크 BC, 강제 CD와 지면으로 이루어진 평면 슬라이더-크랭크 기구이다. 연결링크는 강제 및 탄성체로 모델링하

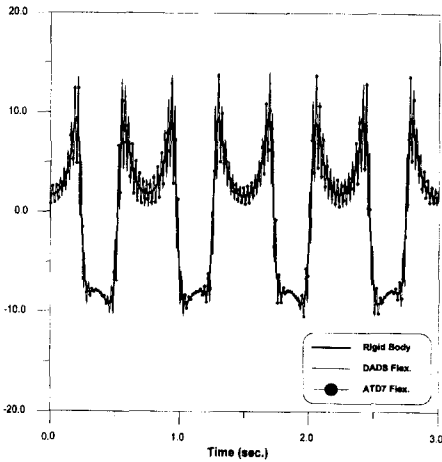


Fig. 9 Angular acceleration of the coupler.

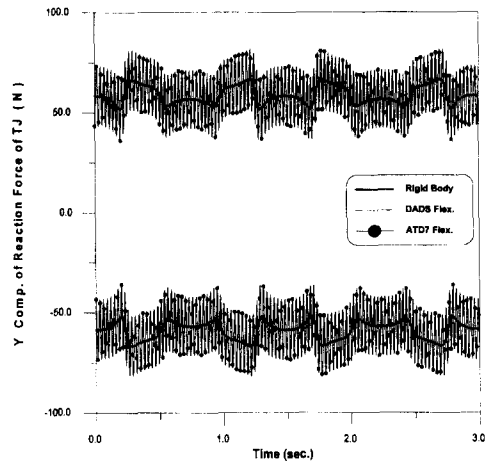


Fig. 10 Translational joint reaction force in y-direction.

여 두 결과를 비교하였다. 점 A의 회전조인트는 지면과 구동링크, 점 B는 구면조인트로 구동링크와 연결링크, 점 C의 유니버설조인트는 연결링크와 증동링크, 그리고 점 D의 병진조인트로 증동링크와 지면을 연결한다. 탄성체로 모델링하는 연결링크 BC는 유한요소해석시 단순지지보로 모델링하였다. 유한요소 프로그램 ANSYS를 이용하여 모드해석을 하고, 탄성체 해석을 위한 변형모드로서 Fig. 7, Fig. 8과 같은 단순지지보의 1, 2차 모드를 사용하였다. 시뮬레이션은 3초간 실행하였으며, 시뮬레이션의 결과를 DADS와 비교하였다. Fig. 9는 연결링크의 강체 모델과 탄성체 모델에서 질량중심의 회전가속도의 z성분이다. DADS의 결과와 AUTODYN7의 결과가 서로 일치함을 볼 수 있다. ATD7은 AUTODYN7을 의미한다. 탄성체의 거동이 강체의 거동 주위로 움직임을 볼 수 있다. Fig. 10은 증동링크와 지면을 연결하는 병진조인트에 걸리는 y방향의 성분의 조인트반력이다. 증동링크와 지면에 걸리는 힘의 크기는 같고, 부호는 반대임을 알 수 있다. Fig. 11은 병진조인트에 걸리는 조인트토크의 z방향의 성분으로 조인트 정의점에 걸리는 조인트토크성분이므로 증동링크에 걸리는 조인트토크는 영이 됨을 볼 수 있다. 해석결과로부터 직교좌표계를 이용하여 조인트반력을 구하는 DADS의 결과와 상대좌표계를 이용하여 구한 조인트반력이 일치함을 볼 수 있다.

4.2 전차량 예제

Fig. 12와 Fig. 13은 전차량을 기구학적으로 모델

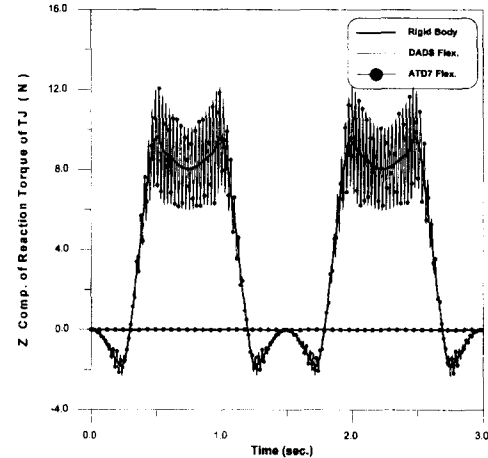


Fig. 11 Translational joint reaction torque in z-direction.

링한 그림이다. Fig. 12는 전륜의 현가장치로서 맥퍼슨형이고, Fig. 13은 후륜의 현가장치로서 비틀림축(twist axle)형이다. 차량의 총 자유도는 15자유도이다. 차속 36 km/h로 주행시 6초후에 길이 1m, 높이 0.015 m인 반사인 범퍼(half-sine bump)를 만나는 시뮬레이션을 수행하였다. 이러한 범퍼 통과 해석은 차량의 수직방향 운동을 통한 승차감 해석 예제로 이용된다. 여기서, 사용한 타이어 모델로 DADS 프로그램의 기본 모델(basic model)을 사용하였다.

Fig. 14는 차체의 수직방향의 가속도이며, Fig. 15와 Fig. 16은 각각 전륜 현가장치의 상부스트럿과 너클을 연결하는 병진조인트, 실제에서는 충격



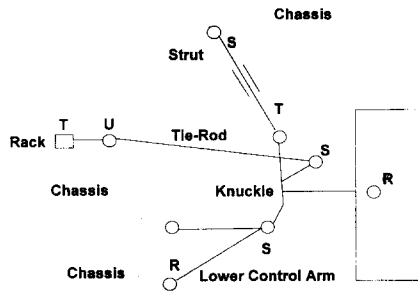


Fig. 12 Front suspension.

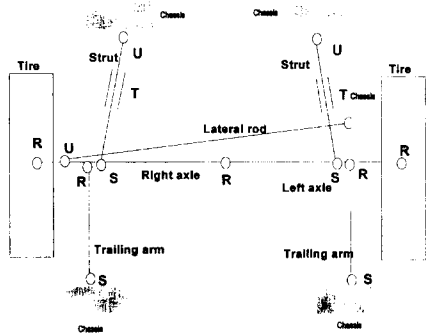


Fig. 13 Rear suspension.

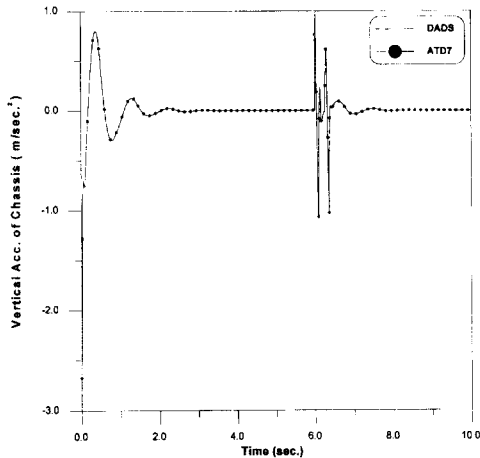


Fig. 14 Vertical acceleration of the chassis.

흡수기에 걸리는 조인트반력과 조인트토크이다. 직진 주행중 범퍼 통과시 스트럿에 걸리는 조인트반력 중 축방향의 힘이 가장 크게 나타남을 볼 수 있다. DADS를 이용한 시뮬레이션의 결과와 AUTODYN7을 이용한 시뮬레이션의 결과가 서로 잘 일치함을 볼 수 있다.

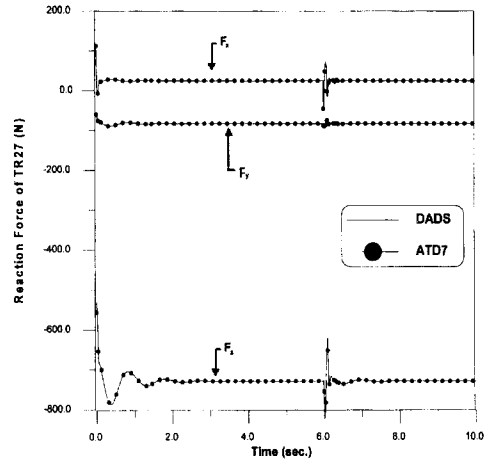


Fig. 15 Translational reaction forces at the upper strut.

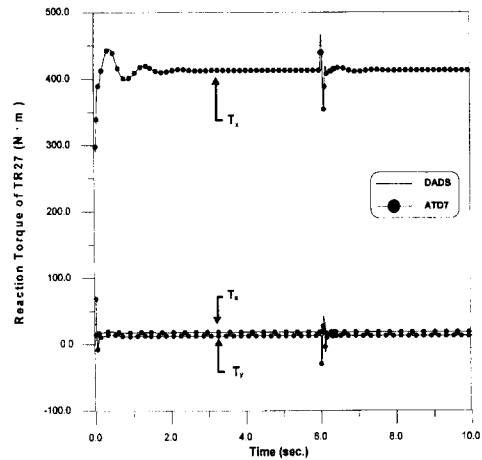


Fig. 16 Translational reaction torques at upper strut.

## 5. 결 론

본 논문에서는 상대좌표를 이용한 탄성 다물체 동역학 해석시 역동역학적으로 구하여야 하는 실제 조인트반력을 구하는 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘을 차량동역학프로그램 AUTODYN7에 프로그램화하였으며, 평면 슬라이더-크랭크기구와 3차원 거동을 하는 전차량 모델에 대한 예제에 대하여 범용 프로그램인 DADS의 결과와 AUTODYN7의 결과를 비교하였다. DADS에서 사용하는 동역학해석 알고리즘은 직교좌표를 이용한 접근방법으로서 본 논문에서의 상대좌표를 이용한 동역학 해

석 접근방법과 다르지만, 그 결과가 일치하므로 제시된 알고리즘의 타당성을 확인하였다.

### 후 기

이 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 대학부설 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

### 참고문헌

(1) Shabana, A. A. and Chang, C. W., 1989, "Connection Forces in Deformable Multibody Dynamics," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 1, pp. 307~318.

(2) Chang, C. W. and Shabana, A. A., 1994, "Generalized Constraint and Joint Reaction Forces in the Inverse Dynamics of Spatial Flexible Mechanical Systems," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 777~784.

(3) Kim, S. S and Haug, E. J., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part I : Open Loop Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 293~314.

(4) 김성수, 유진영, 1997, "순환 다물체동역학에서의 비순환적인 동하중 해석 공식," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제5호, pp. 809~818.

(5) 이병훈, 양진생, 전우정, 1996, "속도변환기법을 이용한 기계시스템의 역동역학 해석," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제12호, pp. 3741~3747.

(6) 이병훈, 1997, "탄성 다물체계에 대한 조인트 좌표 공간에서의 역동역학 해석," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제2호, pp. 352~360.

(7) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *Journal of*

*Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, 173~182.

(8) 유완석, 김광석, 김의조, 강동권, 1997, "차량 동역학 해석 프로그램 AUTODYN7의 개발(II)," 한국자동차공학회 차량운동성능부문 학술강연회, 46-55, 국민대학교.

(9) 유완석, 김광석, 박영욱, 1994, "샤시시스템의 차량동역학 해석기술," G7 1차년도 최종보고서

(10) 김광석, 김의조, 유완석, "차량동역학 해석 프로그램 AUOTDYN7의 개발," 1995, 한국자동차공학회 추계학술대회 학술강연 논문집, pp. 267~273.

(11) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1984A State Space Formulation for Multibody Dynamic Systems Subject to Control," *Technical Report No. 84*~20.

(12) Haug, E. J., 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice-Hall.

(13) Haug, E. J., 1989, "Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Dynamics, Vol I, Basic Methods," Allyn and Bacon.

(14) Chu, S. C. and Pan, K. C., 1975, "Dynamic Response of a High-Speed Slider-Crank Mechanism with an Elastic Connecting Rod," *Transactions of the ASME*, pp. 542~550.

(15) 이상호, 배대성, 한창수, 서문석, 1994, "구속된 다물체 시스템을 위한 동역학 해석론," 대한기계학회논문집, 제18권, 제9호, pp. 2339~2348.

(16) 염영일, 이돈용, 1996, "컴퓨터를 이용한 다물체계의 동역학 해석," 대한기계학회지, 제36권, 제8호, pp. 793~804.

(17) DADS(Dynamic Analysis and Design System) *User's Manual*, 1995, Computer Aided Design Software Inc., USA.