

# 스펙트럴요소법을 이용한 동적집중하중을 받는 평판의 진동해석

이 준근\* · 이 우 식\*\*

(1997년 8월 2일 접수)

## Vibration Analysis of the Plates Subject to Dynamic Concentrated Loads by Using Spectral Element Method

Joonkeun Lee and Usik Lee

**Key Words :** Vibration Analysis(진동해석), Plate(평판), Spectral Element Method(스펙트럴요소법), Dynamic Concentrated Load(동적집중하중), Elastic Wave(탄성파)

### Abstract

A spectral element method(SEM) is introduced for the vibration analysis of a rectangular plate subject to dynamic concentrated loads. First, the spectral plate element is derived from the relations between the forces and displacements along the two opposite edges of plate element. The global spectral matrix equation is then formulated by assembling two spectral plate elements so that the dynamic concentrated load is located at the connection nodal line between two plate elements. The concentrated load is then spatially Fourier transformed in the direction of the connection nodal line to transform the two-dimensional plate problem into a simplified equivalent one-dimensional beam-like problem. We may benefit from these procedures in that the spectral analysis method developed for beam in the previous study can be readily applied. The numerical results from the present SEM is compared with the exact analytical solutions to prove the remarkable accuracy of the present SEM, while this is not true for conventional finite element solutions, especially at high frequency.

### 기 호 설 명

<p><math>B_i</math> : 경계조건으로부터 결정되는 미지수</p> <p><math>D</math> : 평판의 굽힘 강성계수</p> <p><math>E</math> : 탄성계수</p> <p><math>h</math> : 평판의 두께</p> <p><math>I</math> : 2차 관성모멘트</p> <p><math>k</math> : 파수(wave number)</p> <p><math>k_{ij}</math> : 유한요소의 강성행렬요소</p> <p><math>L</math> : 평판의 길이</p>	<p><math>m_{ij}</math> : 유한요소의 강성행렬요소</p> <p><math>p_{mn}</math> : 평판의 모달좌표</p> <p><math>w</math> : 평판의 변위</p> <p><math>X(x)</math> : <math>x</math> 방향의 특성함수</p> <p style="text-align: center;">그리스문자</p> <p><math>\alpha</math> : 관측점</p> <p><math>[a_{ij}]</math> : 식 (12)의 <math>4 \times 4</math> 행렬</p> <p><math>[\beta_{ij}]</math> : 식 (14)의 <math>4 \times 4</math> 행렬</p> <p><math>\delta</math> : Dirac delta 함수</p> <p><math>\eta</math> : 구조감쇠</p> <p><math>\Phi_{mn}</math> : 평판의 정규모드</p>
---	--

\*LG기계(주) 메카트로닉스 연구소

\*\*회원, 인하대학교 기계공학과

- $\Psi$  : 평판요소의 형상함수  
 $\rho$  : 구조밀도  
 $[\Sigma]$  : 평판의 전체 스펙트럴요소행렬  
 $[\sigma]$  : 평판의 스펙트럴요소행렬  
 $\Omega$  : 식 (3)에서 정의된 함수  
 $\omega$  : 각주파수 (rad/s)

#### 상첨자

- $-$  : 스펙트럴성분  
 $\sim$  :  $x$  축상의 특성함수

## 1. 서론

파동역학(wave mechanics)으로 구조물을 해석하는데 있어서 가장 난해한 점은 실제 구조물이 갖는 불연속성이나 임의의 경계에서의 파동의 흐름을 처리하는 과정이다. 이러한 구조물상의 불연속성이나 경계조건을 고려하여 파동역학적인 관점에서 구조물을 해석할 수 있다면 실질적인 구조물의 동적 거동을 연구하는데 크게 기여할 것임은 말할 나위도 없다. 그럼에도 불구하고 지금까지 수행되어온 탄성체내에서의 파동역학에 관련된 연구는 실제 구조물에서의 구조진동을 다루는 여러 공학자들에게는 상당히 별개의 분야로 인식될 정도로 상호관련 사항에 대한 연구가 미진했던 것이 사실이다.<sup>(1)</sup>

최근까지도 가장 대표적인 구조해석법으로 인식되고 있는 유한요소법(FEM)은 컴퓨터의 발달과 더불어 그 적용범위가 확대되고 있다. 그러나 유한요소법은 저주파수 범위에서는 신뢰성 있는 결과를 제시할 수 있으나 고주파수영역으로 갈수록 엄밀해와는 상당한 차이를 갖게 된다. 따라서 유한요소법으로 엄밀해에 가까운 구조물의 동적응답을 얻기 위해서는 일반적으로 매우 많은 수의 요소분할이 요구되므로 이에 따르는 전산시간과 컴퓨터 용량의 증가는 사용자에게 상당한 부담이 될 것이다.

1988년 Doyle<sup>(2)</sup>은 구조물내의 탄성파동의 분산관계(dispersive relation)를 이용하여 파수(wavenumber)와 주파수의 함수로 유도된 파동해를 모두 주파수의 함수로 표현한 후 고속 푸리에변환(fast Fourier transform 또는 FFT)<sup>(3)</sup>과 역 고속 푸리에변환(Inverse FFT 또는 IFFT)<sup>(4)</sup> 알고리즘을 해석 과정에서 적용시켜 구조물의 동적응답을 시간축 상 혹은 주파수축 상에서 정확하게 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 이와 같이 파동해를 이용하여 구조물의 동적거동을 해석하는 과정에서 고속 푸리에변

환과 역 고속 푸리에변환을 적용하는 해석기법을 스펙트럴해석법(spectral analysis method 또는 SAM)<sup>(1)</sup>이라고 한다. 그런데 스펙트럴해석법의 가장 큰 단점은 해석하고자 하는 구조물의 물성치가 서로 다른 재질로 이루어진 복합구조물이거나 단면적이 급격하게 변하는 등 기하학적인 불연속성이 존재하는 구조물일 경우에는 직접적인 적용이 불가능하다는 점이다. 이러한 제약을 극복하기 위하여 Doyle은 구조물상에 어떠한 불연속성이 존재하는 경우, 마치 유한요소법에서 구조물을 수많은 유한요소로 세분화하여 유한요소 모델링을 수행하는 것처럼, 불연속성이 존재하는 부위를 구분하여 서로 다른 스펙트럴요소(spectral element)가 결합된 형태로 가정하여 해석하는 방법을 고안하였다. 이와 같이 하나의 구조물을 여러 개의 스펙트럴요소의 결합된 형태로 보고 기존의 스펙트럴해석이론을 적용해서 해석하는 방법을 스펙트럴요소법(spectral element method: SEM)<sup>(5)</sup>이라고 한다. 스펙트럴요소는 기존의 유한요소와는 달리 구조요소의 길이에 구애되지 않기 때문에 대부분의 경우 필요 이상의 스펙트럴요소로 세분화할 필요가 없다. 따라서 스펙트럴요소법은 기존의 유한요소법과 비교하여 훨씬 적은 스펙트럴요소수만으로도 엄밀해를 구할 수 있는 매우 효율적인 해석기법이라고 할 수 있다. 이후 Gopalakrishnan 등<sup>(6)</sup>은 단면적이 변하는 보의 스펙트럴요소를 유도하여 스펙트럴요소법을 적용하고 Lee 등<sup>(7)</sup>은 곡선보의 스펙트럴요소를 유도하여 아치형 구조물의 스펙트럴요소해석을 수행하였다.

그러나 지금까지 발표된 대부분의 스펙트럴요소법에 관한 연구와 해석이론은 1차원 구조물에 국한되어 적용되었다. 이것은 2차원 이상의 구조물에서는 1차원 구조물에서와는 달리 각각의 주파수성분에 대해 서로 독립적인 두 방향의 파수가 존재하기 때문에 2차원 구조물에서 발생하는 수많은 이동파와 경계면에서 발생하는 반사파를 동시에 고려한 파동해를 구하기가 대단히 어렵기 때문이다. 1995년 Danial 등<sup>(8)</sup>은 처음으로 무한평판 구조물을 스펙트럴해석법으로 해석하였고 유한한 크기를 갖는 평판의 동적응답을 수많은 이동파와 반사파의 중첩으로 구하는 이론을 제시하였다. 그러나 그의 방법으로 유한평판을 해석할 경우 무수히 많은 이동파와 반사파를 동시에 고려하여 중첩해야 함은 물론 구조물이 특히 저각차 구조물일 경우 계산량이 지

나치게 많아져 스펙트럴해석법의 장점을 살리지 못하게 된다.

이와같이 스펙트럴요소법의 우수한 장점에도 불구하고 1차원 경우의 구조해석에만 적용되고 있는 기존의 스펙트럴요소법의 적용범위를 보다 일반적인 구조해석에 적용할 수 있도록 확장시키기 위해서는 새로운 스펙트럴요소법에 관한 이론이 제시되어야 할 것이다. 본 논문에서는 2차원 구조물 특히 평판구조물을 대상으로 스펙트럴요소법을 적용할 수 있는 새로운 해석기법의 개발을 주된 목적으로 하였다. 이를 위해 본 연구에서는 아직까지 소개된 바 없는 평판의 스펙트럴요소를 유도하여 동적집중하중을 받는 경우에 대한 평판의 동적응답을 구하는 새로운 스펙트럴요소해석 알고리즘을 제시하고 이로부터 구한 결과를 기존의 이론해석법 및 유한요소법을 이용해서 구한 결과와 비교함으로써 본 연구의 효율성과 정확성을 검증하였다.

## 2. 평판의 분산관계와 파동해

이 장에서는 실제 유한한 크기를 갖는 평판구조물에 대한 스펙트럴요소법의 적용에 앞서,  $x$  방향으로 무한한 크기를 갖는 반 무한평판의 파동해를 구함으로써 평판 구조물의 분산관계와 파동해의 특성을 살펴보기로 한다. Kirchhoff와 Love의 가정<sup>(9)</sup>에 바탕을 둔 평판 구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (1)$$

윗식에서  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  이고  $\nu$ 는 푸아송비이다. 식 (1)의 해를 아래와 같이 음의  $x, y$  방향으로 전파하는 조화해로 가정하고

$$w(x, y, t) = w_0 e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)} \quad (2)$$

평판의 지배방정식 (1)에 식 (2)를 대입하면 다음과 같은 분산관계식(dispersive relation)을 얻을 수 있다.

$$(k_x^2 + k_y^2)^2 = \Omega^4, \quad \Omega^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3)$$

식 (3)에서 보듯이 평판에서의 파동의 흐름은 보 (beam)의 경우와 같이 분산파의 특성을 가지고 있음을 알 수 있다.<sup>(5)</sup> 식 (3)을 파수  $k_y$ 에 대해서 풀면 다음식과 같이 4개의 서로 다른  $y$  방향의 파수

를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} k_{1y} &= i\sqrt{\Omega^2 + k_x^2} \\ k_{2y} &= -i\sqrt{\Omega^2 + k_x^2} = -k_{1y} \\ k_{3y} &= \sqrt{\Omega^2 - k_x^2} \\ k_{4y} &= -\sqrt{\Omega^2 - k_x^2} = -k_{3y} \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 음의  $x, y$  방향으로 전파하는 무한한 크기를 갖는 평판의 파동해<sup>(10)</sup>는 다음과 같다.

$$\bar{w}(x, y) = (B_1 e^{ik_{1y}y} + B_2 e^{ik_{2y}y} + B_3 e^{ik_{3y}y} + B_4 e^{ik_{4y}y}) e^{ik_x x} \quad (5)$$

식 (5)에서 미지수  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 는 평판의  $y$  축상의 경계조건으로부터 결정되는 값으로  $x$  방향의 파수  $k_x$ 에 관한 함수이고 일반해는 보의 경우와 마찬가지로 다음식과 같이 각 주파수 성분에 관한 조화항을 결합함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (B_1 e^{ik_{1n}y} + B_2 e^{ik_{2n}y} + B_3 e^{ik_{3n}y} \\ &\quad + B_4 e^{ik_{4n}y}) e^{ik_{xn}x} e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (3)에서 보는 것처럼 평판의 분산관계는  $x, y$  두 방향의 파수가 서로 독립적이기 때문에 1차원 보 구조물에서처럼 명확한 분산관계가 성립하지 않는다. 만일 평판 구조물에서의  $x$ 방향이나  $y$ 방향의 파수중 어느 한쪽이 결정되면 평판의 분산관계는 다른 한쪽의 파수와 주파수의 종속적인 관계로 정의될 것이다. 다음장에서는 평판의 한쪽방향 경계조건을 이용해서 명확한 분산관계를 유도하는 과정과 평판의 스펙트럴요소를 유도하는 과정에 대해서 알아보기로 한다.

## 3. 평판의 스펙트럴요소

평판의 스펙트럴요소를 유도하기 앞서 유한평판 요소내의 명확한 분산관계를 설정하기 위하여 Fig. 1과 같이  $x$ 방향으로 단순지지된 평판요소를 예로 들어 스펙트럴요소를 유도하도록 한다. Fig. 1에 보인 평판요소가  $x$ 방향으로 보형태의 굽힘운동을 할 때 평판요소의 파동해의  $x$ 방향 성분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{X}(x) &= A_1 e^{-ik_x x} + A_2 e^{-k_x x} + A_3 e^{ik_x x} \\ &\quad + A_4 e^{k_x x} \end{aligned} \quad (7)$$

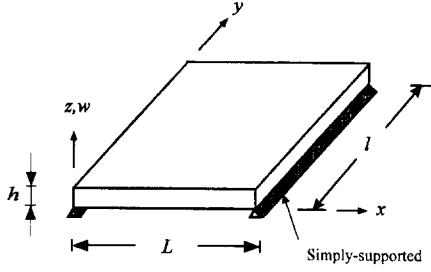


Fig. 1 Spectral element for the rectangular plate with the simply-supported boundary conditions along the opposite two edges at  $x=0$  and  $x=L$ .

평판요소의  $x$ 방향 양단이 단순지지되어 있는 경우에 대한 경계조건을 적용하면

$$\tilde{X}(0) = \frac{\partial^2 \tilde{X}(0)}{\partial x^2} = \tilde{X}(L) = \frac{\partial^2 \tilde{X}(L)}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

과 같이 표현되고, 이 경계조건식을 이용해 식 (7)의 파동해를 풀면 다음과 같은  $x$ 방향의 특성파수(characteristic wave number)  $k_x$ 와 특성함수(characteristic function)  $\tilde{X}(x)$ 를 구할 수 있다.

$$k_x = \frac{m\pi}{L}, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

$$\tilde{X}(x) = e^{ik_x x} - e^{-ik_x x} \quad (9)$$

식 (9)를 식 (3)의 평판의 분산식에 대입하면  $x$ 방향 양단이 단순지지된 유향평판요소의  $y$ 방향 파수와 주파수와와 종속적인 관계가 얻어지게 되고 동시에  $x$ 방향의 형상함수  $\tilde{X}(x)$ 가 결정되므로  $x$ 방향의 양단이 단순지지된 평판요소의 파동해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{w} = \tilde{X}(x) [B_1 e^{ik_{1y}y} + B_2 e^{ik_{2y}y} + B_3 e^{ik_{3y}y} + B_4 e^{ik_{4y}y}]$$

$$= \tilde{X}(x) \bar{w}(y) \quad (10)$$

식 (10)을 행렬식으로 표현하면

$$\bar{w}(x, y, \omega) = \tilde{X}(x) \bar{w}(y)$$

$$= \tilde{X}(x) [Q] [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]^T$$

$$[Q] = [e^{ik_{1y}y} \ e^{ik_{2y}y} \ e^{ik_{3y}y} \ e^{ik_{4y}y}] \quad (11)$$

이고, 여기서 미지수  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 는 주파수  $\omega$ 와  $x$ 방향 파수  $k_x$ 의 함수이다. Fig. 1과 같은 직사각형 형태의 평판 스펙트럴요소일 경우 식 (11)에서 보는 것처럼 어떠한 임의의  $y$ 의 위치에서도 특성함수  $\tilde{X}(x)$ 는 공통이다. 따라서 평판 스펙트럴요소의  $y$ 축상에서 절점의 변위와 기울기를 행렬형

태로 나타내면 다음과 같이 특성함수  $\tilde{X}(x)$ 는 상쇄되어  $y$ 축상의 절점선의 함수로 나타나게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}'_0 \\ \bar{w}_l \\ \bar{w}'_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix}$$

$$= [\alpha(k_x)] \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식 (12)에서  $(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial y$ 이고  $\bar{w}_0 = \bar{w}(0)$ ,  $\bar{w}'_0 = \bar{w}'(0)$ ,  $\bar{w}_l = \bar{w}(l)$ ,  $\bar{w}'_l = \bar{w}'(l)$ 은  $y$ 축상의 절점선에서의 변위와 기울기를 의미한다. 또한 Fig. 1과 같이 마주 바라보는 양단이 단순지지된 평판의 경우 절점선에서의 전단력과 모멘트의 행렬식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{V}_y = D \left[ \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right] = \tilde{X}(x) \bar{V}_y$$

$$\bar{M}_{ly} = D \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] = \tilde{X}(x) \bar{M}_y \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_{0y} \\ \bar{M}_{0y} \\ \bar{V}_{ly} \\ \bar{M}_{ly} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix}$$

$$= [\beta(k_x)] \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식 (14)의 행렬식에서도 식 (12)와 마찬가지로  $y$ 축 절점선상의 함수로 힘과 미지수와의 관계가 성립함을 알 수 있다. 식 (12)와 식 (14)의  $4 \times 4$ 행렬식  $[\alpha]$ 와  $[\beta]$ 의 행렬요소는 부록에 표기하였다. 식 (12)와 (14)를 결합하여 미지수  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 를 소거하여 나타내면

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_{0y} \\ \bar{M}_{0y} \\ \bar{V}_{ly} \\ \bar{M}_{ly} \end{Bmatrix} = [\beta][\alpha]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}'_0 \\ \bar{w}_l \\ \bar{w}'_l \end{Bmatrix} = [\sigma(k_x)] \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}'_0 \\ \bar{w}_l \\ \bar{w}'_l \end{Bmatrix} \quad (15)$$

와 같이  $y$ 축 절점선에서의 전단력과 모멘트를 변위와 기울기의 함수로 나타낼 수 있다. 여기서  $[\sigma(k_x)]$ 는 구하고자 하는 평판의 스펙트럴요소행렬이

다. 식 (15)의 평판 스펙트럴요소는 평판요소의  $y$  축상의 절점선에 대한 힘과 변위와의 관계이고,  $x$  방향의 파수  $k_x$ 는 평판요소의  $x$ 방향 경계조건에 의해 결정된다.

### 3. 동적집중하중을 받는 평판의 스펙트럴요소 해석

스펙트럴요소법과 유한요소법을 이용한 구조물의 동적해석의 경우 두 방법 모두 절점을 기준으로 결합이 가능하다는 점에서 유사성이 있다. 그러나 스펙트럴요소는 구조요소의 길이에 관계없이 강성과 관성효과를 엄밀히 반영할 수 있으므로 기존의 유한요소법보다 매우 효율적인 방법이라고 할 수 있다. 이장에서는 앞장에서 유도된 평판 스펙트럴요소를 이용한 스펙트럴요소법의 구체적인 활용 예로 아직까지 시도된 바 없는 동적집중하중을 받는 평판구조물에 대한 스펙트럴요소해석을 수행하기로 한다.

Fig. 2는 동적집중하중  $f(t)$ 를 받는 4변이 모두 단순지지된 직사각형 평판 구조물이다. 그림에서처럼 평판을 집중하중이 가해지는  $x$ 방향 절점선을 기준으로 요소 ①과 요소 ②로 분할하고 다시 이 절점선을 기준으로 평판 스펙트럴요소를 결합하면 다음과 같이 전체 평판 구조물에 대한 행렬식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} + \sigma_{11}^2 & \sigma_{34} + \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} + \sigma_{21}^2 & \sigma_{44} + \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_{41}^2 & \sigma_{42}^2 & \sigma_{43}^2 & \sigma_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_1' \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_2' \\ \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{1y} \\ \tilde{M}_{1y} \\ \tilde{V}_{2y} \\ \tilde{M}_{2y} \\ \tilde{V}_{3y} \\ \tilde{M}_{3y} \end{bmatrix} \quad (16)$$

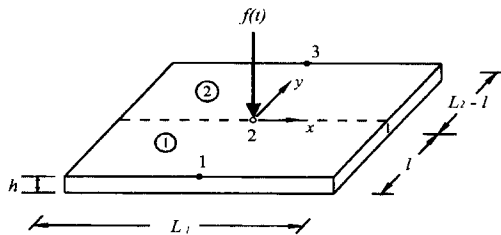


Fig. 2 Illustration of the spectral element discretization for a finite rectangular plate.

이때 Fig. 2와 같이  $y$ 방향의 절점선(nodal line) 1과 3에서 단순지지조건을 적용하면 식 (16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & 0 \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} + \sigma_{11}^2 & \sigma_{34} + \sigma_{12}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{42} & \sigma_{43} + \sigma_{21}^2 & \sigma_{44} + \sigma_{22}^2 & \sigma_{24}^2 \\ 0 & \sigma_{41}^2 & \sigma_{42}^2 & \sigma_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1' \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_2' \\ \tilde{w}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{f}(\omega) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\{\tilde{W}\} = [\Sigma(k_x)]^{-1} \{\tilde{F}\} \quad (18)$$

식 (17)에서  $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2$  등은 스펙트럴요소행렬을 이루는 행렬요소이다. 이때 윗첨자 1, 2는 첫번째와 두번째 스펙트럴요소를 의미하고 아래첨자는 행렬식의 요소를 의미한다. 또한 여기서,  $[\Sigma(k_x)]$ 는 축약된 전체 스펙트럴요소행렬이고,  $\{\tilde{W}\}$ 는 절점선에서의 자유도벡터를  $\{\tilde{F}\}$ 는 절점선에서의 외력 벡터를 의미하며, 파수  $k_x$ 의 함수이다. 집중하중  $f(t)$ 에 대한 파수 스펙트럼은 모든 파수  $k_x$ 에 대하여 크기가 일정한 백색파형태<sup>(11)</sup>이므로 식 (17)의 절점선 외력  $\tilde{f}(\omega)$ 는 주파수만의 함수로 나타내게 된다.

식 (17)의 스펙트럴요소행렬식에서 볼 수 있듯이  $x$ 방향의 함수인 특성함수  $\tilde{X}$ 는 모두 상쇄되고 그 대신 공간 푸리에변환을 통하여  $x$ 방향의 함수대신

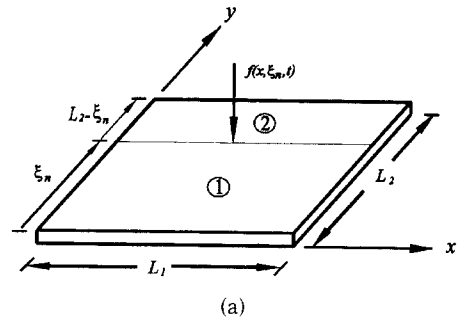


Fig. 3 One-dimensional problem representation of a rectangular plate subject to a dynamic concentrated load, (a) a square plate subject to a centered concentrated load and (b) its equivalent one-dimensional beam.

에 파수  $k_x$ 의 함수로 바뀌게 된다. 이 경우 원래의 2차원 평판문제는 Fig. 3과 같이 보와 같은 1차원 문제로 변환되면서 매우 간편하게 문제를 다룰 수 있게 된다. 그러나 식 (18)로부터 구한 값은 스펙트럴요소 분할한 절점선에서의 동적응답이므로 다시 평판상의 임의의 점  $x, y$ 에 대한 응답으로 변환하기 위해서는 다음과 같은 변환식을 거쳐야 한다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y; \xi, k_x, \omega) \\ = \bar{X}(x)[Q][a]^{-1}[c][\Sigma]^{-1}\{d\} \hat{f} \end{aligned} \quad (19)$$

행렬  $[c]$ 는 관측점의 위치를 결정하기 위한 식이고, 행렬  $\{d\}$ 는 외력벡터  $\{\tilde{F}\}$ 를 축약된 행렬식 내에 표현하기 위한 값이다. 즉, 식 (18)로부터 구한 절점선(nodal line)에서의 평판의 응답  $\{\tilde{W}\}$ 를 임의의 위치  $x, y$ 에 대한 평판의 응답으로 변환하기 위해서 식 (11), (12)와 같은  $\bar{w}(x, y, \omega)$ 와  $\bar{X}(x)$ ,  $[Q]$ ,  $[a]$ 의 관계와 식 (16)과 같은 전체 외력벡터  $\tilde{f}$ 를 식 (18)과 같은 축약된 외력벡터식  $\{\tilde{F}\}$ 로 표현하기 위한 행렬  $\{d\}$  그리고 관측점의 위치를 결정하기 위한 행렬  $[c]$ 로 식 (19)와 같이 표현되어야 한다. 식 (19)는 파수영역과 주파수영역에서의 값이므로 시간영역에서의 응답은 다음과 같은 수치계산을 통해서 구해야 한다. 이때 식 (19)에서  $x$  방향의 파수  $k_x$ 는  $x$ 방향으로 단순지지된 평판의 경계조건을 만족할 수 있도록  $k_{xm} = \pi m/L_1$ 로 주어지고, 주파수  $\omega_n$ 은 고속 푸리에변환과 역 고속 푸리에변환을 취할 수 있도록  $\omega_n = n\Delta\omega$ 로 이산화하여 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{mn}(x, y, k_{xm}) e^{i\omega_n t} \\ k_{xm} = \frac{m\pi}{L_1} \end{aligned} \quad (20)$$

그러나 실제로 스펙트럴요소법에서 평판의 동적응답을 구하기 위한 식 (20)과 같은 계산은 역 고속 푸리에변환을 이용하므로 실제 계산은 매우 빠르게 수행된다.

#### 4. 해석결과

위에서 소개한 스펙트럴요소법의 정확성을 검증하기 위해 Fig. 4와 같이 엄밀한 이론해를 구할 수 있는 평판문제를 예제로 다루었다. 이 평판은 크기가 2.8 m × 2.8 m인 정사각형 평판으로서 네변이

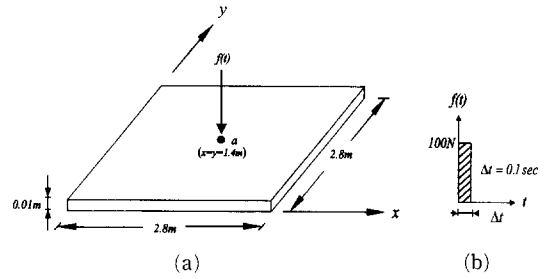


Fig. 4 An example of simply-supported square plate subject to a concentrated impulsive load.

모두 단순지지되어 있다. 본 연구에서 개발된 스펙트럴요소법과 기존의 유한요소법을 이용해 구한 해석결과를 엄밀한 이론해와 비교 검토하였다. 평판의 중심( $x=y=1.4$  m)에 Fig. 4(b)와 같은 집중하중  $f(t)$ 가 작용할 때 평판의 중심에서의 무차원화된 동적응답을 상호 비교 검토하였다.

##### 4.1 동적응답

네변이 모두 단순지지된 평판의 엄밀해는 평판의 정규모드<sup>(12)</sup>를 이용하여 다음과 같은 모드중첩법을 이용하여 계산하였다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y) \quad (21)$$

이때 평판의 정규모드  $\Phi_{mn}$ 은 다음과 같다.

$$\Phi_{mn} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{mx}{L} \sin \frac{ny}{L} \quad (22)$$

유한요소해석에 사용된 평판 유한요소는 크기가  $l \times l$ 이고 절점당 3개의 자유도를 가지며, 따라서 4개의 절점에서 총 12개의 자유도를 갖는다. 이 경우 평판의 강성행렬과 질량행렬은 형상함수(shape function)<sup>(13)</sup>  $\Psi_i$ 를 이용하여 각각 다음의 적분식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} k_{ij} = D \int_0^l \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. + \nu \left[ \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \\ m_{ij} = \rho h \int_0^l \int_0^l \Psi_i(x, y) \Psi_j(x, y) dx dy, \\ i, j = 1, 2, \dots, 12 \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)으로부터 구한 평판의 강성행렬과 질량행

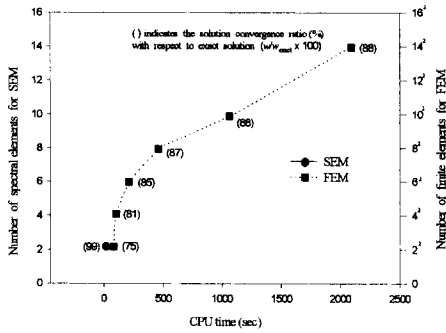


Fig. 5 Comparison of the solution convergence ratios and CPU times for SEM and FEM.

렬을 평판의 유한요소 분할절점을 기준으로 결합하여 해석하면 각 절점에서의 동적응답을 구할 수 있다. 유한요소법을 이용한 해석은 이론해석과 스펙트럴요소법을 이용해 구한 결과와의 비교를 위해서 Fig. 5와 같이 유한요소의 수를 증가시키면서 해의 수렴정도를 확인하였으며, 이론해석법과 마찬가지로 두 방법 모두 주어진 시간영역이나 주파수영역 내에서 충분히 수렴된 값을 상호비교 하였다.

Table 1은 평판의 물성치이고, Table 2는 단순 지지된 평판의 경우에 대하여 스펙트럴요소법과 모드 중첩법을 이용한 이론해석법 그리고 유한요소법으로 구한 고유진동수의 비교이다. 저주파영역에서는 각 모드에서의 고유진동수가 큰 차이를 보이지 않으나 고주파영역으로 갈수록 유한요소법으로 구한 결과는 이론해석과 스펙트럴요소법으로 구한 결과와 비교하여 차이가 있음을 알 수 있다. 이것은 형상함수를 이용하여 평판의 강성행렬과 질량행렬을 유도하는 과정에서 미리 가정된 형상함수를 도입하였기 때문에 비교적 고주파 성분에 해당하는 파동의 양상을 충분히 반영하지 못해서 발생한 현상으로 보여진다.

Fig. 6(a), (b)는 동적집중하중을 받는 평판의 동적응답을 도시한 것이다. 이때 사용된 이론해석은 식 (21)과 같은 모드중첩법을 사용하였으며 모드중첩수는  $x, y$ 방향으로 각각 20개씩이다. 역시 이론해와 스펙트럴요소법을 이용해 구한 결과는 비교적 고주파 영역에서도 거의 같음을 알 수 있으나 유한요소법으로 구한 결과는 엄밀해에 비해 상대적으로 오차가 있음을 알 수 있다.

4.2 모드형상

구조물의 중요한 동특성으로는 크게 보아서 고유

Table 1 Material and structural properties of a square plate.

Young's modulus (E) [Pa]	$72 \times 10^9$
Structural damping factor ( $\eta$ )	0.03
Density ( $\rho$ ) [kg/m <sup>3</sup> ]	$2.8 \times 10^3$
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.33
Width ( $L_1$ ) [m]	2.8
Length ( $L_2$ ) [m]	2.8
Thickness (h) [m]	$1.0 \times 10^{-2}$

Table 2 Comparison of the natural frequencies (Hz) of a simply-supported square plate.

Method \ Mode	Analytical method (Exact)	SEM	FEM (14×14 elements)
(1, 1)	6.21	6.21	6.20
(1, 2)	15.53	15.53	15.12
(2, 2)	24.86	24.86	23.75
(1, 3)	31.07	31.07	29.92
(2, 3)	40.39	40.38	38.12
(3, 3)	55.93	55.93	52.34
(1, 4)	52.82	52.82	49.22
(2, 4)	62.14	62.14	59.22
(3, 4)	77.67	77.67	73.41
(4, 4)	99.42	99.43	95.18
(1, 5)	80.78	80.78	76.67
(2, 5)	90.10	90.10	85.93
(3, 5)	105.64	105.64	96.24
(4, 5)	127.39	127.38	118.53
(5, 5)	155.35	155.35	141.37
(1, 6)	114.96	114.96	103.28
(2, 6)	124.28	124.28	110.45
(3, 6)	139.81	139.80	121.57
(4, 6)	161.51	161.51	144.72
(5, 6)	189.53	189.53	171.48

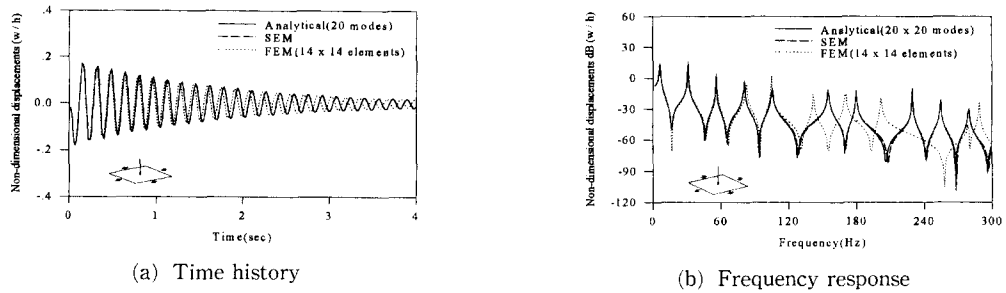


Fig. 6 Comparison of the dynamic responses by the analytical (exact), SEM and FEM, for the simply-supported plate subject to a centered concentrated impulsive load.

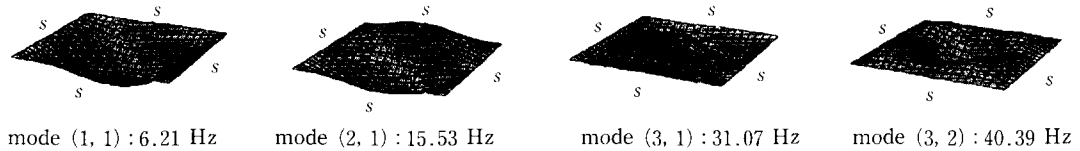


Fig. 7 The lowest four vibration mode shapes for the simply-supported square plate.

진동수와 모드감쇠 그리고 모드형상을 들 수 있다. 이 중에서 모드감쇠는 구조물을 이루는 재료의 고유한 성질이므로 반드시 실험을 통해서 그 특성을 파악해야 한다. 스펙트럴요소법을 이용하여 고유진동수를 구하는 방법은 식 (17)의 축약된 스펙트럴요소 행렬식  $|\Sigma(k_x)|=0$ 로 하는 주파수  $\omega_n$ 를 구하면 된다. 이때 구한 고유진동수  $\omega_n$ 를 식 (11)의 평판의 파동해에 대입하고, 관측점  $x, y$ 의 위치를 변화시키면서 변위를 도시하면 평판의 모드 형상을 구할 수 있다. Fig. 7은 이러한 과정을 거쳐서 구한 4변이 단순지지된 평판의 모드형상들이다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 보와 같은 1차원 구조물에 한정하여 적용되고 있는 기존의 스펙트럴요소법을 마주보는 두변이 단순지지된 직사각형 평판에 확장하여 적용할 수 있도록 하기위해서 아직까지 유도된 바 없는 평판의 스펙트럴요소를 유도하였다. 엄밀한 이론해를 구할 수 있는 동적집중하중을 받는 단순지지된 평판을 예제로 다루어 본 연구에서 개발된 평판의 스펙트럴요소해석법을 적용하고 이 결과를 엄밀한 이론해석 및 유한요소법을 이용해 구한 결과들과 비교함으로써 본 연구에서 개발한 스펙트럴요소법의 정확성을 확인하였다.

## 참고문헌

- (1) Doyle, J. F., 1989, *Wave Propagation in Structure FFT-Based Spectral Analysis Methodology*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- (2) Doyle, J. F., 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 3, No. 1, pp. 7~31.
- (3) Cooley, J. W., Lewis, P. W. and Welch, P. D., 1970, "The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Consideration in the Calculation of Sine, Cosine and Laplace Transforms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, No. 3, pp. 315~337.
- (4) Brigham, E. O., 1988, *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice-Hall International, Inc, London, pp. 195~201.
- (5) 이우식, 이준근, 오진우, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 동적분포하중을 받는 구조물의 동적 해석," *대한기계학회논문집(A)*, 제20권, 제6호, pp. 1773~1783.
- (6) Gopalakrishnan, S. and Doyle, J. F., 1994, "Wave Propagation in Connected Wave Guides of Varying Cross-Section," *Journal of Sound*



and *Vibration*, Vol. 175, No. 3, pp. 347~363.

- (7) 이준근, 이우식, 박철희, 1996, "스펙트럴요소를 이용한 곡선보 구조물의 동적해석," 한국소음진동공학회 논문집, 제6권, 제6호, pp. 83~88.
- (8) Danial, A. N. and Doyle, J. F., 1995, "Transverse Impact of a Damped Plate Near a Straight Edge," *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, Vol. 117, pp. 103~108.
- (9) Szilard, R., 1983, *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 42~45.
- (10) 이우식, 이준근, 이상희, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 평판의 동적거동 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제6권, 제5호, pp. 617~624.
- (11) 이준근, 1997, "스펙트럴요소법을 이용한 구조동역학 해석," 박사학위논문, 인하대학교 pp. 121~124.
- (12) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, New York, pp. 76~81.
- (13) Yang, T. Y., 1986, *Finite Element Structural Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 404~408.

## 부 록

식 (12)의 행렬요소  $[\alpha_{ij}]$

$$\alpha_{11} = e^{\frac{ik_{1y}b}{2}}, \quad \alpha_{12} = e^{\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\alpha_{31} = e^{-\frac{ik_{1y}b}{2}}, \quad \alpha_{32} = e^{-\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\alpha_{13} = e^{\frac{ik_{3y}b}{2}}, \quad \alpha_{14} = e^{\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\alpha_{33} = e^{-\frac{ik_{3y}b}{2}}, \quad \alpha_{34} = e^{-\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\alpha_{21} = -ik_{1y}e^{\frac{ik_{1y}b}{2}}, \quad \alpha_{22} = -ik_{2y}e^{\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\alpha_{41} = -ik_{1y}e^{-\frac{ik_{1y}b}{2}}, \quad \alpha_{42} = -ik_{2y}e^{-\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\alpha_{23} = -ik_{3y}e^{\frac{ik_{3y}b}{2}}, \quad \alpha_{24} = -ik_{4y}e^{\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\alpha_{43} = -ik_{3y}e^{-\frac{ik_{3y}b}{2}}, \quad \alpha_{44} = -ik_{4y}e^{-\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

식 (14)의 행렬요소  $[\beta_{ij}]$

$$\beta_{31} = -iDk_{1y}\{k_{1y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{-\frac{ik_{1y}b}{2}}$$

$$\beta_{32} = -iDk_{2y}\{k_{2y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{-\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\beta_{33} = -iDk_{3y}\{k_{3y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{-\frac{ik_{3y}b}{2}}$$

$$\beta_{34} = -iDk_{4y}\{k_{4y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{-\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\beta_{41} = -D\{k_{1y}^2 + \nu k_x^2\}e^{-\frac{ik_{1y}b}{2}}$$

$$\beta_{42} = -D\{k_{2y}^2 + \nu k_x^2\}e^{-\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\beta_{43} = -D\{k_{3y}^2 + \nu k_x^2\}e^{-\frac{ik_{3y}b}{2}}$$

$$\beta_{44} = -D\{k_{4y}^2 + \nu k_x^2\}e^{-\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\beta_{11} = iDk_{1y}\{k_{1y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{\frac{ik_{1y}b}{2}}$$

$$\beta_{12} = iDk_{2y}\{k_{2y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\beta_{13} = iDk_{3y}\{k_{3y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{\frac{ik_{3y}b}{2}}$$

$$\beta_{14} = iDk_{4y}\{k_{4y}^2 + (2-\nu)k_x^2\}e^{\frac{ik_{4y}b}{2}}$$

$$\beta_{21} = D\{k_{1y}^2 + \nu k_x^2\}e^{\frac{ik_{1y}b}{2}}$$

$$\beta_{22} = D\{k_{2y}^2 + \nu k_x^2\}e^{\frac{ik_{2y}b}{2}}$$

$$\beta_{23} = D\{k_{3y}^2 + \nu k_x^2\}e^{\frac{ik_{3y}b}{2}}$$

$$\beta_{24} = D\{k_{4y}^2 + \nu k_x^2\}e^{\frac{ik_{4y}b}{2}}$$