

직접식 다변수 정량적 피드백 이론

박 명 수* · 이 재 원**

(1997년 5월 26일 접수)

Direct Multivariable Quantitative Feedback Theory

Myoung Soo Park and Jae Won Lee

Key Words : Quantitative Feedback Theory(QFT : 정량적 피드백 이론), Loop Transfer Function Inversion(루프 전달함수 역변환), Robust Performance(강인한 성능), Robust Stability(강인한 안정성)

Abstract

During the past three decades, several techniques have been suggested for robust performance design of multivariable systems within the framework of Quantitative Feedback Theory. They are all characterized and limited by the use of loop transmission inversion. A new approach within framework is described which leads to a design technique without loop transmission inversion. Complete sequential design algorithms are derived for performance specifications in terms of plant input disturbance, sensitivity, complimentary sensitivity and control effort.

1. 서 론

최근 불확정성을 갖는 다변수시스템의 제어를 위한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그 중 최근에 많이 사용되고 있는 것이 H_∞ 설계법, μ -설계법 및 정량적 피드백 이론, 즉 Quantitative Feedback Theory(QFT)이다. H_∞ 설계법 및 μ -설계법은 전달함수를 노름(norm)이라는 평균치로 해석하는 반면, 정량적 피드백 이론은 전달함수를 복소수 값으로 해석한다. 따라서 전달함수 행렬의 크기만을 사용하는 H_∞ 설계법 및 μ -설계법보다 크기 및 위상을 모두 이용하는 정량적 피드백 이론이 주어진 사양에 근접하는 제어를 설계한다고 알려져 있다.⁽¹⁾

다변수 시스템에 대한 정량적 피드백 이론이 Horowitz⁽²⁾에 의해 처음 시도되었다. 그러나 이 방법은 고주파 영역의 불확정성을 처리하는데 문제가

있었다. 이 어려움을 풀기 위해 Shaked⁽³⁾는 다변수 플랜트를 거의 대각선 형태로 변형하여 사용하였다. 그러나 이 방법도 개발과정에서 최소의 대역폭(bandwidth)을 가진 루프 전달함수들을 찾기 위해 반복 설계를 하여야 하는 단점을 가지고 있다. Horowitz⁽⁴⁾는 다시 고정점 이론을 이용하였지만 과도한 설계를 피할 수 없었다. 위의 방법들에 비하여 Yaniv⁽⁵⁾는 훨씬 간단하고 제어력을 줄일 수 있는 방법을 제시하였으나 루프 전달함수의 역변환을 필요로 하기 때문에 차수가 클 경우 수치처리에 문제점이 발생하였다.

따라서, 본 논문에서는 기존의 다변수 정량적 피드백 이론을 이용한 설계방법을 유지하면서 루프 전달함수의 역변환없이 다변수 정량적 피드백 이론의 안정성 및 성능의 경계치들을 계산하는 방법을 소개하고자 한다.⁽⁶⁾

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 논문에서 사용될 피드백 제어시스템과 그 가정들을 설명하고, 3절에서는 다변수 정량적 피드백 이론의

*Amherst Applied Controls, Engineering Consultant

**회원, 영남대학교 기계공학부

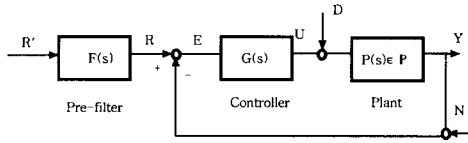


Fig. 1 General feedback system.

강인한 안정도를 판정하는 방법을 설명하고, 4절은 강인한 성능에 대한 것으로 입력외란 제거, 민감도, 보완 민감도 및 제어력의 문제들의 경계치를 계산하는 알고리즘의 유도과정과 결과를 보이고, 5 절에서는 결론을 내리고자 한다.

2. 제어시스템

본 논문에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 선형 (linear), 시불변 (time-invariant), 유리수 (rational), 불확정 (uncertain), 다변수 피드백 시스템, multivariable feedback system)에 대하여 고찰하고자 한다.

여기서, $P(s)$, $G(s)$, 및 $F(s)$ 는 각각 플랜트, 제어기 및 전-필터의 전달함수 행렬을 나타내며, R , E , U , D , Y , 및 N 는 각각 기준입력, 오차, 제어입력, 외란, 출력, 노이즈를 나타낸다. 특별히 IP는 변수적인 것과 비변수적인 불확실성을 모두 포함하는 플랜트들의 집합을 나타낸다. 또한 본 논문에서는 다음과 같은 가정들을 사용한다.

- (1) 플랜트 $P(s)$ 는 IP의 집합에 속해 있다
- (2) 플랜트 집합 IP의 수가 유한하고 연속적이다.
- (3) 플랜트 $P(s) = \{p_{ij}\}$ 은 다음의 형태를 갖는다.

$$p_{ij} = K_{ij} \frac{\prod_{k1=1}^{m_{ij}} \left(\frac{s}{z_{k1}} + 1 \right)}{\prod_{k2=1}^{n_{ij}} \left(\frac{s}{p_{k2}} + 1 \right)} e^{-\tau_{ij}s}$$

여기서, 각각의 불확실한 K_{ij} , p_{ij} , z_{ij} 및 τ_{ij} 는 콤팩트하고 연속구간에 속해있다.

- (4) 모든 $P(s)$ 는 일정한 수의 불안정한 극점들을 가지고 있다.
- (5) $P(s)$ $G(s)$ 안에 불안정 극점/영점 상쇄들은 없다.
- (6) 어떤 $P(s)$ 와 $G(s)$ 에서도 감추어진 불안정한 모드들은 없다.
- (7) 모든 행렬식은 n 개의 입력과 n 개의 출력을

가진 정방형 전달함수로 되어 있다.

(8) 설계되어질 제어기 $G(s)$ 는 대각선 (diagonal) 이다.

(9) 전-필터 F 를 1로 가정하여 1 자유도 제어문 제만 연구하였다.

위의 가정들을 고려한 제어문제들은 아래와 같은 페루프 전달함수들을 갖는다. 여기서 편의상 전달 함수의 s 를 생략한다.

$$\text{플랜트 입력 외란 : } T_d = Y/D = (I + PG)^{-1}P$$

$$\text{출력 민감도 : } S = E/R = (I + PG)^{-1}$$

$$\text{보완 민감도 : } T = Y/R = (I + PG)^{-1}PG$$

$$\text{제어력 : } T_u = U/R = G(I + PG)^{-1}$$

또한 전달함수 행렬의 각 요소에 대하여 주파수 응답의 크기로 성능 사양이 주어진다. 예로 민감도 ($S = \{s_{ij}\}$) 사양은 다음과 같다.

$$|s_{ij}(j\omega)| \leq \eta_{ij}(\omega), \text{ for each } P \in IP, \\ \omega \leq \omega_{hi}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

따라서 본 논문의 목표는 위의 제어문제들에 대하여 강인한 안정성을 보장하면서 각 성능 사양들을 동시에 만족하는 제어기 G 를 설계하는 것이다.

3. 직접식 다변수 정량적 피드백 이론의 강인한 안정성 판정

직접식 다변수 정량적 피드백 이론을 위한 안정성 판정조건을 일반 Nyquist 조건으로부터 유도하기 위하여 이 조건부터 설명한다.⁽⁷⁾ McMillan 차수, $d[P]$ 에 의거하여 다변수 전달함수의 극점들을 p 라고 정의한다. 플랜트 P 가 고정되어 있고 PG 가 p 극점들 ($p = d[P] + d[G]$)을 페우반평면에 가지고 있다고 하자. 그리고 Γ 를 P 와 G 의 $j\omega$ -축 극점에서 좌반평면 indentation을 가진 표준 Nyquist 폐 곡선이라고 정의하자. 그러면 일반 Nyquist 조건은 다음과 같이 정의된다.

“ $\det[I + P(s)G(s)]$ 의 Nyquist 선도에서 s 가 Γ 를 시계방향으로 둘 때 원점에 대한 반시계방향의 회전수가 극점의 수와 같으면 페루프 시스템은 안정하다.”

그러나 다변수 시스템에서는 대각선 제어기를 가진 것이라도 G 때문에 $\det[I + PG]$ 가 비선형이 될 수 있으므로 위의 조건을 직접 사용하기 힘들다.

이 어려움을 덜기 위하여 Mayne⁽⁸⁾은 Gauss 소거법을 이용한 순차적인 설계방법을 제안하였다. 이 방법은 다음과 같다. 전달함수 $(I+PG)$ 를 행렬식으로 아래와 같이 나타낸다.

$$I+PG = \begin{bmatrix} 1+p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdot & p_{1n}g_n \\ p_{21}g_1 & 1+p_{22}g_2 & \cdot & p_{2n}g_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdot & 1+p_{nn}g_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

다변수 정량적 피드백 이론은 순차적인 설계방법을 사용하여 첫째 루프에서 시작하여 마지막 루프까지 하나씩 설계하므로 안정조건도 하나씩 해석하여야 한다. 먼저 첫째 루프에서 다른 루프들의 간섭을 고려하며 $1+p_{11}g_1$ 이 Hurwitz가 되도록 강인한 안정성 제어기 g_1 을 설계한다. 둘째 루프를 위한 강인한 안정성 제어기 g_2 를 구하기 위하여서는 g_2 를 설계하기 전에 Gauss 소거법을 이용하여 g_1 의 정보를 둘째 루프안에 포함시킨다. 최종 제어기 g_n 을 얻기 위하여 순차적 소거가 $n-1$ 번 반복된다. 위의 개념을 수식으로 설명하기 위하여 $(I+PG)$ 를 다음과 같이 unimodular lower 삼각행렬 L 과 upper 삼각행렬 U 로 표현한다.

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ * & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & * & 1 & 0 \\ * & \cdot & \cdot & * & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1+p_{11}^n g_1 & p_{12}^n g_2 & \cdot & \cdot & p_{1n}^n g_n \\ 0 & 1+p_{22}^n g_2 & \cdot & \cdot & p_{2n}^n g_n \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1+p_{nn}^n g_n \end{bmatrix}$$

여기서, '*'는 복소수 계수를 나타내며,

$$p_{ij}^i = \begin{cases} p_{11}, & i=1 \\ p_{ij}^i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{p_{kj}^i p_{ik}^i}{1+p_{kk}^i g_k}, & i=2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

이다. 그러므로 $\det[I+PG]$ 는 $\det[LU]$ 로 변환시킬 수 있는데, $\det[L]=1$ 이므로 다음과 같은 식으

로 표현할 수 있다.

$$\det[I+PG] = \det[LU] = \det[L]\det[U] \\ = \det[U] = \prod_{i=1}^n u_{ii} = \prod_{i=1}^n (1+p_{ii}^i) \quad (4)$$

위의 유도과정을 통하여 순차적 직접식 정량적 피드백 이론을 위한 강인한 안정성 조건은 다음과 같이 정의할 수 있다

만약 각 $P \in IP$ 의 $1+p_{ii}^i g_i$, $i=1, \dots, n$, 이 Hurwitz 하면 2장의 가정 (1)~(9)들을 만족하는 상태에서 케루프 시스템은 강인한 안정성을 가진다.

4. 성능 사양의 경계치 계산 알고리즘

본 장에서는 주어진 성능 사양들을 직접식 다변수 정량적 피드백 이론에 맞게 재구성하는 방법을 보이고자 한다.

4.1 플랜트 입력외란

Fig. 1에서 보인 것과 같이 플랜트 입력외란 D 로부터 플랜트 출력 Y 까지의 출력 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$Y/D = T_D = \{t_{Dij}\} = (I+PG)^{-1}P \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

이 전달함수 요소들의 사양은 다음과 같이 주어졌다.

$$|t_{Dij}(j\omega)| \leq \beta_{ij}(\omega) \text{ for each } P \in IP, \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

실제로 $\beta_{ij}(\omega)$ 는 한정된 대역폭 $[0, \omega_{hi}]$ 내에서 규정한다. 4.1에서 t_{Dij} 를 편리상 t_{ij} 로 나타내기도 한다. 그리고 순차적인 설계를 $i=1$ 에서 시작하여 $i=n$ 까지 진행하기로 한다. $T_D = (I+PG)^{-1}P$ 의 양변에 $I+PG$ 를 곱하여 정리하면 아래의 식이 된다.

$$(I+PG)T_D = P \quad (7)$$

식 (7)을 행렬식으로 나타내면 식 (8)과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1+p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdot & p_{1n}g_n \\ p_{21}g_1 & 1+p_{22}g_2 & \cdot & p_{2n}g_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdot & 1+p_{nn}g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdot \\ t_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \cdot \\ p_{nj} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)의 입력을 $[g_1, \dots, g_n]$ 의 항으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p_{11}t_{1j} & p_{12}t_{2j} & \cdot & p_{1i}t_{ij} & \cdot & p_{1n}t_{nj} \\ p_{21}t_{1j} & p_{22}t_{2j} & \cdot & p_{2i}t_{ij} & \cdot & p_{2n}t_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i1}t_{1j} & p_{i2}t_{2j} & \cdot & p_{ii}t_{ij} & \cdot & p_{in}t_{nj} \\ p_{(i+1)1}t_{1j} & p_{(i+1)2}t_{2j} & \cdot & p_{(i+1)i}t_{ij} & \cdot & p_{(i+1)n}t_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}t_{1j} & p_{n2}t_{2j} & \cdot & p_{ni}t_{ij} & \cdot & p_{nn}t_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ g_i \\ g_{(i+1)} \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j} - t_{1j} \\ p_{2j} - t_{2j} \\ \cdot \\ p_{ij} - t_{ij} \\ p_{(i+1)j} - t_{(i+1)j} \\ \cdot \\ p_{nj} - t_{nj} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Cramer's rule을 이용하여 t_{ij} 를 구하기 위하여 식 (9)를 다음 식과 같이 변경한다.

$$\begin{bmatrix} 1 + p_{11}g_1 & \cdot & p_{1i}g_i & p_{1(i+1)}t_{(i+1)j} & \cdot & p_{1n}p_{nj} \\ p_{21}g_1 & \cdot & p_{2i}g_i & p_{2(i+1)}t_{(i+1)j} & \cdot & p_{2n}t_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i1}g_1 & \cdot & 1 + p_{ii}g_i & p_{i(i+1)}t_{(i+1)j} & \cdot & p_{in}t_{nj} \\ p_{(i+1)1}g_1 & \cdot & p_{(i+1)i}g_i & p_{(i+1)(i+1)}t_{(i+1)j} & \cdot & p_{(i+1)n}t_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}p_1 & \cdot & p_{ni}g_i & p_{n(i+1)}t_{(i+1)j} & \cdot & p_{nn}t_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdot \\ t_{ij} \\ g_{(i+1)} \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \cdot \\ p_{ij} \\ p_{(i+1)j} - t_{(i+1)j} \\ \cdot \\ p_{nj} - t_{nj} \end{bmatrix} \quad (10)$$

부록의 식 (A9) 및 식 (A11)로부터 다음의 식을 얻을 수 있다. 자세한 유도과정은 부록에서 설명하였다.

$$t_{ij} = \frac{\left[\sum_{k=1}^n p_{kj} \alpha_{ki}^{L_i^{(i-1)}} - \sum_{k=i+1}^n t_{Dkj} \alpha_{ki}^{L_i^{(i-1)}} \right]}{\det [L_i^{(i-1)}] g_i + \alpha_{ii}^{L_i^{(i-1)}}}, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

여기서,

$$L_i^{(i-1)} = \begin{bmatrix} 1 + p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdot & p_{1(i-1)}g_{(i-1)} & p_{1i} & p_{1(i+1)} & \cdot & p_{1n} \\ p_{21}g_1 & 1 + p_{22}g_2 & \cdot & p_{2(i-1)}g_{(i-1)} & p_{2i} & p_{2(i+1)} & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i1}g_1 & p_{i2}g_2 & \cdot & p_{i(i-1)}g_{(i-1)} & p_{ii} & p_{i(i+1)} & \cdot & p_{in} \\ p_{(i+1)1}g_1 & p_{(i+1)2}g_2 & \cdot & p_{(i+1)(i-1)}g_{(i-1)} & p_{(i+1)i} & p_{(i+1)(i+1)} & \cdot & p_{(i+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdot & p_{n(i-1)}g_{(i-1)} & p_{ni} & p_{n(i+1)} & \cdot & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

그리고 $\alpha_{ii}^{L_i^{(i-1)}}$ 는 $L_i^{(i-1)}$ 의 cofactor이다. 식 (11)에서 t_{kj} 이외의 값들은 이전에 계산된 값이고 $t_{kj} (k = (i+1), \dots, n)$ 는 다음과 같은 부등식의

$$\begin{aligned} |t_{kj}(j\omega)| &\leq \beta_{kj}(\omega), \quad k=1, 2, \dots, n, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \quad \text{for each } P \in \text{IP} \end{aligned} \quad (13)$$

β_{kj} 로 치환하면 다음 식과 같다.

$$|t_{ij}| \leq \frac{\frac{1}{\alpha_{ii}^{L_i^{(i-1)}}} \left[\left| \sum_{k=1}^n p_{kj} \alpha_{ki}^{L_i^{(i-1)}} \right| + \sum_{k=i+1}^n \beta_{kj} \left| \alpha_{ki}^{L_i^{(i-1)}} \right| \right]}{\left| 1 + \frac{\det [L_i^{(i-1)}] g_i}{\alpha_{ii}^{L_i^{(i-1)}}} \right|} \leq \beta_{ij},$$

$$j=1, 2, \dots, n \quad \text{for each } \alpha_{ii}^{L_i^{(i-1)}} P \in \text{IP} \quad (14)$$

여기서, 순차적인 설계과정의 한계를 설명하면

다음과 같다. i 번째 설계단계에서는 $(n-i)$ 제어기들이 아직 설계되어 있지 않다. 나머지 설계되어야 할 루프들의 연성을 고려하기 위해 다음 단계의 사양의 상한치를 사용하면 이로 인해 시스템이 과도하게 설계된다. 특히 첫째 루프의 설계에서 식 (14)의 β_{kj} 항이 $k=2, \dots, n$ 이므로 많은 상한치를 사용하여 과도하게 설계된다. 그러나 단계들로 진행될 수록 사용하는 상한치를 사용하는 수가 줄어든다. 그래서 마지막 루프에서는 상한치를 하나도 사용하지 않게 된다.⁽⁹⁾

4.2 민감도

기준신호 R로부터 에러신호 E까지의 전달함수는 $S = \{s_{ij}\} = (I + PG)^{-1}$ 이다. 이 전달함수 요소들의 사양은 다음과 같이 주어졌다.

$$|s_{ij}(j\omega)| \leq \eta_{ij}(\omega), \quad i, j=1, 2, \dots, n, \\ \text{for each } P \in \text{IP} \quad (15)$$

4.1절의 방법으로 s_{ij} 를 구하면 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$s_{ij} = \frac{\alpha_{ji}^{L_i^n} + \sum_{k=i+1}^n -s_{kj}\alpha_{ki}^{L_i^n}}{\alpha_{ii}^{L_i^n} + \det[L_i^{(i-1)}]g_i}, \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

식 (16)에 부등식 (15)를 사용하면 다음과 같이 i 번째에서 n 개의 단일루프 정량적 피드백 이론의 문제로 만들 수 있다.

$$|s_{ij}| \leq \frac{|\alpha_{ji}^{L_i^n}| + \left[\sum_{k=i+1}^n \eta_{kj} |\alpha_{ki}^{L_i^n}| \right]}{|\alpha_{ii}^{L_i^n} + \det[L_i^{(i-1)}]g_i|} \leq \eta_{ij}, \\ j=1, 2, \dots, n, \quad \text{for each } P \in \text{IP} \quad (17)$$

이 식은 실제로 Philips사의 Compact Disc(CD) mechanism에 성공적으로 사용되었다.⁽¹⁰⁾

4.3 보완 민감도

기준신호 R 로부터 플랜트 출력 Y 까지의 전달함수는 $T_R = \{t_{Rij}\} = (I + PG)^{-1}PG$ 이다. 이 전달함수 요소들의 사양은 다음과 같이 주어졌다.

$$|t_{Rij}(j\omega)| \leq \gamma_{ij}(\omega), \\ i, j=1, 2, \dots, n, \quad \text{for each } P \in \text{IP} \quad (18)$$

4.1의 방법으로 t_{Rij} 를 구하면 다음과 같다.

$$t_{Rij} - \delta_{ij} \leq \frac{\left[-\sum_{k=1}^i \delta_{kj}\alpha_{ki}^{L_i^n} - \sum_{k=i+1}^n t_{kj}\alpha_{ki}^{L_i^n} \right]}{\alpha_{ii}^{L_i^n} + \det[L_i^{(i-1)}]g_i} \leq \eta_{ij}, \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad (19)$$

여기서,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (20)$$

이다. 식 (19)에 부등식 (18)을 사용하면 다음과 같이 i 번째에서 n 개의 단일루프 정량적 피드백 이론의 문제로 만들 수 있다.

$$|t_{Rij}| \leq \delta_{ij} + \frac{\left[\sum_{k=1}^i \delta_{kj} |\alpha_{ki}^{L_i^n}| + \sum_{k=i+1}^n |\alpha_{ki}^{L_i^n}| \gamma_{kj} \right]}{|\alpha_{ii}^{L_i^n} + \det[L_i^{(i-1)}]g_i|} \leq \eta_{ij}, \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad \text{for each } P \in \text{IP} \quad (21)$$

4.4 제어력

기준입력 R 로부터 플랜트 입력 U 까지의 전달함수는 $T_U = \{t_{Uij}\} = G(I + PG)^{-1}$ 이다. 이 전달함수

요소들의 사양은 다음과 같이 주어졌다.

$$|t_{Uij}(j\omega)| \leq \mu_{ij}(\omega), \\ i, j=1, 2, \dots, n, \quad \text{for each } P \in \text{IP} \quad (22)$$

4.1과 같은 방법을 사용하여 t_{Uij} 의 관계식을 구하면 아래와 같다.

$$t_{Uij} = c_{ij} - \sum_{k=i+1}^n \frac{p_{ki}^i t_{jk}}{1 + p_{ii}^i} g_i, \\ i, j=1, 2, \dots, n \quad (23)$$

여기서,

$$p_{mj}^i = p_{mj}^i - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{p_{ij}^i p_{mi}^i}{1 + p_{ii}^i} g_i \\ c_{jm} = \begin{cases} 0 & \text{for } j < m \\ 1 & \text{for } j = m \\ -\sum_{i=1}^{j-1} \frac{p_{ij}^i c_{im}}{1 + p_{ii}^i} g_m & \text{for } j > m \end{cases} \quad (24)$$

이다. 식 (23)에 부등식 (22)를 사용하면 다음과 같이 i 번째에서 n 개의 단일루프 정량적 피드백 이론의 문제로 만들 수 있다.

$$|t_{Uij}| \leq \frac{|c_{ij}| + \sum_{k=i+1}^n \frac{p_{ki}^i g_i |\mu_{jk}|}{1 + p_{ii}^i}}{|1 + p_{ii}^i g_i|} \leq \mu_{ij}, \\ j=1, 2, \dots, n, \quad \text{for each } P \in \text{IP}$$

5. 결 론

루프 역변환없이 다변수 정량적 피드백 이론을 위한 강한 안정성과 성능사양의 경계치들을 계산할 수 있는 식들을 유도하였다. 이 식들을 사용하면 역변환방식에서 발생하는 차수가 큰 경우의 수치해석상 문제점을 해소할 수 있다. 향후 연구분야는 현재의 대각선 제어기에서 더욱 발전하여 상호연관성을 가진 일반적인 형태의 제어기와 출력과 입력의 수가 다른 일반적인 플랜트의 제어기를 설계하는 것이다.

참고문헌

- (1) Chait, Y. and Hollot, C. V., 1990, "A Comparison Between H_∞ Methods and QFT for a Single-loop Plant with Both Parametric Uncertainty and Performance Specifications," *Recent Development in Quantitative Feedback Theory, ASME WAM Conf.*, O. D. I. Nwokah, ed., pp. 33~40.

- (2) Horowitz, I., 1963, *Synthesis of Feedback Systems*, Wiley Interscience, New York.
- (3) Shaked, U., Horowitz, I. and Glode, S., 1976, "Synthesis of Multivariable Basically Non-interacting Systems with Significant Plant Uncertainty," *Automatica*, Vol. 12, pp. 61~71.
- (4) Horowitz, I., 1982, "Improved Design Technique for Uncertain Multi input Multi Output Feedback Systems," *International Journal of Control*, Vol. 36, No. 6, pp. 977~988.
- (5) Yaniv, O. and Horowitz, I., 1986, A Quantitative Design Method for MIMO Linear Feedback Systems Having Uncertain Plants, *International Journal of Control*, 43, pp. 402~421.
- (6) Park, M. S., 1994, A New Approach to Multivariable Quantitative Feedback Theory, Ph. D. Thesis, University of Massachusetts, Amherst, MA.
- (7) MacFarlane, A. G. J. and Postlethwaite, I., 1977, "The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root-loci," *Int. J. of Control*, 25, pp. 81~127.
- (8) Mayne, D. Q., 1979, "Sequential Design of Linear Multivariable Systems," *IEE Proceedings*, Vol. 126, pp. 568~572.
- (9) Park, M. S., Chait, Y. and Steinbuch, M., 1994, "A New Approach to Multivariable Quantitative Feedback Theory: Theoretical and Experimental Results," Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, pp. 340~344.
- (10) Park, M. S., Chait, Y. and Steinbuch, M., 1997, "Inversion-Free Design Algorithms for Multivariable Quantitative Feedback Theory: An Application to robust control of a CD-rom," *Automatica*, Issue 33:5.

부 록

이 부록에서는 t_{Dij} 의 관계식을 유도하는 중간과정들을 보여주고자 한다. 식 (10)을 $By=c$ 로 나타내자. 여기서, $B=[b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n]$ 인 행렬이고, b_i 는 행벡터이다. Cramer's rule을 적용하여 보면

$$t_{ij} = \frac{\det[b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \dots, b_n]}{\det[B]} \quad (A1)$$

이다. 여기서, 행렬식 B 는 두 행렬식의 곱(= MN)으로 나타내어진다. 여기서 M 및 N 들은 다음과 같이 정의된다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 + p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdot & p_{1i}g_i & \cdot & p_{1n} \\ p_{21}g_1 & 1 + p_{22}g_2 & \cdot & p_{2i}g_i & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i1}g_1 & p_{i2}g_2 & \cdot & 1 + p_{ii}g_i & \cdot & p_{in} \\ p_{(i+1)1}g_1 & p_{(i+1)2}g_2 & \cdot & p_{(i+1)i}g_i & \cdot & p_{(i+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdot & p_{ni}g_i & \cdot & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad N = \text{diag}[1, 1, \dots, t_{(i+1)i}, \dots, t_{nj}] \quad (A2)$$

그러므로 L_1^{-1} 은 다음과 같이 정의된다.

$$L_1^{-1} = I_1^{-1} + PG_1^{-1} \quad (A3)$$

여기서,

$$G_1^{-1} = \text{diag}[g_1, \dots, g_{i-1}, 1, \dots, 1], \quad I_1^{-1} = \text{daig}[1, \dots, 1, 0, \dots, 0] = \begin{bmatrix} I_{(i-1) \times (i-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A4)$$

이면

$$L_i^{(i-1)} = \begin{bmatrix} 1 + p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdots & p_{1(i-1)}g_{(i-1)} & p_{1i} & p_{1(i+1)} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21}g_1 & 1 + p_{22}g_2 & \cdots & p_{2(i-1)}g_{(i-1)} & p_{2i} & p_{2(i+1)} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdots & p_{n(i-1)}g_{(i-1)} & p_{ni} & p_{n(i+1)} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (A6)$$

이다. 여기서 $\alpha_{ij}^{(i-1)}$ 은 $L_i^{(i-1)}$ 의 cofactor이다. 그러므로

$$\det[M] = \det[L_i^{(i-1)}]g_i + \alpha_{ii}^{(i-1)} \quad (A7)$$

이고,

$$\det[N] = \sum_{k=i+1}^n t_{kj} \quad (A8)$$

이다. 그러므로 식 (A1)의 분모는 다음과 같은 축약형으로 표현된다.

$$\det[B] = (\det[L_i^{(i-1)}]g_i + \alpha_{ii}^{(i-1)}) \prod_{k=1}^n t_{kj} \quad (A9)$$

그리고, 식 (A1)의 분자는 다음과 같이 표현되거나

$$\det[b_1, \cdots, b_{(i-1)}, c, b_{(i+1)}, \cdots, b_n] = \begin{vmatrix} 1 + p_{11}g_1 & p_{12}g_2 & \cdots & p_{1j} & p_{1(i+1)} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21}g_1 & 1 + p_{22}g_2 & \cdots & p_{2j} & p_{2(i+1)} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i1}g_1 & p_{i2}g_2 & \cdots & p_{ij} & p_{i(i+1)} & \cdots & p_{in} \\ p_{(i+1)1}g_1 & p_{(i+1)2}g_2 & \cdots & p_{(i+1)j} - t_{(i+1)j} & p_{(i+1)(i+1)} & \cdots & p_{(i+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}g_1 & p_{n2}g_2 & \cdots & p_{nj} - t_{nj} & p_{n(i+1)} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \prod_{k=i+1}^n t_{kj} \quad (A10)$$

다음과 같은 축약형으로 표현된다.

$$\det[b_1, \cdots, b_{(i-1)}, c, b_{(i+1)}, \cdots, b_n] = \left[\sum_{k=1}^n p_{kj} \alpha_{ki}^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^n t_{kj} \alpha_{ki}^{(i-1)} \right] \prod_{k=i-1}^n t_{kj} \quad (A11)$$