680 대한기계학회논문집 A권 제22권 제3호, pp. 680~683, 1998

균열형상의 강체함유물을 포함하는 무한체에 대한 균열선단 부근의 응력분포와 응력세기계수

이 강 용* · 김 종 성**

(1997 년 8 월 13 일 접수)

Stress Intensity Factor and Stress Distribution Near Crack Tip for Infinite Body Containing Rigid Inclusion with Crack Shape

Kang Yong Lee and Jong Sung Kim

Key Words: Rigid Inclusion(강체함유물), Line Crack(직선균열), Infinite Body(무한체), Stress Intensity Factor(응력세기계수), Stress Distribution(응력분포), Complex Variable (복소변수), Conformal Mapping(등각사상), Linear Elastic(선형 탄성)

Abstract

In case of the infinte body containing a rigid inclusion with line crack shape, stress intensity factor is determined and the relation between stress intensity factor and stress distribution near a crack tip is developed. Also, the relation between stress inetnsity factor and Kolosoff stress function is developed. Finally, these results are compared with those that the crack surface is under no traction.

1. 서 론

현재까지의 균열문제에 대한 응력세기계수(stress intensity factor) 개발은 균열면의 거동이 외력이 작용치 않는 경우와 변위가 없는 경우[1,2] 두가지에 대해 수행되어졌다. 또한 균열면에 어떠한 외력도 작용치 않는 경우의 응력세기계수와 균열선단 부근의 응력분포 사이의 관계식이 제시되고 있다.[3] 균열면에 어떠한 외력도 작용치 않는 경우의 관계식을 유도하기 위해서는 균열면에 어떠한 외력도 작용치 않는다는 경계조건을 사용하는데 반하여 균열면의 변위가 없는 강체함유물 경우의 관계식은 균열면의 변위가 영인 경계조건을 사용하여 개발하여야 한다. 그러나 균열면의 변위가 영인 강체함유물의 경우에 대해서 응력세기계수와 균열선단 부근의 응력분포 사이의 관계식을 개발한 어떠한 연구도 찾아볼 수 없다. 따라서 현 연구에서는 균열면의 변위가 영인 강체함유물에 대한 응력세기계수와 균열선단 부근의 응력분포 사이의 관계식을 도출하고 응력세기계수와 Kolosoff 응력함수[4] 사이의 관계식도 개발하고자 한다.

*회원, 연세대학교 기계공학과
**회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

2. Kolosoff 응력함수

타원을 단위원으로 등각사상하는 함수 $\omega(\zeta)$는 다음과 같다.[4]

$$z=\omega(\zeta)=C\left(\zeta+\frac{D}{\zeta}\right) \tag{1}$$

여기서,

$$C=\frac{a+b}{2},\ D=\frac{a-b}{a+b} \tag{2}$$

여기서, z와 ζ는 각각 물리적 평면과 가상 평면에서의 복소변수이고, a는 타원의 장축길이이고, b는 타원의 단축길이이다.

임의의 각도로 무한경계에서 응력 σ가 작용하는 선형 탄성 무한체내에 타원 형상의 강체함유물이 있는 경우의 Kolosoff 응력 함수식 $\phi(\zeta)$와 $\psi(\zeta)$는 다음과 같다.[4]

$$
\begin{aligned}
\phi(\zeta) &= \frac{\sigma C}{4}\left(\zeta + \frac{D-2e^{2i\gamma}}{x\zeta}\right) \\
\psi(\zeta) &= \frac{\sigma C}{4}\left\{-2e^{-2i\gamma}\zeta + \frac{x}{\zeta} - \frac{(1+D^2)\zeta}{\zeta^2-D}\right. \\
&\quad \left. + (D-2e^{2i\gamma})\frac{1+D\zeta^2}{\zeta^2-D}\frac{1}{x\zeta}\right\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

여기서,

$$
x = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{평면변형률상태}) \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{평면응력상태}) \end{cases} \tag{4}
$$

여기서, ν는 푸아송비(Poisson's ratio), γ는 무한 경계에서 작용하는 응력방향과 타원 단축방향 사이의 각도이다.

직선 균열인 경우 식 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
\phi(\zeta) &= \frac{\sigma a}{8}\left(\zeta + \frac{1-2e^{2i\gamma}}{x\zeta}\right) \\
\psi(\zeta) &= \frac{\sigma a}{8}\left\{-2e^{-2i\gamma} + \frac{x}{\zeta} - \frac{2\zeta}{\zeta^2-1}\right. \\
&\quad \left. + (1-2e^{2i\gamma})\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2-1}\frac{1}{x\zeta}\right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

식 (5)를 z에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{\sigma}{4}\left\{\frac{x+1-2e^{2i\gamma}}{2x}z\right. \\
&\quad \left. + \frac{x-1+2e^{2i\gamma}}{2x}(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{\sigma}{2}\left\{\frac{x^2-2e^{-2i\gamma}x-1+2e^{2i\gamma}}{4x}z\right. \\
&\quad + \frac{1-2e^{-2i\gamma}-x}{4}(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \frac{1-2e^{2i\gamma}-x}{4x}\frac{z^2}{(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}
\end{aligned} \tag{7}
$$

3. 균열선단에서의 응력분포

직선 균열선단 부근의 응력분포식을 결정하기 위해서 직선 균열선단에 원점이 위치하는 다음식과 같은 극좌표계를 이용한다.

$$
z = re^{i\theta} + a \tag{8}
$$

여기서, r과 θ는 극좌표계의 반경방향과 원주방향의 좌표들이다.

식 (8)을 식 (6)과 (7)에 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$
\phi'(z) = P_1 + \frac{P_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} \frac{1+\frac{r}{a}e^{i\theta}}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{Z}\phi'(z) &= \frac{P_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} \frac{1+\frac{r}{a}e^{-i\theta}}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{P_2}{2\sqrt{2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} \frac{\left(1+\frac{r}{a}e^{-i\theta}\right)\left(1+\frac{r}{a}e^{i\theta}\right)^2}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi'(z) &= x\bar{P}_1 - P_1 - \frac{x\bar{P}_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} \\
&\quad \cdot \frac{1+\frac{r}{a}e^{i\theta}}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2P_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} \\
&\quad \cdot \frac{1+\frac{r}{a}e^{i\theta}}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{P_2}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} \\
&\quad \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{a}e^{i\theta}\right)^3}{\left(1+\frac{r}{2a}e^{i\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{11}
$$

여기서,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\sigma(x+1-2e^{2i\gamma})}{8x} \\
P_2 &= \frac{\sigma(x-1+2e^{2i\gamma})}{8x}
\end{aligned} \tag{12}
$$

식 (9)~(11)에서 "′"는 z에 대한 미분을 뜻한다.

선형 탄성재료의 경우 응력성분들과 Kolosoff 응력함수 사이의 관계는 다음과 같다.[4]

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= 2Re\{\phi'(z)\} - Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\
\sigma_x &= 2Re\{\phi'(z)\} + Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\
\sigma_{xy} &= Im\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\}
\end{aligned} \tag{13}
$$

식 (9)~(11)을 식 (13)에 대입하고 $\frac{r}{a} \ll 1$ 이라는 가정하에서, 즉 균열선단 부근에서 응력성분을 유도하면 다음과 같다.

$$\lim_{r \to 0} \sigma_x(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x-1+2\cos 2\gamma}{8x} \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} + (2x+5)\cos\frac{\theta}{2}\right\} + \frac{\sin 2\gamma}{4x}\left\{\sin\frac{5\theta}{2} + (5-2x) \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right\}\right] \tag{14}$$

$$\lim_{r \to 0} \sigma_y(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{x-1+2\cos 2\gamma}{8x} \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} - (3-2x)\cos\frac{\theta}{2}\right\} - \frac{\sin 2\gamma}{4x} \cdot \left\{\sin\frac{5\theta}{2} - (3+2x) \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right\}\right] \tag{15}$$

$$\lim_{r \to 0} \sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x-1+2\cos 2\gamma}{8x} \cdot \left\{(2x+1)\sin\frac{\theta}{2} + \sin 5\frac{\theta}{2}\right\} - \frac{\sin 2\gamma}{4x}\left\{(1-2x)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{5\theta}{2}\right\}\right] \tag{16}$$

식 (14)~(16)의 결과식은 균열면에 외력이 작용하지 않는 경우의 기존식[3]과 비교할 때 차이가 있으며 특징적인 것은 균열체의 푸아송비에 따라 균열선단 응력의 크기가 달라진다는 사실이다.

4. 응력세기계수와 균열선단에서의 응력분포 사이의 관계식

식 (14)~(16)에서 응력세기계수를 다음과 같이 정의할수 있다.

$$K_I = -\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{4x}(x-1+2\cos 2\gamma) \tag{17}$$

$$K_{II} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2x}\sin 2\gamma \tag{18}$$

식 (17)과 (18)에서 보는 바와 같이 강체함유물 균열인 경우 K_I과 K_{II}는 푸아송비의 함수꼴로 표현된다.

식 (14)~(16)에 식 (17)과 (18)을 이용하여 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\lim_{r \to 0} \sigma_x(r, \theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left[-K_I \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} + (2x+5)\cos\frac{\theta}{2}\right\} + K_{II} \cdot \left\{\sin\frac{5\theta}{2} + (5-2x)\sin\frac{\theta}{2}\right\}\right] \tag{19}$$

$$\lim_{r \to 0} \sigma_y(r, \theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left[K_I \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} - (3-2x)\cos\frac{\theta}{2}\right\} + K_{II} \cdot \left\{(3+2x)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{5\theta}{2}\right\}\right] \tag{20}$$

$$\lim_{r \to 0} \sigma_{xy}(r, \theta) = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left[K_I \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} + (2x+1)\sin\frac{\theta}{2}\right\} + K_{II} \cdot \left\{\cos\frac{5\theta}{2} - (2x-1)\cos\frac{\theta}{2}\right\}\right] \tag{21}$$

이 결과식은 균열면에 외력이 없는 경우의 식 (3)과 다르며 균열선단 부근의 응력과 응력세기계수 사의의 관계식에 푸아송비가 함수로 작용하고 있는 것이 특징이다.

5. 응력세기계수와 Kolosoff 응력함수 사이의 관계식

식 (19)와 (20)을 서로 더한 후 식 (13)을 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{r \to 0} Re\{\phi'(z)\} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\left\{-K_I\cos\frac{\theta}{2} + K_{II}\sin\frac{\theta}{2}\right\} \tag{22}$$

다음과 같이 복소 응력세기계수 K를 정의하자.

$$K = K_I - iK_{II} \tag{23}$$

식 (8)과 식 (23)을 이용하여 식 (22)를 K에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$K = 2\sqrt{2\pi}\lim_{r \to 0}(z-a)^{\frac{1}{2}}\phi'(z) \tag{24}$$

이 결과식은 기존의 균열면에 외력이 없는 경우의 식 (3)과 동일하다.

6. 결　론

직선 균열형상의 강체함유물을 포함하는 선형 탄성무한체의 무한경계에서 임의의 각도로 응력이 작용하는 경우 균열선단 부근의 응력분포를 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 직선 균열형상의 강체함유물 경우 응력세기계수를 결정하였는데 강체함유물 경우의 응력세기계수는 균열면에 외력이 작용치 않는 경우의 응력세기계수와는 달리 재료물성치인 푸아송비의 함수이다.

(2) 균열형상의 강체함유물인 경우 응력세기계수와 균열선단 부근의 응력분포 사이의 관계식을 결정하였는데 균열면에 외력이 작용치 않는 경우의 관계식과는 다르게 푸아송비의 함수로서 나타난다.

(3) 강체함유물 균열인 경우 응력세기계수와 Kolosoff 응력함수사이의 관계식은 균열면에 외력이 작용치 않는 경우의 관계식과 동일하다.

참고문헌

(1) Lee, K. Y. and Choi, H. S., 1989, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for Rigid Cusp Cracks under Uniform Heat Flow," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 32, No. 2, pp. 183~193.

(2) Lee, K. Y. and Jang, Y. H., 1993, "Thermal Stress Analysis of an Infinite Plate Containing a Rigid Inclusion of Arbitrary Shape," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 46, No. 4, pp. 709~714.

(3) Hellan, K., 1985, *Introduction to Fracture Mechanics*, McGraw-Hill Book Co.

(4) Muskhelishvili, N. I., 1954, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing.