

# 굽힘효과를 고려한 박막 유한요소에 의한 단면 성형해석

김준보\* · 이광병\* · 김영탁\*\*

(1996년 11월 30일 접수)

## Sectional Forming Analysis by Membrane Finite Elements Considering Bending Effects

J. B. Kim, K. B. Lee and Y. T. Keum

**Key Words :** Sectional Forming Analysis(단면 성형해석), Bending Effects(굽힘효과), Plane Strain(평면변형률), Super Element(중첩요소), Interior Angle(내각)

### Abstract

The sectional forming analysis considering bending effects from the geometrically deformed shape of two linear membrane finite elements (called super element) was performed under plane strain assumption for analyzing forming processes of an arbitrarily shaped draw-die. For the evaluation of bending effects, the bending equivalent forces are calculated from the bending moment computed using the changes in the interior angle at the middle node of super element, and are augmented to the membrane stretch forces. In order to verify the validity of the bending formulation, the simulation results for the stretch, draw, and bend sections were compared with membrane analysis results and measurements.

### 기 호 설 명

$F_I$  : 내부 저항력벡터

$F_E$  : 외부 접촉력벡터

$F^{MEM}$  : 박막에 의한 내부 저항력

$F^{BEND}$  : 굽힘에 의한 내부 저항력

${}^I F$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $I$ 에 작용하는 내부 저항력

${}^J F$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $J$ 에 작용하는 내부 저항력

${}^I F_x$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $I$ 에 작용하는 내부 저항력의  $x$ 성분

${}^I F_z$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $I$ 에 작용하는 내부 저항력의  $z$ 성분

${}^J F_x$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $J$ 에 작용하는 내부 저항력의  $x$ 성분

${}^J F_z$  : 굽힘영향에 의하여 요소  $J$ 에 작용하는 내부 저항력의  $z$ 성분

$K$  : 강성계수

$[K]_I$  : 내부 강성행렬

$[K]^{MEM}$  : 박막에 의한 내부 강성행렬

$[K]^{BEND}$  : 굽힘에 의한 내부 강성행렬

${}^I L$  :  $I$ 번째 요소의 길이

${}^J L$  :  $J$ 번째 요소의 길이

$M$  : 굽힘모멘트

${}^I n_x$  : 요소  $I$ 에 수직인 단위벡터의  $x$ 성분

${}^I n_z$  : 요소  $I$ 에 수직인 단위벡터의  $z$ 성분

${}^J n_x$  : 요소  $J$ 에 수직인 단위벡터의  $x$ 성분

${}^J n_z$  : 요소  $J$ 에 수직인 단위벡터의  $z$ 성분

$r$  : 수직 이방성계수

$r$  : 일반화된 미지의 종속벡터

$\Delta r$  : 종속벡터  $r$ 의 증분

$\Delta r^*$  : 종속벡터의 시도증분

\*한양대학교 기계공학부

\*\*회원, 한양대학교 기계공학부

- $\delta \mathbf{r}$  : 종속벡터의 수정증분  
 $\mathbf{R}_I$  : 일반화된 내력벡터  
 $\mathbf{R}_E$  : 일반화된 외력벡터  
 $t$  : 박판의 두께  
 $\mathbf{t}$  : 접선단위벡터  
 $\Delta \mathbf{u}$  : 변위증분  
 $\Delta \mathbf{u}^*$  : 시도변위증분  
 $\theta$  :  $t = t + \Delta t$  일 때의 내각  
 $\theta_0$  :  $t = t$  일 때의 내각  
 $\delta\left(\frac{1}{\theta}\right)$  : 시간증분에 따른 각도변화값

## 1. 서 론

대부분의 박막모델에 의한 박판 성형해석에서는 박판재의 두께가 박판의 곡률에 비해서 상대적으로 작기 때문에 굽힘영향에 의한 변형이 무시되었다. 이러한 박막모델은 효율적인 해석시간을 갖고 있어 실제 금형설계에 적용하기에 유용하다. 그러나, 굽힘효과를 고려할 수 없다는 단점으로 인하여 작은 곡률을 가진 단면, 딥 드로잉(deep drawing) 공정, 또는 복잡한 형상을 가진 성형해석에서 굽힘에 의한 국부적인 영향을 계산하는데 어려움이 있다. 이에 반해, 굽힘효과를 고려할 수 있는 쉘요소는 정밀하게 해석을 할 수 있으며, 펀치나 다이 구석 부분에서 박판이 굽혀질 때 굽힘력을 고려한 성형 해석을 할 수 있으나, 쉘이론에 의한 해석은 방대한 데이터량과 많은 해석시간이 소요된다. 따라서, 효율적인 해석 시간을 갖고 있어 실제 금형 설계에 적용하기 적당한 박막모델에 굽힘효과를 고려하기 위하여 Zhou<sup>(1)</sup>는 세 절점을 지나는 원의 반지름을 구하여 시간증분 사이의 곡률변화로부터 굽힘력을 계산하였으며, 유동진과 양동열<sup>(2)</sup>은 회전강성, 즉 요소와 요소를 연결하는 절점에 회전스프링을 부가시켜 요소 사이의 각도변화로부터 회전모멘트를 구하였다. 또한, Kubli와 Reissner<sup>(3)</sup>는 요소 재분할 기법에 기하학적으로 굽힘효과를 도입하여 그 효율성을 보인 바 있다.

본 연구에서는 박막모델로 굽힘효과를 고려하기 위하여, 세 절점으로 구성된 인접한 두 요소의 각도변화를 세 절점의 좌표로 표현하고, 굽힘력을 계산하였다. 그리고, 연구결과의 타당성을 알아보기 위하여 스트레치, 드로우 및 굽힘 단면에 대하여 성형해석하고 해석결과를 측정치와 비교하였다.

## 2. 유한요소법

### 2.1 힘 평형방정식

힘 평형방정식은 가상일의 원리로부터 유도된다. 최소에너지 경로를 따라 미소한 시간  $\Delta t$  동안 이루어진 소성일량  $\Delta W_P$ 는 다음과 같다.

$$\Delta W_P = \int_{V_0} \int_{\bar{\epsilon}_0}^{\bar{\epsilon}_0 + \Delta \bar{\epsilon}} \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} dV_0 \quad (1)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}_0$ 는  $t_0$ 에서 유효변형률이고,  $\Delta \bar{\epsilon}$ 는 미소시간  $\Delta t$  동안 증가한 유효변형률 증분으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \dot{\bar{\epsilon}} dt \quad (2)$$

식 (1)에 가상일의 원리를 적용하고, 절점의 가상변위값은 공간좌표 파라미터의 함수가 아닌 절점의 가상변위값( $\Delta \mathbf{u}$ )을 고려할 때, 힘 평형방정식은 다음과 같이 유도된다.<sup>(4)</sup>

$$\mathbf{F}_I(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}_E(\Delta \mathbf{u}) \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{F}_I$ 는 소성변형에 의한 내부 저항력벡터로

$$\mathbf{F}_I = \int_{V_0} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta \mathbf{u}} dV_0 \quad (4)$$

이고,  $\mathbf{F}_E$ 는 금형과의 접촉에 의한 외부 접촉력벡터로

$$\mathbf{F}_E = \int_{A_c} f_e dA_c \quad (5)$$

이다.

평면변형률로 가정된 단면 해석에서 평형방정식 (3)과 기하학적 구속조건식을 포함하는 통합방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{F}_I &= {}^{n+1}\mathbf{F}_E \\ {}^{n+1}\mathbf{X}^S &= {}^{n+1}\mathbf{X}^P \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  ${}^{n+1}\mathbf{X}^S$ 는  $t = t + \Delta t$ 에서 유한요소 절점의 위치벡터이고,  ${}^{n+1}\mathbf{X}^P$ 는 이 절점에서 유한요소 기초 법선벡터 방향으로 펀치면과 만나는 점의 위치벡터이다.

미지의 종속벡터  $\mathbf{r}$ 을 도입하면,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{u}$ 는 절점변위이고,  $P$ 는 법선방향성분의 외력을 나타낸다. 종속벡터  $\mathbf{r}$ 을 사용하여 식 (6)을 간략히 표현하면 다음과 같다.

$${}^{n+1}\mathbf{R}_I(\Delta\mathbf{r}) = {}^{n+1}\mathbf{R}_E(\Delta\mathbf{r}) \quad (8)$$

여기서, 일반화된 내력벡터  $R_I$ 와 일반화된 외력벡터  $R_E$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_I = \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathbf{F}_I(\Delta\mathbf{u}) \\ {}^{n+1}\mathbf{X}^S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathbf{F}_E(\Delta\mathbf{u}) \\ {}^{n+1}\mathbf{X}^P \end{bmatrix} \quad (9)$$

비선형 방정식인 식 (6)을 수치적으로 풀기 위하여 뉴턴랩슨 과정이 도입되었다. 구하는 종속벡터의 증분  $\Delta\mathbf{r}$ 은 시간에 따라서 축적되므로 뉴턴랩슨 과정의 종속벡터의 시도증분  $\Delta\mathbf{r}^*$ 과 종속벡터의 수정증분  $\delta\mathbf{r}$ 의 합으로 보면 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}^* + \delta\mathbf{r} \quad (10)$$

식 (6)을 종속벡터의 시도증분  $\Delta\mathbf{r}^*$ 에 관하여 테일러(Taylor) 급수로 전개하고, 선형화를 위하여 2차 이상의 미분항들을 무시하면, 다음과 같은 뉴턴랩슨 방정식을 얻을 수 있다.

$${}^{n+1}\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = {}^{n+1}\mathbf{R}_L + {}^{n+1}\mathbf{R}_C - {}^{n+1}\mathbf{R}_I \quad (11)$$

식 (11)을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathbf{F}_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathbf{F}_L \\ {}^{n+1}\mathbf{X}^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathbf{F}_I \\ {}^{n+1}\mathbf{X}^S \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,  $\mathbf{K}$ 는 시도변위증분( $\Delta\mathbf{u}^*$ )으로 표현되는 강성행렬로서

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}]_I - [\mathbf{K}]_E = \left( \frac{\partial \mathbf{F}_I}{\partial \Delta\mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{F}_E}{\partial \Delta\mathbf{u}} \right) \Big|_{\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}^*} \quad (13)$$

이다. 식 (12)에서  $\Delta\mathbf{u}$ 는 평형상태에서 "0"인 값을 갖는 수정변위 증분벡터이고,  $\mathbf{F}_I$ 와  $\mathbf{F}_E$ 는 시도변위 증분의 항으로 나타내어진다.<sup>(4)</sup> 또한  $\mathbf{\Gamma}$ 와  $\mathbf{C}$ 는 다음과 같이 각각 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= - \frac{\partial (\mathbf{F}_E - \mathbf{F}_I)}{\partial P} \\ &= - \frac{\partial \mathbf{F}_E}{\partial P} \\ &= - \frac{\partial}{\partial P} [(n - \mu\phi \cdot t) P] \\ &= - (n - \mu\phi \cdot t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= - \frac{\partial D_p}{\partial \Delta\mathbf{u}} \\ &= - \frac{\partial (W_p / ZN)}{\partial \Delta\mathbf{u}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Z_x}{ZN} + (Z_x Z_{xx}) W_p / ZN^3 \\ -\frac{1}{ZN} + (Z_x Z_{xz}) W_p / ZN^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $Z_{xx}$ ,  $Z_{xz}$ 는 변위증분  $\Delta\mathbf{u}$ 에 관한  $Z_x$ 의 미분값들이다.

## 2.2 내부 저항력과 강성행렬

굽힘효과를 고려할 수 없는 박막모델에 굽힘효과를 고려하기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다. 첫째, 중립면에서는 굽힘에 의한 유효변형률이 "0"이라고 가정하였으며, 그 중립면은 박판두께의 가운데 부분에 위치한다고 가정하였다. 둘째, 박판의 실제 성형에서는 박판의 인장과 굽힘은 서로 연성되어서 발생된다. 그러나, 기하학적으로 굽힘효과를 고려한 이론에서 내부 저항력과 강성행렬은 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬, 굽힘에 의한 내부 저항력과 강성행렬이 서로 연성되지 않고, 각각 개별적으로 취급되어진다고 가정한다. 즉, 굽힘에 의한 내부 저항력과 강성행렬을 구성하여, 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬에 첨가되어진다. 따라서, 내부 저항력과 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}^{MEM} + \mathbf{F}^{BEND} \quad (16)$$

여기서,  $\mathbf{F}_I$ 는 굽힘효과와 박막의 인장에 의한 전체 시스템의 내부 저항력이고,  $\mathbf{F}^{MEM}$ 과  $\mathbf{F}^{BEND}$ 는 인장에 의한 내부 저항력과 굽힘에 의한 내부 저항력을 의미한다. 전체 시스템의 내부 강성행렬도 내부 저항력과 마찬가지로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\mathbf{K}]_I = [\mathbf{K}]^{MEM} + [\mathbf{K}]^{BEND} \quad (17)$$

여기서,  $[\mathbf{K}]_I$ 는 굽힘효과와 박막의 인장에 의한 전체 시스템의 강성행렬이고,  $[\mathbf{K}]^{MEM}$ 과  $[\mathbf{K}]^{BEND}$ 는 인장에 의한 강성행렬과 굽힘에 의한 강성행렬을 의미한다.

### 2.2.1 인장에 의한 내부 저항력과 강성행렬

내부 저항력은 시도변위증분( $\Delta\mathbf{u}^*$ )에 의해 생성된 유효변형률증분으로부터 정의된다. Hill의 새로운 항복이론을 평면변형률상태의 선요소(plane

-strain line element)에 적용하면 다음과 같은 내부 저항력벡터를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_I &= \int_{v_0} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} dV_0 \\
 &= t_0 L_0 \bar{\sigma} D_1 (D_2 + 1)^{\frac{M-1}{M}} \\
 &\quad \cdot S \frac{1}{L^2} [x_1 - x_2, z_1 - z_2, x_2 - x_1, z_2 - z_1]^T \quad (18)
 \end{aligned}$$

여기서,  $t_0$ 와  $L_0$ 는 각각 변형 전의 박판두께 및 요소길이다. 그리고  $D_1 = \frac{1}{2}[2(1+r)]^{\frac{1}{M}}$ 이고,  $D_2 = [1+2r]^{\frac{1}{M-1}}$ 이며,  $L$ 은 다음 단계의 요소길이다.  $S$ 는 요소가 인장시 +1을 갖고 압축될 때 -1의 값을 갖는 변수이며,  $T$ 는 행렬연산의 진치를 의미한다. 또한,  $D_1$ 과  $D_2$ 는 유한요소 수식화에 도입된 Hill의 비2차 이방성 항복조건의 계수들이며,  $M$ 은 비2차 항복 파라미터이다.

평면변형률 선요소에 대한 내부 강성행렬  $\mathbf{K}_I$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]_I &= \frac{\partial \mathbf{F}_I}{\partial \Delta \mathbf{u}} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} \\
 &= \int_{v_0} \left\{ \bar{\sigma} \frac{\partial^2 \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \Delta \mathbf{u}^2} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \right) \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \right\} \Big|_{\Delta u = \Delta u'} dV_0 \quad (19)
 \end{aligned}$$

여기서,  $\frac{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \Delta \mathbf{u}}$ 와  $\frac{\partial^2 \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \Delta \mathbf{u}^2}$ 는 Keum<sup>(4)</sup>의 식을 인용하였다.

2.2.2 굽힘영향에 의한 내부 저항력과 강성행렬

기하학적으로 굽힘효과를 고려하기 위해 인접하는 두 요소의 세 절점이 이루는 삼각형에서 가운데 절점의 시간변화에 따른 각도변화를 구할 수 있다. 여기서, 시간증분에 따른 각도변화는 굽힘모멘트가 작용하는 것으로 볼 수 있다.

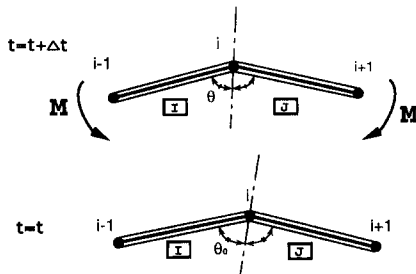


Fig. 1 Change of interior angle after a time increment,  $\Delta t$ .

Fig. 1은 시간증분에 따른 내각의 변화를 나타내는 그림이다. 여기서, 내각의 변화  $\left( \Delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \right)$ 는 다음과 같다.

$$\Delta \left( \frac{1}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} = \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \quad (20)$$

여기서,  $\theta$ 는  $t = t + \Delta t$ 일 때의 가운데 절점에서 내각을 의미하고,  $\theta_0$ 는  $t = t$ 일 때 내각을 의미한다. 이러한 내각의 변화를 이용하여 굽힘모멘트를 구할 수 있으며, 다음과 같다.

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_1 \cdot z dz \quad (21)$$

Hollomon 법칙을 따르는 재료의 경우 유효응력 (effective stress)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\sigma} = K (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b)^n \quad (22)$$

여기서,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ 는 인장과 굽힘에 의한 이전 단계에서의 유효변형률을 나타내고,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b$ 는 순수 굽힘에 의한 유효변형률을 나타낸다. 식 (22)의 유효변형률을 평면변형률상태의 주변형률로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (23)$$

또한, 유효응력을 주응력으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 \quad (24)$$

Fig. 2는 내각변화에 의한 중립면으로부터의 길이변화를 나타낸 그림이다. Fig. 2에서 중립면의 주변형률( $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ )을 0이라고 가정하면, 내각변화에 따

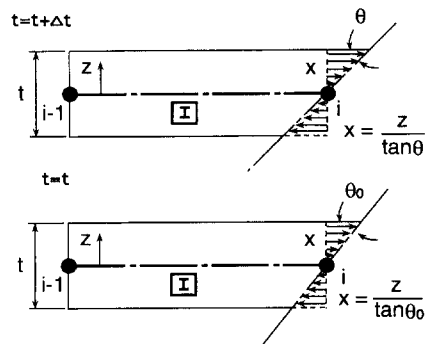


Fig. 2 Length-change distribution through the thickness due to the interior angle change in element 1.

른  $I$ 번째 요소에서의 주변형률( $\epsilon_{L,I}$ )은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon_{L,I} = \frac{z}{L_I} \left( \frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan \theta_0} \right) \quad (25)$$

여기서,  $\theta$ 는  $t=t+\Delta t$ 일 때, 가운데 절점에서 법선벡터(mesh normal vector)와 요소와의 각도를 의미하고,  $\theta_0$ 는  $t=t$ 일 때의 각도를 나타낸다. 또한,  $L_I$ 는  $I$ 번째 요소의 길이를 나타낸다.

식 (25)를 미소각에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\epsilon_{L,I} = \frac{z}{L_I} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} \right) = \frac{z}{L_I} \cdot \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \quad (26)$$

식 (26)과 마찬가지로  $J$ 번째 요소에서의 주변형률은

$$\epsilon_{L,J} = \frac{z}{L_J} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} \right) = \frac{z}{L_J} \cdot \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \quad (27)$$

이다. 따라서, 전체 굽힘요소의 주변형률은

$$\epsilon_I = \epsilon_{L,I} + \epsilon_{L,J} \quad (28)$$

이며, 이때의 주응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_I = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left\{ \bar{\epsilon}_p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot f \cdot z \cdot \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \right\}^n \quad (29)$$

여기서,  $f$ 는  $\frac{1}{L_I} + \frac{1}{L_J}$ 의 값을 갖는 상수이다.

식 (29)를 식 (21)에 대입하면, 굽힘모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} M &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_I \cdot z dz \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{\sqrt{3}} K \left\{ \bar{\epsilon}_p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot f \cdot z \cdot \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \right\}^n \cdot z dz \quad (30) \end{aligned}$$

식 (30)을 이용하여 구한 굽힘모멘트로부터 각각의 요소에 작용하는 등가우력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} |{}^I\mathbf{F}| &= \left| \frac{M}{L} \right| \\ &= \left| \frac{M}{\sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (z_{i-1} - z_i)^2}} \right| \quad (31) \end{aligned}$$

여기서,  ${}^I\mathbf{F}$ 는 요소  $I$ 에 작용하는 등가력이고,  $L$ 는 요소  $I$ 의 길이이다. 등가력  ${}^I\mathbf{F}$ 의 방향은 요소  $I$ 에 대하여 수직이다. 여기서, 요소  $I$ 에 수직

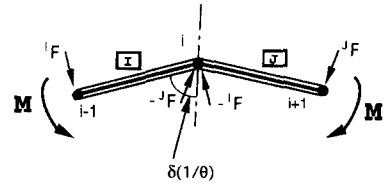


Fig. 3 Bending moment and equivalent couple due to angle change after a time increment,  $\Delta t$ .

한 단위벡터는 다음과 같다.

$${}^I\mathbf{n} = \begin{bmatrix} {}^In_x \\ {}^In_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

따라서,  ${}^I\mathbf{F}$ 는 다음과 같다.

$${}^I\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^IF_x \\ {}^IF_z \end{bmatrix} = -\frac{M}{L} \begin{bmatrix} {}^In_x \\ {}^In_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

같은 방법으로 요소  $J$ 에 작용하는 짝힘  ${}^J\mathbf{F}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^J\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^JF_x \\ {}^JF_z \end{bmatrix} = -\frac{M}{L} \begin{bmatrix} {}^Jn_x \\ {}^Jn_z \end{bmatrix} \quad (34)$$

세 절점에 작용하는 모든 등가우력들은 내력으로써 다루어질 수 있다. Fig.3은 각각의 절점에 작용하는 등가우력을 나타내는 그림이다. 따라서, 잔류력벡터(residual force vector)는 다음과 같이 6개의 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}^{BEND} = \begin{bmatrix} {}^IF_x \\ {}^IF_z \\ -{}^IF_x - {}^JF_x \\ -{}^IF_z - {}^JF_z \\ {}^JF_x \\ {}^JF_z \end{bmatrix} \quad (35)$$

굽힘에 의한 잔류력은 박막의 인장에 의한 잔류력과 접촉에 의한 잔류력이 함께 평행을 이룬다. 일반적으로 각각의 절점에는 세 종류의 힘이 작용한다. 그 세 종류의 힘은 굽힘영향에 기인하는 요소에 수직하게 작용하는 내력과 박막이론에 의해 요소에 평행하게 작용하는 내력과 접촉력, 그리고, 마찰에 기인하는 외력이 있다. 그러한 각각의 힘들은 iteration 마지막 단계에서 다른 두 힘에 의하여 균형을 이루어진다. 또한, 굽힘에 기인하는 강성행렬은 굽힘에 의한 잔류력을 미분하므로써 구할 수

있다. 따라서, 굽힘 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K]^{BEND} = \frac{\partial [F]^{BEND}}{\partial \Delta u} = \frac{\partial}{\partial \Delta u} \begin{bmatrix} {}^iF_x \\ {}^iF_z \\ -{}^iF_x - {}^jF_x \\ -{}^iF_z - {}^jF_z \\ {}^jF_x \\ {}^jF_z \end{bmatrix} \quad (36)$$

식 (36)에 식 (33)과 식 (34)를 대입하면 다음과 같은 굽힘에 의한 강성행렬을 구할 수 있다.

$$[K]^{BEND} = -\frac{\partial}{\partial \Delta u} \begin{bmatrix} \frac{M}{L} {}^i n_x \\ \frac{M}{L} {}^i n_z \\ -\frac{M}{L} {}^i n_x - \frac{M}{L} {}^j n_x \\ -\frac{M}{L} {}^i n_z - \frac{M}{L} {}^j n_z \\ \frac{M}{L} {}^j n_x \\ \frac{M}{L} {}^j n_z \end{bmatrix} \quad (37)$$

식 (37)의 첫번째 행을 더욱 상세하게 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \left( -\frac{M}{L} n_x \right)}{\partial \Delta u} = -\frac{{}^i n_x}{L} \cdot \frac{\partial M}{\partial \left( \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \right)} \cdot \frac{\partial \left( \delta \left( \frac{1}{\theta} \right) \right)}{\partial \Delta u} - M \cdot \frac{\partial \left( \frac{{}^i n_x}{L} \right)}{\partial \Delta u} \quad (38)$$

### 3. 내각변화와 곡률변화에 의한 굽힘모멘트 비교

박막 기초모델로 기하학적으로 굽힘효과를 고려하기 위하여 두 선형요소 절점의 이동으로 인한 굽힘모멘트를 구해야 한다. 그러나, 굽힘모멘트는 전술한 바와 같이 내각변화( $\delta(1/\theta)$ ) 또는 곡률변화( $\delta C$ )의 함수이다. 따라서, 내각변화로 굽힘모멘트를 계산하는 경우와 곡률변화로부터 굽힘모멘트를 계산하는 경우가 각각 어떠한 특성을 갖는지를 알아보기 위하여 임의의 곡선상을 움직이는 두 선형요소를 생각하였다. Fig.4는 첫번째 절점과 세번째 절점이 반지름이 1인 반원 양끝단에 고정되고

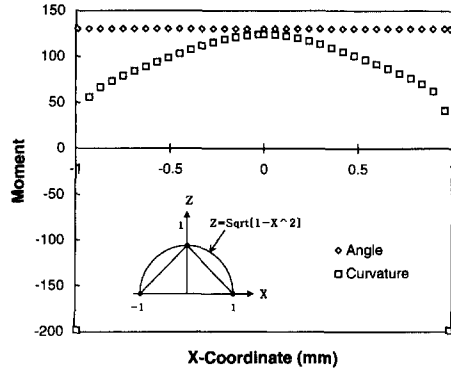


Fig. 4 Comparison of moments calculated with change of interior angle and curvature when the mid-node moves on the half-circle.

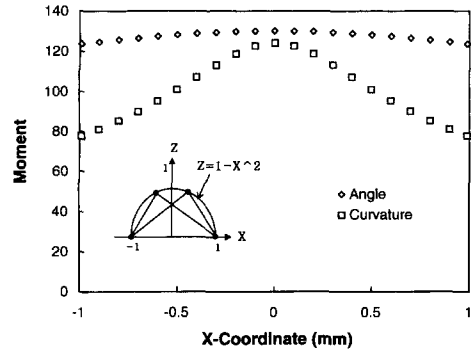


Fig. 5 Comparison of moments calculated with change of interior angle and curvature when the mid-node moves on the parabola.

가운데 절점이 반원 상을 움직일 때, 세 절점을 지나는 곡선을 2차 방정식으로 묘사하고, 가운데 절점에서의 곡률크기에 의한 굽힘모멘트와 내각크기에 의한 굽힘모멘트를 비교한 그림이다. 내각변화에 의한 굽힘모멘트는 반원상에서 내각이 항상 직각을 이루므로 같은 크기의 굽힘모멘트를 갖으나, 곡률변화에 의한 굽힘모멘트는 큰 편차를 보이고 있다. 특히, 양끝단에서 세 절점의 좌표값에 의하여 가운데 절점에서의 곡률을 계산하므로 내각변화에 의한 굽힘모멘트값과는 큰 차이를 나타내고 있다. Fig.5는 Fig.4에서와 같은 방법으로  $z=1-x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )선상에서 내각과 곡률에 의한 굽힘모멘트 크기를 나타낸 그림이다. Fig.5에서도 내각은 전 구간에서 적은 편차를 보이나, 곡률은 전 구간에서 내각에 의한 굽힘모멘트보다 큰 편차를 보이고 있는 것을 알 수 있다. 따라서, Fig.4와 Fig.5에서 알 수 있는 바와 같이, 내각은 전 구간에서

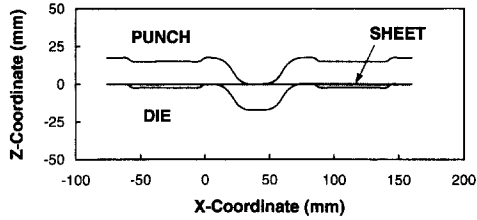


Fig. 6 Tooling geometry for forming operation of stretch section of a hood panel.

Table 1 Material properties of DQSK steel sheet.

Properties	Value
Strength of coefficient, K (MPa)	503
Work-rate hardening exponent, n	0.2
Pre-strain, $\epsilon_0$	0.004
Plastic anisotropy parameter, r	1.46
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.09
Thickness of sheet, t (mm)	0.64

적은 편차를 보이고 있고, 이것은 국부적으로 과도한 굽힘영향을 줄이므로 뉴튼랩슨 반복에서 좋은 수렴성을 기대할 수 있으며, 또한, 내각에 의하여 굽힘모멘트를 고려하는 방법이 곡률변화에 의하여 굽힘을 고려하는 방법보다 특이점에서 과대평가되지 않고 안정적으로 나타나는 것을 알 수 있다.

#### 4. 박판 성형공정해석

박막요소로 기하학적인 굽힘효과를 고려한 유한요소 프로그램의 타당성을 입증하기 위하여 평면변형률로 가정된 스트레치, 드로우 및 굽힘 단면에 대하여 성형해석을 수행하였다. 또한, 내각변화에 의하여 굽힘효과를 고려한 방법과, 새 절점을 지나가는 곡선을 이차 방정식으로 묘사하고 가운데 절점에서 곡률변화에 의하여 굽힘효과를 고려한 해석결과<sup>(5)</sup> 차이를 관찰하였다.

##### 4.1 스트레치 단면

스트레치 단면에 대해 내각변화에 의하여 굽힘효과를 고려한 해석결과(angle)와 곡률변화에 의하여 굽힘효과를 고려한 해석결과(curvature), 그리고 박막이론에 의한 해석결과(membrane)를 비교하기

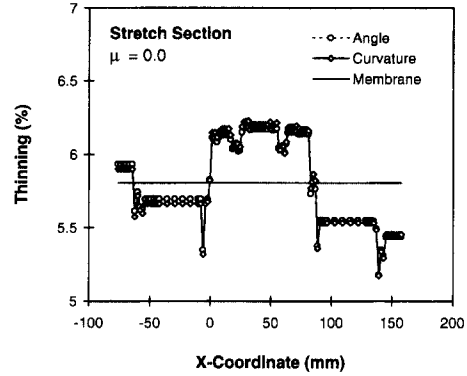


Fig. 7 Bending effects in the simulation of a stretch section, shown in Fig. 6.

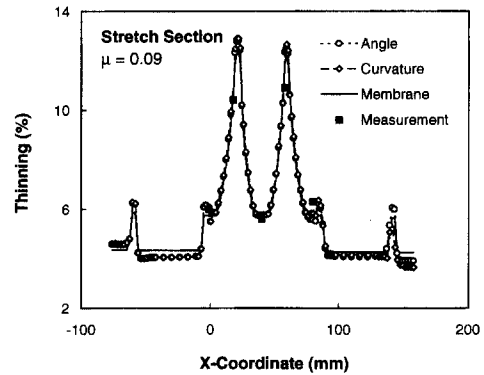


Fig. 8 Comparison of thinning distributions among FEM simulations and measurement in the stretch section, shown in Fig. 6.

위하여 평면변형률로 가정된 후드 내부 패널의 한 단면에 대하여 성형해석을 수행하였다. 단면의 형상은 Fig. 6과 같고, 박판의 재질은 DQSK(Draw Quality Specially Killed)강으로 기계적 물성치는 Table 1과 같다.<sup>(4)</sup> 또한, 수치해석에 사용된 유한요소 모델의 절점수는 101개로 하였다.

Fig. 7은 마찰이 없을 때( $\mu=0.0$ ) 굽힘을 고려한 해석치(angle, curvature)와 박막이론에 의한 해석치(membrane)에 대하여 두께변형률 분포를 비교한 그림이다. 박막이론은 전 구간에서 같은 변형률 분포를 가지나, 굽힘을 고려한 해석의 경우 굴곡진 부분에서 다른 변형률 분포를 보여주고 있다. 즉, 굴곡진 부근에서 굽힘효과가 있는 것을 알 수 있다.

Fig. 8은 마찰이 있을 경우( $\mu=0.09$ ), 박막모델(membrane)과 굽힘모델에 대한 수치해석 과정(angle, curvature)과 실험치(measurement)와의 비교를 보여

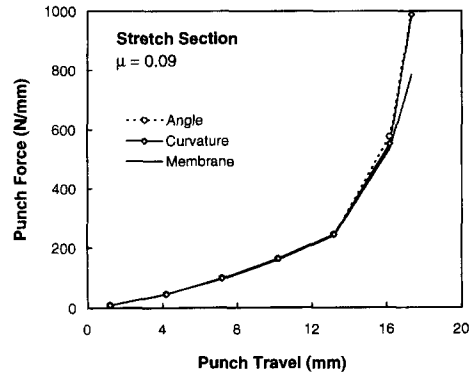
**Table 2** Comparison of N-R iteration and execution time in the stretch section.

	Angle	Curvature	Membrane
No. of N-R iteration	139	164	113
Execution time(sec.)	111	158	42

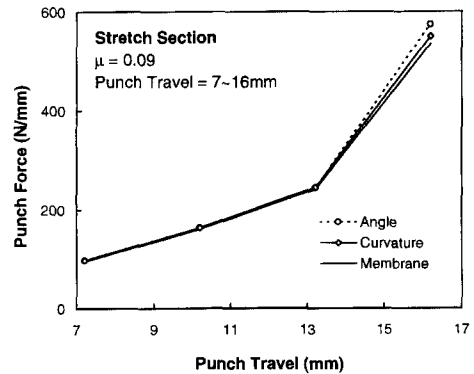
주고 있다. Fig. 8에서 보듯이 박막이론에 의한 해석결과와 내각, 그리고 곡률변화에 의하여 굽힘을 고려한 해석결과가 대부분의 해석영역에서 일치하고 있다. 이는 곡률과 관두께의 비가, 굽힘효과가 나타나지 않을 만큼 작을 뿐만 아니라 우수한 스트레칭용 판재인데서 기인된 것으로 추측된다. 그러나, 굽힘력을 고려한 해석이 -5 mm 부근과 87 mm 부근, 그리고 가운데 굴곡진 부분에서 박막이론보다 다소 높은 변형률 분포를 보이고 있다. 한편, 내각과 곡률변화에 의하여 굽힘을 고려한 해석결과는 비슷한 경향을 나타내고 있다. 이는 내각과 곡률의 크기가 미소변위에 대해서 거의 같은 값을 갖기 때문인 것으로 추측된다.

Table 2는 각각의 이론에 대한 N-R 반복횟수와 실행시간을 비교한 표이다. Table 2에서도 알 수 있듯이 내각변화에 의해 굽힘력을 고려한 방법이 실행시간과 N-R 반복횟수에서 곡률변화에 의해 굽힘을 고려한 해석보다 더욱 적게 걸리는 것으로 나타나고 있다. 이는 내각변화에 의해 굽힘력을 고려하는 방법이 수식이 간단하고, 전반적인 각도변화의 편차가 곡률변화의 편차보다 더욱 적은 값을 가짐으로 인하여 곡률변화에 의하여 굽힘력을 고려하는 것보다 실행시간과 수렴성에서 더욱 효율적인 것으로 추측된다.

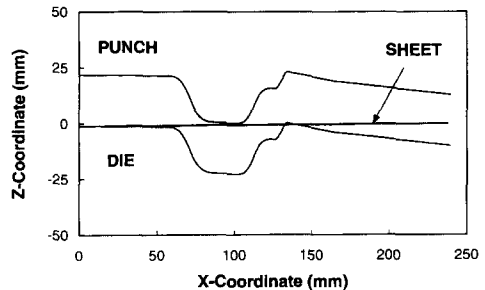
Fig. 9는 이때의 펀치력을 비교한 그림이다. Fig. 9에서도 알 수 있듯이 굽힘력을 고려한 해석이 최종 성형단계에서 박막보다 더욱 높은 펀치력을 보이고 있다. 그러나, 낮은 펀치행정에서는 큰 차이를 나타내지 않고 있다. 이는 박막형 모델에 기하학적으로 굽힘모멘트를 부가하므로 낮은 펀치행정에서는 전반적으로 굴곡이 완만한 박판의 변형형상을 나타내어 인장에 의한 영향력이 굽힘에 의한 영향력보다 더욱 크게 나타나기 때문이다. 그러나, 최종 성형단계에서는 박판의 최종 성형이 이루어지므로, 다이의 굴곡진 부분에서 강제적으로 성형되



**Fig. 9** Comparison of punch forces among bending (interior angle, quadratic) and membrane simulations in a stretch section of hood-panel. ( $\mu=0.09$ )



**Fig. 10** Comparison of punch forces among bending (interior angle, quadratic) and membrane simulations in a stretch section of hood-panel at punch travel between 7 and 16. ( $\mu=0.09$ )



**Fig. 11** Tooling geometry for forming operation of a draw section of hood panel.

므로 굽힘영향이 인장에 의한 영향력보다 더욱 크게 나타나는 것으로 추측된다.

Fig. 10은 Fig. 9의 펀치행정이 7~16 mm까지의



**Table 3** Material properties of DQSK steel sheet.

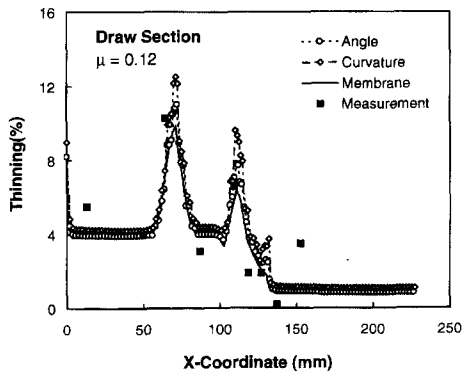
Properties	Value
Strength coefficient, K (MPa)	503
Work-hardening exponent, n	0.2
Pre-strain, $\epsilon_0$	0.004
Plastic anisotropy parameter, r	1.46
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.12
Thickness of sheet, t (mm)	0.6

**Table 4** Comparison of N-R iteration and execution time in the draw section.

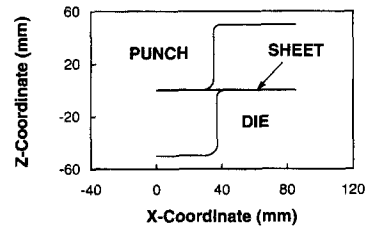
	Angle	Curvature
No. of N-R iteration	1092	1088
Execution time(sec.)	1010	1367

**Table 5** Material properties of SPC1

Properties	Value
Strength coefficient, K (MPa)	471
Work-hardening exponent, n	0.265
Pre-strain, $\epsilon_0$	0.0001
Plastic anisotropy parameter, r	1.87
Hill's yield function parameter, M	2.0
Coulomb friction coefficient, $\mu$	0.2
Thickness of sheet, t (mm)	1.0



**Fig. 12** Comparison of thinning distributions among FEM simulations and measurement in the draw section, shown in Fig. 11.



**Fig. 13** Tooling geometry for forming operation of bend section.

펀치력을 확대한 그림이다. 그림에서도 알 수 있는 바와 같이 굽힘력을 고려한 이론과 고려하지 않은 이론이 높은 펀치행정으로 가면서 굽힘영향의 증가로 인하여 펀치력의 차이가 점점 커지는 것을 알 수 있다.

#### 4.2 드로우 단면

다음은 드로우가 일어날 때 내각변화와 곡률변화에 의하여 굽힘효과를 고려한 해석을 고찰하기 위하여, 평면변형률로 가정된 드로우 단면에 대하여 성형해석하였다. 단면의 형상은 Fig. 11과 같다. 경제조건으로 우단에는 드로비이드력을 140 N/mm로 부여하였고, 좌단은 고정조건을 부여하였다. 해석에 사용된 박판재료는 DQSK (Draw Quality Specially Killed)강으로 재료의 기계적 물성치는 Table 3과 같다.<sup>6)</sup> 유한요소 모델의 절점수는 내각과 이차의 경우 121개, 박막은 71개로 하여 수치 해석을 하였다.

Fig. 12는 마찰계수가  $\mu=0.12$ 일 때, 각각의 굽힘이론에 의한 해석(angle, curvature)과 박막이론에 의한 해석(membrane), 그리고 측정치(measurement)를 서로 비교한 그림으로, 각각의 해석결과가 측정치와 전반적으로 잘 일치하고 있다.

그러나, 굽힘효과를 고려한 해석의 경우, X-좌표 75 mm 부근과 115 mm 부근에서 bending, unbending 현상에 의하여 박막이론보다 더욱 높은 변형률 분포를 보이고 있으며, 굽힘을 고려한 이론이 실험치와 더욱 근사한 경향을 나타내고 있는 것을 알 수 있다. Table 4는 이때의 N-R 반복횟수와 실행시간을 비교한 표이다. Table 4에서도 알 수 있듯이 실행시간에서 내각에 의한 방법이 더욱 적게 걸리고 있다. 그러나, N-R 반복횟수에서는 다소 많이 나오고 있다.

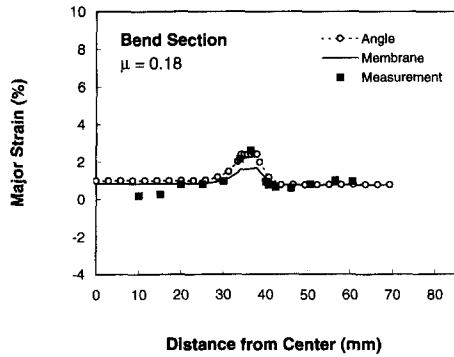


Fig. 14 Comparison of major strain distribution among FEM simulations and measurement in the bend section, shown in Fig. 13.

#### 4.3 굽힘 단면

굽힘 단면은 U-bend 형상으로 굽힘의 영향이 많은 평면변형 공정이며, 단면의 형상은 Fig. 13과 같다. 실험에 사용된 재료는 자동차용 SPC1으로 재료의 기계적 물성치는 인장시험을 통해 구하였고, Table 5에 나타나 있다.

단면은 대칭형이므로 오른쪽 반만을 해석하였는데 경계조건으로 좌단에는 고정조건을, 우단에는 170 N/mm의 힘을 부과하였고, 해석에 사용된 유한요소 절점의 수는 31개이다. 펀치 행정은 25 mm 이고, 이에 따라 드로인이 16 mm 발생하였다.

Fig. 14는 마찰계수가  $\mu=0.18$ 일 때, 내각변화에 의해 굽힘을 고려한 해석결과(angle)를 박막이론에 의한 해석결과(membrane) 및 측정값(measurement)과 비교한 그림이다. 그림에서 보듯이 곡률부분, 비접촉구간에서 굽힘이론에 의한 변형률이 박막이론보다 크게 나타나고 있고, 실험값과 보다 잘 일치함을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 박막형 요소에 세 절점이 이루는 내각의 변화로부터 굽힘효과를 고려하는 단면 성형 해석 프로그램을 개발하고, 스트레치, 드로우 및 굽힘 단면에 대하여 수치해석을 수행하였다. 이 연구로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 박막 기초모델에 요소의 기하학적인 변형 형상을 이용하여 굽힘을 고려하므로써, 굽힘효과를 규명할 수 있었으며, 측정치와도 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

(2) 내각변화에 의하여 굽힘력을 고려한 해석결과와 곡률변화에 의하여 굽힘력을 고려한 해석결과 사이에는 큰 차이점은 없지만, 내각변화에 의하여 굽힘을 고려한 해석이 곡률변화에 의하여 굽힘력을 고려한 해석보다 실행시간이 적게 걸리고, 수렴성이 더 좋은 것을 알 수 있었다.

(3) 박막 기초모델에 내각변화에 의하여 기하학적으로 굽힘을 고려한 해석이 굽힘이 지배적인 단면에서 비교적 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

### 후 기

본 연구는 한국과학재단 '95 핵심전문연구(951-10 05-043-2)과제로서 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Zhou, D., 1993, "Development and Testing of A New Algorithm for FEM of Sheet Forming," Ph. D. Dissertation, Ohio State Univ., pp. 104~132.
- (2) Yoo, D. J. and Yang, D. Y., 1994, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes Using Continuous Contact Treatment and Membrane Element incorporating Bending Effect," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.36, No.6, pp.513~546.
- (3) Kubli, W. and Reissner, J., 1993, "Optimization of Sheet Metal Forming Processes Using the Special-Purpose Program AUTOFORM," *Numisheet '93*, pp. 271~280.
- (4) 금영탁, Wagoner, R. H., 1991, "프레스 금형 단면의 성형성 평가를 위한 유한요소법," 대한기계학회논문집, 제15권, 제4호, pp. 1108~1122.
- (5) 김준보, 금영탁, 1995, "굽힘효과를 고려한 자동차 판넬 성형공정의 2차원 유한요소해석," 한국자동차공학회, 1995년도 춘계학술대회 논문집 1권, pp. 124~129.
- (6) 김종필, 금영탁, 이종문, 1994, "딥드로잉 판넬의 단면성형 해석을 위한 유한요소/기하학평형법에 관한 연구," '94년도 한국정밀공학회 추계학술대회 논문집, pp. 212~217.
- (7) Lee, J. K., 1990, "Two-Dimensional Finite Element Analysis of Sheet Forming Processes

- Including Bending Effects," Ohio State Univ.,  
Report No. ERC/NSM-S-90-04, 1990, pp. 84~93.
- (8) 박동운, 오수익, 1994, "굽힘을 고려한 축대칭  
판재 성형해석," 대한기계학회, '94년도 춘계학  
회 논문집 I 권, pp. 393~397.