

충격분리 및 탄성변형을 포함한 캠-종동절 기구의 동역학적 해석을 위한 수치해석적 방법

이 기 수*

(1997년 2월 21일 접수)

A Numerical Method for Dynamic Analysis of Cam-Follower Mechanism Including Impact, Separation and Elastic Deformation

Kisu Lee

Key Words : Cam and Follower (캠과 종동절), Dynamic Contact (동접촉), Velocity and Acceleration Compatibilities (속도 및 가속도 적합조건), Iterative Scheme (반복계산법)

Abstract

A numerical method is presented for the dynamic analysis of cam and follower. Contact and separation between the cam and the follower are analyzed by imposing dynamic contact condition. The correct solution is obtained without spurious oscillation by imposing the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint on the possible contact point. The constraints are satisfied by iteratively reducing the constraint errors toward zero, and a simple time integration of ordinary differential equation is employed for the solution of the equation of motion. The solution procedure associated with the iterative scheme is presented, and numerical simulations are conducted to demonstrate the accuracy of the solution.

1. 서 론

캠-종동절 장치는 엔진 등 주요 회전기계에서 중요한 역할을 하고 있으며, 최근 이들 기계의 고속화 경향과 더불어 이에 대한 정확한 동역학적 해석은 대단히 중요한 과제가 되고 있다. 전통적으로 캠-종동절 장치는 집중질량, 스프링, 댐퍼 등으로 구성된 비교적 단순한 모델을 사용하여 동역학적 해석을 수행하였다.^(1,2) 그런데 고속 컴퓨터의 등장과 더불어 복잡한 시스템의 동역학적 해석에 다물체 동역학(multibody dynamics)이 광범위하게 응용되고 있으며,^(3~5) 캠-종동절 역시 다물체 동역학 기법을 사용하면 좀 더 정확한 결과를 얻을 수

있을 것이다. 그러나 캠과 종동절 사이는 동적인 접촉관계이며, 특히 캠이 고속 회전하는 경우 캠과 종동절은 서로 분리된 후 재충돌하는 현상이 발생한다. 따라서 다물체 동역학이 사용되는 경우 그 해법의 정확도 및 신뢰성은 캠과 종동절 사이의 동적인 구속조건을 만족시키는 방법에 의하여 좌우된다. 문헌조사에 의하면 캠과 종동절 사이의 구속조건을 만족시키는 방법은 2가지로 나누어 진다. 첫째로 Haug는 캠과 종동절은 항상 접촉을 유지한다고 가정하여 그 사이에 holonomic constraint를 부과하여 일반적인 기구학적 구속조건을 수반하는 다물체 동역학의 해법을 적용하였다.⁽⁶⁾ 이 경우 해는 비교적 쉽게 구할 수 있으나 캠과 종동절이 분리되는 경우에는 적용이 불가능하다. 두번째로 Cardona와 Geradin은 캠과 종동절 사이에 접촉조건을 부

*회원, 전북대학교 기계공학과

과하였으며, 그 사이에 인위적으로 스프링과 댐퍼가 존재한다고 가정하여 접촉력을 계산하였다.⁽⁶⁾ 이 경우 캠과 종동질의 분리는 가능하나 해는 고정된 스프링상수와 댐퍼감쇄계수의 영향을 심하게 받으며 특히 접촉력에는 극심한 크기의 엉뚱한 진동(spurious oscillations)이 포함된다. 이러한 엉뚱한 진동은 실제의 물리적 현상이 아니며 수치해석의 오차로 인한 것이다. 따라서 캠과 종동질 사이에서 접촉조건을 부과하면서도 안정되고 정확한 해를 구하는 수치해석적 방법의 개발이 요망된다.

본 논문에서는 캠과 종동질 사이에 접촉조건을 부과하여 운동방정식을 정확히 푸는 해법을 제시한다. 캠과 종동질 사이의 접촉력은 참고문헌 (7)~(10)에서 사용된 반복계산법(iterative scheme)을 이용하여 계산하며 접촉점에서 변위접촉조건뿐만 아니라 속도 및 가속도 적합조건도 동시에 만족시킴으로써 안정된 해를 구한다. 본 해법은 캠과 종동질 사이에 접촉과 분리가 반복되거나 물체의 탄성 변형이 포함되어도 항상 적용할 수 있게 되며 수치적분 오차로 인한 엉뚱한 인위적 진동은 발생하지 않는다. 또한 만약 종동질이 다른 물체들과 기구학적 구속조건으로 연결된 경우에도 적용 가능하다. 본 논문의 캠과 종동질의 동역학 해석에 사용되는 수치해석적 방법은 기본적으로 참고문헌 (10)에서 사용된 방법과 동일한 것이므로, 여기에서는 중복되는 증명 등은 생략하고 캠과 종동질 해석에 필요한 추가 사항을 중점적으로 설명한다.

2. 접촉조건 및 운동방정식

본 논문에서는 Fig. 1과 같은 캠-종동질 장치를 생각한다. 캠은 강체로 취급하고 종동질은 탄성체로 취급하며, 캠은 고정점 주위를 회전하고 종동질은 수평방향으로만 움직인다고 가정한다. (즉, 종동질에는 수평방향의 변위만 존재하고 수직방향 변위는 무시함.) 종동질에 작용하는 힘은 캠으로부터 작용하는 외력 및 그 내부의 탄성변형으로 인한 힘이 있는데, 만약 캠이 종동질에 작용하는 힘을 사전에 알고 있다면 종동질 운동방정식의 해는 대단히 쉽게 구해진다. 따라서 본 논문에서는 참고문헌 (7)~(10)에 제시된 방법과 같이 캠이 종동질에 작용하는 힘이 해 이전에 주어졌다고 가정하여 종동질 운동방정식의 해를 구하며, 캠과 종동질 사이의 정확한 접촉력은 반복계산법에 의하여 구한다. (이

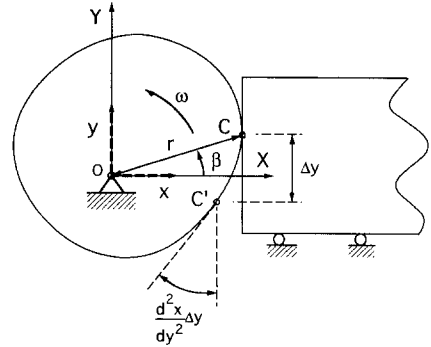


Fig. 1 Cam and follower with inertia coordinate system (X, Y), rotating coordinate system (x, y) and contact point C on the cam.

와 같은 방법은 augmented Lagrange multiplier method 또는 updated multiplier scheme과 비슷한 과정임.) 종동질의 탄성변형으로 인한 힘 및 질량 행렬은 유한요소법에 의하여 쉽게 구해지며, 종동질의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{u} = \begin{bmatrix} -p \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

위에서 M 은 종동질의 질량행렬, u 는 종동질의 수평방향 변위벡터, p 는 캠과 종동질 사이의 접촉력, f 는 종동질에 작용하는 접촉력 이외의 힘(즉, 종동질의 탄성변형으로 인한 힘)이다. 만약 접촉력 p 가 주어져 있다면 식 (1)의 해는 간단한 시간적분에 의하여 쉽게 구해진다.

본 논문에서 사용되는 좌표축과 캠 위의 접촉 가능점 C가 Fig. 1에 표시되어 있다. Fig. 1에서 (X, Y) 좌표계는 고정된 절대 좌표계이고 (x, y) 좌표계는 캠에 고정되어 캠과 더불어 회전하는 좌표계이다. 그리고 본 문제의 계산시점에서 (x, y) 좌표계는 (X, Y) 좌표계와 순간적으로 일치하도록 잡는다. 그리고 캠의 윤곽곡선은 cubic spline interpolation을 이용하여 표시하기로 한다. (Spline interpolation에 대해서는 참고문헌 (11), (12) 참조.) 본 논문에서는 Fig. 2에 표시된 바와 같이 캠 표면 위의 어떤 점과 캠 회전중심을 잇는 선이 x 축과 이루는 각도를 α 라고 표시하며, 이러한 각도 α 를 변수로 하여 캠 표면의 x, y 좌표를 cubic spline interpolation으로 표시한다. (즉, $x=x(\alpha)$, $y=y(\alpha)$) 본 문제의 계산시점에서 (x, y) 좌표계는 (X, Y) 좌표계와 순간적으로 일치하므로, 캠 표

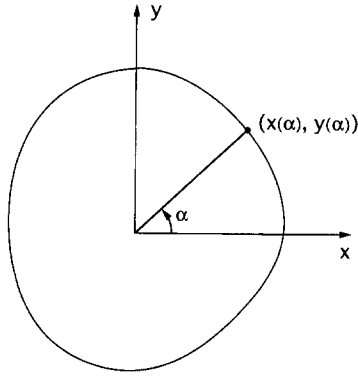


Fig. 2 Representation of cam surface by using angle α .

면에서 종동절과 접촉할 수 있는 점은 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\alpha=\beta} = 0 \quad (2)$$

위의 조건을 만족시키는 점을 접촉 가능점이라고 부르고, Fig.1의 경우 점 C가 접촉 가능점이 되며, β 는 Fig.1에서 보인 바와 같이 선 OC와 x 축과의 각도이다. 그리고 점 C에서 다음과 같이 s 를 정의한다.

$$s = x(\beta) - u_c \quad (3)$$

위에서 $x(\beta)$ 는 Fig.1에서 표시된 캠 위의 점 C의 x 좌표이고, u_c 는 캠 위의 점 C와 접촉하는 종동절 위의 접촉점의 수평변위 (즉, u_c 는 종동절 맨끝 절점변위)이며, 종동절 전체 절점의 변위 u 및 변환행렬 T 를 사용하여 다음과 같이 표시한다. (즉 행렬 T^T 는 종동절 맨끝 절점변위에 해당하는 성분만 1이고, 나머지 성분은 0인 행 벡터임.)

$$u_c = T^T u \quad (4)$$

식 (1)에서 사용한 캠과 종동절 사이의 힘 p 및 식 (3)에서 정의된 s 를 사용하면 점 C에서의 접촉 조건 (즉, 캠과 종동절 사이의 힘은 압축력이며, 캠과 종동절의 분리는 허용되나 상대방 물체 속으로 들어가지는 못하며, 만약 캠과 종동절이 분리되면 그 사이에 작용하는 힘은 없음.)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p &\leq 0 \\ s &\leq 0 \\ p &= 0 \text{ if } s < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

그리고 접촉 가능점 C에서 접촉변위오차 v 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} v &= s \text{ if } p < 0 \text{ or } s > 0 \\ &= 0 \text{ if } p \geq 0 \text{ and } s \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

위의 v 는 참고문헌 (7)~(10)에서 사용된 접촉오차와 동일한 것이며, 접촉조건 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$v = 0 \text{ and } p \leq 0 \quad (7)$$

즉, 식 (6)에 의하면 $v=0$ 이면 $s \leq 0$ 이어야 하며, $s < 0$ 이고 $v=0$ 이면 $p \geq 0$ 인 경우뿐이며, 또 식 (7)에 의하여 $p \leq 0$ 이므로, 식 (6)과 (7)에 의하여 접촉조건 (5)가 유도되는 것이다.

한편 캠과 종동절 사이에는 동적인 접촉조건이 적용되어야 하며, 따라서 접촉점에서 캠과 종동절의 속도 및 가속도 적합조건을 만족시켜야 한다. (10, 13, 14) 이를 위하여 \bar{s} 와 $\bar{\dot{s}}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{s} = -r\omega \sin \beta - \dot{u}_c \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\dot{s}} &= -r\omega^2 \cos \beta - r\dot{\omega} \sin \beta - \frac{2\omega^2}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{\alpha=\beta}} \\ &\quad + \left(\left(\frac{\omega}{\frac{dy}{d\alpha}} \frac{d^2x}{dy^2} \right)^2 \frac{d^2x}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\beta} - \ddot{u}_c \end{aligned} \quad (9)$$

위에서 r 는 접촉점 C와 캠 중심과의 거리, ω 는 캠의 회전 각속도, \dot{u}_c 와 \ddot{u}_c 는 캠과 접촉하는 종동절 접촉점의 속도 및 가속도이며, 캠 접촉점 C의 절대가속도를 부록 (A.7)과 같이 구하여 사용한 것이다. 그리고 캠과 종동절이 접촉을 유지하고 있는 동안에는 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} \bar{s} &= 0 \text{ if point C is a contact point} \\ &\text{(not a separated point)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\dot{s}} &= 0 \text{ if point C is a contact point} \\ &\text{(not a separated point)} \end{aligned} \quad (11)$$

이를 적용시키기 위하여 시간 $t + \Delta t$ 에서의 속도 접촉오차 \bar{v} 와 가속도접촉오차 $\bar{\dot{v}}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t} &= \bar{s}^{t+\Delta t} \\ &\text{if } \{ \bar{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t} &= \bar{s}^{t+\Delta t} \\ &\text{if } \{ \bar{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (13)$$

3. 방정식해법

3.1 반복계산법

본 논문에서는 캠과 종동절 사이의 접촉점에서 조건 (5), (10) 및 (11)을 만족시키면서 운동방정식 (1)의 해를 구해야 한다. 그런데 접촉력 p 가 운동방정식 (1)의 해 이전에 주어진다면 간단한 시간적분 (즉, 구속조건이 없는 간단한 상미분방정식해법)에 의하여 종동절의 변위, 속도 및 가속도가 쉽게 구해진다. 따라서 만약 정확한 접촉력이 주어진다면 식 (1)의 해에 의해서 조건 (5), (10) 및 (11)은 자동적으로 만족된다. 이러한 관점에서 본 논문에서는 조건 (5), (10) 및 (11)을 만족시키는 접촉력 p 를 반복계산법에 의하여 구한다. 이를 위하여 변위접촉조건 (5)와 운동방정식 (1)의 연립방정식에 의하여 변위 u 를 결정하고, 속도접촉조건 (10)와 운동방정식 (1)의 연립방정식에 의하여 속도 \dot{u} 를 결정하며, 가속도접촉조건 (11)과 운동방정식 (1)의 연립방정식에 의하여 가속도 \ddot{u} 를 결정한다. 이러한 과정은 참고문헌 (10)에 자세히 설명되어 있으므로 본 논문에서는 실제 계산에 필요한 방법만 설명하기로 한다. (단 본 논문의 경우 구속조건은 캠과 종동절 사이의 접촉조건 뿐이므로 계산가속기법은 적용하지 않음.)

먼저 변위접촉조건 (5)는 다음의 반복계산법에 의하여 변위접촉오차 v 를 0으로 수렴시켜 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \bar{p}^{t+\Delta t, m} &= p^{t+\Delta t, m-1} - b v^{t+\Delta t, m-1} \\ \bar{p}^{t+\Delta t, m-1} &= \min(0, \bar{p}^{t+\Delta t, m-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

위에서 $t + \Delta t$ 는 시간(time step), m 은 반복횟수, b 는 다음에 설명되는 상수이고, $v^{t+\Delta t, m-1}$ 은 접촉력 $p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용하여 계산된 (1)의 해를 정의 (6)에 대입하여 계산된 값이다. (시간 $t + \Delta t$ 에서의 초기 (즉, $m=0$ 인 경우의) p 값은 임의의 값이어도 관계없으며, 예로써 시간 t 에서 구한 p 값을 사용하면 됨.) 그리고 식 (14)의 두번째 식은 접촉력이 인장력이 되어서는 안되기 때문에 필요하다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 변위 u 는 위의 반복계산법에 의하여 계산된 접촉력을 운동방정식 (1)에 대입

하여 구한다. 본 논문에서 사용하고 있는 위와같은 방법은, 즉 매 반복계산시마다 접촉력을 (14)에 의하여 먼저 구하고 그러한 접촉력을 이용하여 운동방정식 (1)의 해를 구하는 방법은, augmented Lagrange multiplier method 또는 updated multiplier scheme을 사용하여 구속조건이 부과된 방정식을 풀기위한 일반적인 과정과 유사한 것이며 관련 참고문헌에 그 과정이 자세히 설명되어 있다.

그리고 속도적합조건 (10)은 다음의 반복계산법에 의하여 속도오차 \bar{v} 를 0으로 수렴시켜 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \bar{p}^{t+\Delta t, m} &= p^{t+\Delta t, m-1} - \bar{b} \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} \\ \bar{p}^{t+\Delta t, m-1} &= \min(0, \bar{p}^{t+\Delta t, m-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

위에서 \bar{b} 는 다음에 설명되는 상수이고, $\bar{v}^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력 $p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용하여 계산된 (1)의 해를 정의 (12)에 대입하여 계산된 값이다. 시간 단위 $t + \Delta t$ 에서의 속도 \dot{u} 는 위의 반복계산법에 의하여 계산된 접촉력을 운동방정식 (1)에 대입하여 구한다.

그리고 가속도적합조건 (11)은 다음의 반복계산법에 의하여 가속도오차 \bar{v} 를 0으로 수렴시켜 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \bar{p}^{t+\Delta t, m} &= p^{t+\Delta t, m-1} - \bar{b} \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} \\ \bar{p}^{t+\Delta t, m-1} &= \min(0, \bar{p}^{t+\Delta t, m-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

위에서 \bar{b} 는 다음에 설명되는 상수이고, $\bar{v}^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력 $p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용하여 계산된 (1)의 해를 정의 (13)에 대입하여 계산된 값이다. 시간 단위 $t + \Delta t$ 에서의 가속도 \ddot{u} 는 위의 반복계산법에 의하여 계산된 접촉력을 운동방정식 (1)에 대입하여 구한다.

그런데 속도와 변위는 가속도를 적분하여 구해지므로 계산과정중 가속도의 정밀도는 속도 및 변위의 정밀도에 비하여 상대적으로 높으며, 따라서 정의 (12)와 (13)대신 다음과 같이 시간 $t + \Delta t$ 에서의 속도 및 가속도 접촉오차를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t} &= \bar{s}^{t+\Delta t} \\ &\text{if } \{ \bar{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \\ &\text{or if } \{ \bar{p}^t < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t} &= \bar{s}^{t+\Delta t} \\ &\text{if } \{ \bar{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \end{aligned}$$

$$\text{or if } \{ \bar{p}^t < 0 \text{ and } [\bar{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ or } \bar{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \\ = 0 \text{ otherwise} \quad (18)$$

참고문헌 (10)에서 예시된 바와 같이 위의 (17), (18)처럼 속도 및 가속도 접촉오차를 정의하면 복잡한 시스템의 계산에서 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

3.2 반복계산법의 수렴

위의 반복계산법의 수렴에 관하여는 참고문헌 (10)에서 자세히 설명되어 있으므로 여기에서는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 반복계산법의 수렴에 관하여 간단히 설명한다. 그리고 반복계산법 (14), (15) 및 (16)에 의하여 각각의 접촉오차가 0으로 단조 수렴하는 것이 모두 유사한 방법에 의하여 증명되므로 여기에서는 반복계산법 (14)의 경우만 설명하기로 한다. 그리고 적분 시간간격 Δt 및 식 (14)의 b 는 필요한 경우 충분히 작은 값을 취할 수 있다고 가정한다. 그러면 식 (1), (4) 및 (14)을 이용하여 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_c)^{t+\Delta t, m} - (\ddot{u}_c)^{t+\Delta t, m-1} \\ &= \mathbf{T}^T (\ddot{u}^{t+\Delta t, m} - \ddot{u}^{t+\Delta t, m-1}) \\ &= -\mathbf{T}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T} (\bar{p}^{t+\Delta t, m} - \bar{p}^{t+\Delta t, m-1}) \\ &= \mathbf{T}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T} b v^{t+\Delta t, m-1} \\ &= b M^* v^{t+\Delta t, m-1} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)의 세번째 식에서는 중동절의 접촉점에 작용하는 압력 p 의 변화로 인하여 중동절 전체 절점에서 발생하는 가속도변화를 식 (1)에서 구하기 위하여 행렬 T 가 사용된 것이다. 또 식 (19)의 네번째 식에서는 접촉력이 식 (14)의 첫번째 식에 의하여 변화된다고 편의상 가정하였는데, 이러한 가정은 식 (14)의 b 의 크기를 줄임으로써 언제나 만족시킬 수 있으므로 수렴해석에서는 문제가 되지 않는다. (실제 계산시에는 이처럼 b 의 크기가 꼭 줄어들 필요는 없음.⁽⁹⁾) 또한 식 (19)의 M^* 는 다음과 같은 상수이다.

$$M^* = \mathbf{T}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T} \quad (20)$$

적분시간간격 Δt 가 작으면 그 기간중에 가속도의 변화는 선형이라고 취급할 수 있으므로(즉, Δt 가 작으면 시간 t 와 $t + \Delta t$ 사이의 구간에서 가속도는 시간의 1차 함수로 가정할 수 있으므로), 가속도의 변화를 두번 시간적분하여 변위의 변화를 구하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & (u_c)^{t+\Delta t, m} - (u_c)^{t+\Delta t, m-1} \\ & \approx \frac{\Delta t^2}{6} ((\ddot{u}_c)^{t+\Delta t, m} - (\ddot{u}_c)^{t+\Delta t, m-1}) \end{aligned} \quad (21)$$

접촉력 p 가 식 (14)에 의하여 변화하는 경우, 식 (3)에 의하여 s 의 변화는 접촉점의 변위의 변화와 같다. 또 $v^{t+\Delta t, m-1}$ 이 0이 아닌 경우, 변위 오차 v 의 변화는 식 (6)의 첫번째 식 s 의 변화와 같아지므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & v^{t+\Delta t, m} - v^{t+\Delta t, m-1} \\ &= -((u_c)^{t+\Delta t, m} - (u_c)^{t+\Delta t, m-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (19), (21), (22)에 의하여 다음이 얻어진다.

$$v^{t+\Delta t, m} \approx \left(1 - b M^* \frac{\Delta t^2}{6} \right) v^{t+\Delta t, m-1} \quad (23)$$

따라서, $v^{t+\Delta t, m-1}$ 이 0이 아닌 경우 다음이 성립되면 $v^{t+\Delta t, m}$ 은 $v^{t+\Delta t, m-1}$ 보다 작아진다 ($v^{t+\Delta t, m-1}$ 이 0인 경우는 이미 정확한 해가 구해진 것이므로 논의할 필요가 없음.)

$$0 < b < \frac{12}{M^* \Delta t^2} \quad (24)$$

그리고 식 (14)에서 p 와 \bar{p} 가 동일한 값인 경우, b 가 다음 값을 취하면 식 (23)의 괄호 내부가 0이 되므로 최상의 수렴속도가 얻어진다.

$$b = \frac{6}{M^* \Delta t^2} \quad (25)$$

식 (14)에서 만약 $\bar{p} < 0$ 이고 $p = 0$ (예로써 캠과 중동절이 분리되는 경우)이면 일반적으로 b 는 위의 값보다 작아야 하는데 이러한 경우는 계산시 비교적 발생 빈도가 작으므로 계산효율에는 큰 문제가 되지 않는다. (이러한 경우에는 b 값을 줄여서 계산할 필요가 있으며, 예로써 접촉오차 v 가 단조 감소되도록 b 값을 1/2씩 줄여서 반복적으로 계산하면 되며, 그 자세한 과정은 참고문헌 (7)~(10)에 소개되어 있음.) 속도오차 (12) 또는 (17) 및 가속도접촉오차 (13) 또는 (18)도 동일한 방법에 의하여 반복계산법 (15) 및 (16)에 의하여 0으로 단조 감소하며, 특히 \hat{b} 및 \bar{b} 가 다음과 같은 값을 취하면, 반복계산법 (14)처럼, 대부분의 경우 최대의 수렴속도가 얻어진다.

$$\hat{b} = \frac{2}{M^* \Delta t} \quad (26)$$

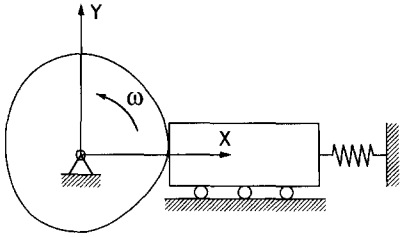


Fig. 3 Cam and follower.

$$\tilde{b} = \frac{1}{M^*} \tag{27}$$

3.3 컴퓨터 계산과정

본 논문에서는 매 시간단계마다 접촉조건 (5), (10) 및 (11)을 만족시키며 운동방정식 (1)을 시간 적분 하는 것이며, 이에 필요한 계산과정은 참고문헌 (10)의 과정과 실질적으로 동일하다. (단, 여기에서는 계산가속기법은 적용하지 않았음.) 다음에 시간 단위 $t + \Delta t$ 에서의 계산과정을 간단히 약술한다.

Step 1. 변위 접촉 오차 (6) 및 반복계산법 (14)에 의하여 접촉력을 계산한 후 운동방정식 (1)을 시간 적분하여 해를 구한다. 식 (2)에 의하여 접촉 가능점을 선정하며 변위접촉오차 (6)의 크기가 사전 지정된 허용치보다 작게 될 때까지 (14)에 의한 계산을 반복한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 변위는 여기에서 결정된다.

Step 2. 참고문헌 (7)과 같은 방법에 의하여 적분 오차를 계산하고 다음 시간단계에서 사용할 시간간격(time step size)을 결정한다. (적분오차가 최대 허용치를 초과한 경우 step 1으로 가서 시간 $t + \Delta t$ 의 계산을 처음부터 다시함.)

Step 3. 속도접촉오차 (12) 또는 (17) 및 반복계산법 (15)에 의하여 접촉력을 계산한 후 운동방정식 (1)을 시간적분하여 해를 구한다. 속도접촉오차 (12) 또는 (17)의 크기가 사전 지정된 허용치보다 작게 될 때까지 (15)에 의한 계산을 반복한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 속도는 여기에서 결정된다.

Step 4. 가속도접촉오차 (13) 또는 (18) 및 반복계산법 (16)에 의하여 접촉력을 계산한 후 운동방정식 (1)을 시간적분하여 해를 구한다. 가속도접촉오차 (13) 또는 (18)의 크기가 사전 지정된 허용치보다 작게 될 때까지 (16)에 의한 계산을 반복한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 접촉력 p 및 가속도는 여기

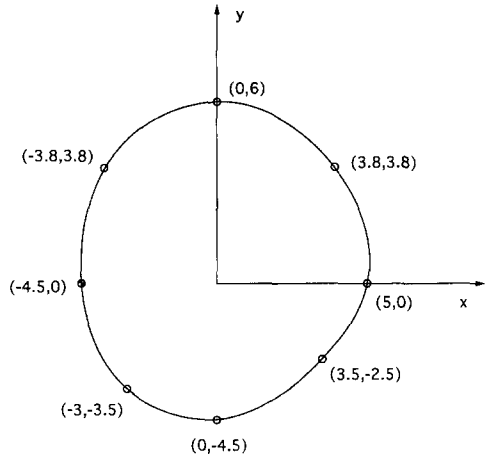


Fig. 4 Initial configuration of the cam surface.

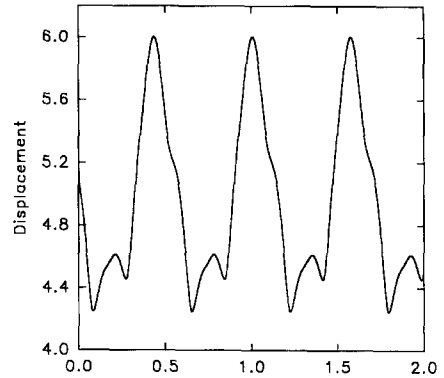


Fig. 5 Variation of the displacement of the follower ($\omega = 1.75$).

에서 결정된다.

4. 예제 계산

4.1 강체 캠과 강체 증동절

Fig.3에서 보인 바와 같이 강체로 된 캠과 강체로 된 증동절로 구성된 모델을 생각한다. 본 모델은 참고문헌 (6)에서 사용한 것과 동일한 것으로서 캠의 초기 기하학적 모양은 Fig.4와 같이 8개의 점의 좌표를 이용하여 cubic spline interpolation에 의하여 만들어진다. Fig.3의 스프링상수는 500, 스프링의 초기변형은 7, 질량은 1이며, 캠은 1.75 rev/s의 일정한 각속도로 회전한다. (여기에서는 참고문헌 (6)에서 사용한 것과 동일한 모델을 사용하여 계산 결과를 비교하려고 하므로 참고문헌 (6)에서와 같이 단위는 생략한다.)

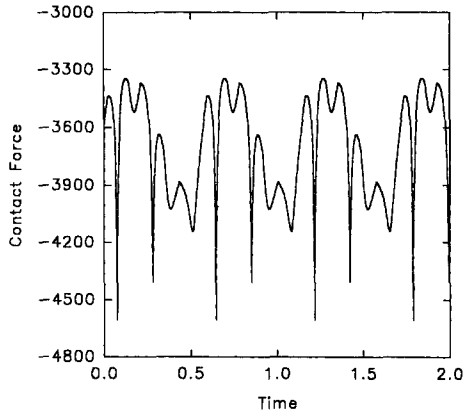


Fig. 6 Variation of the contact force ($\omega=1.75$).

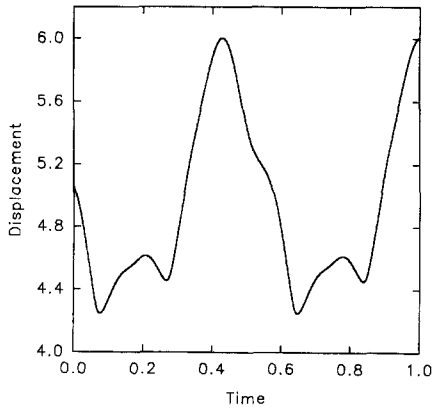


Fig. 7 Variation of the displacement of the follower ($\omega=1.75$).

본 논문의 방법에 의하여 계산된 종동절의 변위가 Fig. 5에 그려져 있으며, 참고문헌 (6)의 결과와 일치한다. 본 논문의 방법에 의하여 계산된 캠과 종동절 사이의 접촉력은 Fig. 6에 그려져 있는데, 전체적인 모양은 참고문헌 (6)의 결과와 어느 정도 유사하지만 자세한 모양은 심한 차이가 난다. 즉 참고문헌 (6)에서는 접촉력 계산을 위하여 불가피하게 인위적인 스프링과 댐퍼를 첨가하였는데, 그 결과 접촉력이 주기적으로 변하지 못하고 엉뚱한 진동(spurious oscillations)이 심하게 해에 포함되어 있으며, 특히 인위적인 스프링과 댐퍼의 상수들의 값에 의하여 그 해의 모양이 달라지고 있다. 그러나 본 논문의 해에서는 접촉력이 주기적으로 변하고 수치해석상의 문제로 인한 엉뚱한 진동은 포함되어 있지 않으며, 특히 접촉점에서 인위적인 스프링과 댐퍼를 사용하지 않은 관계로 접촉력이

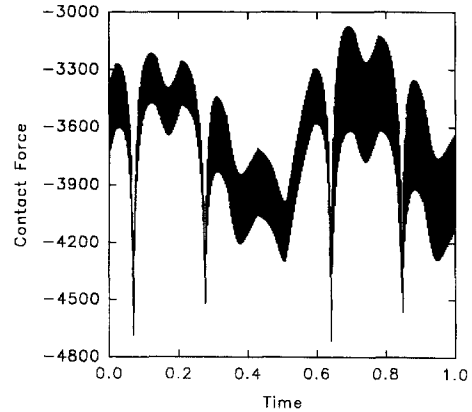


Fig. 8 Variation of the contact force ($\omega=1.75$).

참고문헌 (6)의 경우보다 훨씬 날카로운 모양을 하고 있다. 결론적으로 본 논문의 경우 안정된 해를 얻을 수 있으며, 이것은 본 논문에서는 접촉점에서 속도 및 가속도 적합조건을 만족시켰기 때문이다. 본 계산에서 운동방정식 (1)의 적분을 위하여 참고문헌 (15)에 소개되어 있는 상미분방정식 해법용인 프로그램 DOPRIN을 사용하였으며, 적분오차의 허용치는 10^{-7} 로 하였고, 또한 반복계산법 (14), (15), (16)의 허용오차는 각각 10^{-8} , $10^{-8}/\Delta t$, $10^{-8}/\Delta t^2$ 으로 하였다.

4.2 강제 캠과 탄성체 종동절

여기에서는 앞 예제와 동일한 모델을 사용하되 종동절을 탄성체로 취급한다. 종동절의 질량은 1, 종탄성계수는 10^7 , 단면적은 3, 길이는 24로 하며, 40개의 봉요소(bar element)를 이용하여 유한요소법을 적용한다. 초기에 종동절의 모든 절점은 정적 평형상태에 있으며, 캠과 접촉하는 점을 제외한 모든 절점의 초기속도는 0이라고 가정한다.

캠의 회전속도가 1.75 rev/s인 경우와 5 rev/s인 2가지 경우에 대하여 본 논문의 방법을 적용하여 계산하기로 한다. 먼저 캠이 1.75 rev/s의 일정한 속도로 회전하는 경우의 종동절 접촉점의 변위가 Fig. 7에 그려져 있으며, 캠과 종동절 사이의 접촉력이 Fig. 8에 그려져 있다. Fig. 7의 변위는 종동절이 강제인 경우의 Fig. 4의 변위와 실질적으로 동일하나, Fig. 8의 접촉력은 종동절이 강제인 경우의 Fig. 6의 접촉력과 상이하며 탄성진동이 포함되어 있다. Fig. 8에서는 접촉력에 극심한 고주파 진동이 포함된 관계로 그래프의 선이 너무 가까이

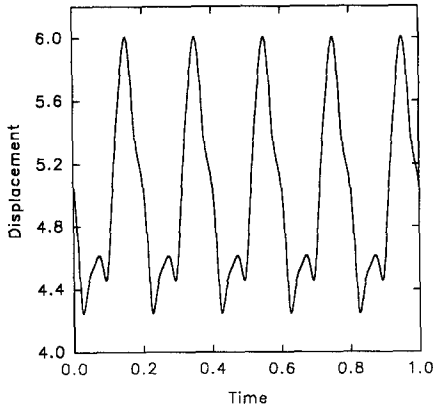


Fig. 9 Variation of the displacement of the follower ($\omega=5$).

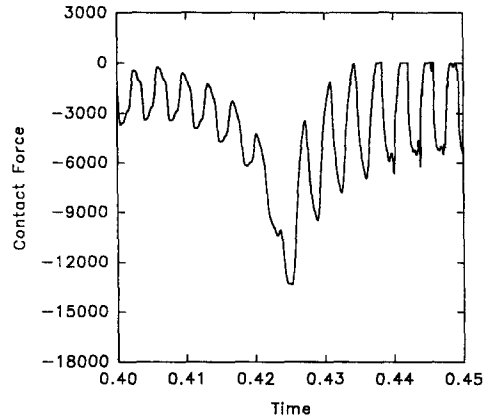


Fig. 11 Typical detailed variation of the contact force ($\omega=5$).

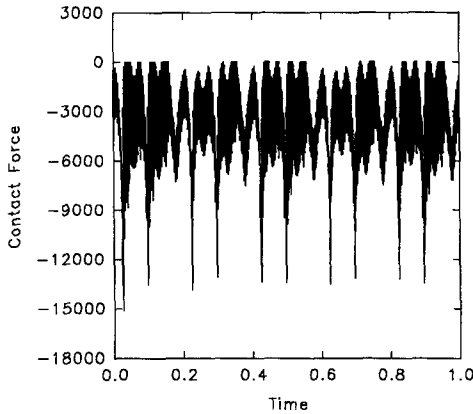


Fig. 10 Variation of the contact force ($\omega=5$).

붙어서 검게 보인 부분이 있다. (즉, 검게 보인 부분의 수직 폭이 진폭인 고주파 진동이 탄성변형으로 인하여 발생하며, 다음에 설명되는 Figs. 10~11과 같은 현상임.)

다음 캠이 5 rev/s의 일정한 속도로 회전하는 경우의 종동절 접촉점의 변위와 캠과 종동절 사이의 접촉력이 Figs. 9~11에 그려져 있다. Figs. 10~11의 접촉력은 종동절이 강체인 경우의 Fig. 6의 접촉력과 완전히 상이하며, 특히 캠과 종동절이 분리와 재접촉을 반복함을 알 수 있다. 그러나 Fig. 9의 변위는 종동절이 강체인 경우의 Fig. 5의 변위와 유사한 모양이 유지되는데 이것은 캠과 종동절 사이의 분리된 거리가 대단히 작기 때문이다. 이러한 경우에 Fig. 10과 11에서 보인 바와 같이 탄성변형으로 인한 진동으로 인하여 접촉력은 대단히 크게 증가하고 또한 캠의 회전주기(0.2 s)마다 비교적

비슷한 모양의 해가 반복됨을 알 수 있다. 본 계산에서 운동방정식 (1)의 적분을 위하여 참고문헌 (15)에 소개되어 있는 프로그램 DOPRIN을 사용하였으며 적분오차의 허용치는 10^{-6} 로 하였고, 또한 반복계산법 (14), (15), (16)의 허용오차는 각각 10^{-7} , $10^{-7}/\Delta t$, $10^{-7}/\Delta t^2$ 으로 하였다. (본 예제에서 종동절의 탄성강성도가 대단히 높으므로 Δt 즉 적분 허용오차는 상당히 작아야 되는데, 적분 허용오차를 이보다 작게 감소시켜도 계산결과에 미치는 영향은 무시할 수준임.)

5. 결 론

캠에 의하여 구동되는 종동절의 동역학적 해석을 위한 수치해석 방법을 제시하였다. 접촉점에서 변위, 속도 및 가속도 적합조건이 모두 만족되므로 수치해석적 오차로 인한 엉뚱한 진동이 해에 포함되지 않으며, 캠과 종동절이 분리와 충격적인 재접촉을 반복하는 경우에도 해석이 가능하다. 계산에 필요한 반복계산법을 제시하고 그 수렴 이유 및 계산과정을 설명하였으며, 예제 계산을 통하여 참고문헌의 결과와 비교하였다. 본 논문의 계산방법은 참고문헌 (10)의 과정과 동일한 것이며, 따라서 종동절이 엔진의 흡배기-밸브장치처럼 다른 물체들과 복잡하게 연결되어 있는 일반적인 다물체 동역학 모델에도 응용될 수 있을 것이며, 이에 대한 연구가 요망된다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 지원(과제번호: 961-1002-020-1)에 의하여 수행되었으며, 관련자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Chan, C. and Pisano, A., 1987, "Dynamic Model of a Fluctuating Rocker-Arm Ratio Cam System," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 109, pp. 356~365.
- (2) Grewal, P. S. and Newcombe, W. R., 1988, "Dynamic Performance of High-Speed Semi-Rigid Follower Cam Systems-Effects of Cam Profile Errors," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 23, pp. 121~133.
- (3) Amirouche, F. M. L., 1992, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey.
- (4) Garcia de Jalon, J. and Bayo, E., 1994, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, Springer-Verlag, New York.
- (5) Haug, E. J., 1989, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems-Vol. I*, Allyn and Bacon, Boston.
- (6) Cardona, A. and Geradin, M., 1993, "Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms with Cams," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 103, pp. 115~134.
- (7) Lee, K., 1993, "An Accelerated Iterative Method for the Dynamics of Constrained Multibody Systems," *Comp. Mech.*, Vol. 12, pp. 27~38.
- (8) Lee, K., 1995, "A Numerical Solution for Dynamic Interaction between Rigid Wheel and Flexible Beam," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 267~279.
- (9) Lee, K., 1994, "A Numerical Solution for Dynamic Contact Problems Satisfying the Velocity and Acceleration Compatibilities on the Contact Surface," *Comp. Mech.*, Vol. 15, pp. 189~200.

- (10) Lee, K., 1997, "A Numerical Method for Dynamic Analysis of Vehicles Moving on Flexible Structures Having Gaps," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 511~531.
- (11) Atkinson, K. E., 1989, *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- (12) Yoon, K. and Rao, S. S., 1993, "Cam Motion Synthesis Using Cubic Splines," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 115, pp. 441~446.
- (13) Taylor, R. L. and Papadopoulos, P., 1993, "On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 2123~2140.
- (14) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (15) Hairer, E., Norsett, S. P. and Wanner, G., 1987, *Solving Ordinary Differential Equations-Vol 1*, Springer, Berlin
- (16) Meriam, J. L., 1980, *Dynamics*, John Wiley & Sons, New York.

부 록

Fig. 1에서 캠은 각속도 ω 와 각가속도 $\dot{\omega}$ 로 회전하고 있으며, (X, Y) 좌표계는 절대좌표계이고 (x, y) 좌표계는 캠에 고정되어 회전하는 좌표계이다. 또한 계산을 하는 시간에 (X, Y) 좌표계와 (x, y) 좌표계는 순간적으로 일치한다고 생각한다. 그리고 캠 위의 점 C는 항상 접촉 가능점이 되기 위한 조건 (2)를 유지하도록 캠의 표면에서 움직인다고 가정한다. Fig. 1에서 만약 점 C가 Δt 시간 후 C'로 이동한다면 (즉, Δt 시간 후 점 C'가 조건 (2)를 만족한다면) 캠 표면은 x, y 좌표에 의하여 표시되므로 다음이 성립한다.

$$\frac{d^2x}{dy^2}\Delta y = \omega\Delta t \quad (A1)$$

위에서 Δt 는 미분에 사용되는 미소시간을 뜻하며, (A. 1)을 변형하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{\frac{d^2x}{dy^2}} \quad (A2)$$

캠 표면의 x, y 좌표는 Fig. 2에 표시된 각도 α 를 이용하여 내삽하므로 다음이 얻어진다.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dy}{d\alpha} \quad (\text{A3})$$

식 (A2)와 (A3)에 의하여

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{\frac{dy}{d\alpha} \frac{d^2x}{dy^2}} \quad (\text{A4})$$

식 (2) 및 미분연쇄법칙에 의하여

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} (x(\alpha)) \right)_{\alpha=\beta} = \left(\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \frac{d^2x}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\beta} \quad (\text{A5})$$

그런데, 동역학 기본공식 (여로써 참고문헌 (16)

참조)에 의하여, 움직이는 좌표계를 이용한 점 C의 절대가속도 \dot{X} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X} = & -r\omega^2 \cos \beta - r\dot{\omega} \sin \beta - 2\omega \left(\frac{dy}{dt} \right)_{\alpha=\beta} \\ & + \left(\frac{d^2}{dt^2} (x(\alpha)) \right)_{\alpha=\beta} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

식 (A2), (A4), (A5) 및 (A6)에 의하여 점 C의 절대가속도 \dot{X} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X} = & -r\omega^2 \cos \beta - r\dot{\omega} \sin \beta - \\ & - \frac{2\omega^2}{\left(\frac{d^2x}{dy^2} \right)_{\alpha=\beta}} + \left(\left(\frac{\omega}{\frac{dy}{d\alpha} \frac{d^2x}{dy^2}} \right)^2 \frac{d^2x}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\beta} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$