

주파수영역방법에 의한 비선형 모델변수의 실험적 규명

김 원 진*

(1997년 8월 25일 접수)

Experimental Identification of Nonlinear Model Parameter by Frequency Domain Method

Won-Jin Kim

Key Words : Nonlinear Element(비선형 요소), Model Parameter Identification(모델 매개변수 규명), Frequency Domain Method(주파수영역방법), Coulomb Friction Coefficient(쿨롱마찰계수)

Abstract

In this work, a frequency domain method is tested numerically and experimentally to improve nonlinear model parameters using the frequency response function at the nonlinear element connected point of structure. This method extends the force-state mapping technique, which fits the nonlinear element forces with time domain response data, into frequency domain manipulations. The force-state mapping method in the time domain has limitations when applying to complex real structures because it needs a time domain lumped parameter model. On the other hand, the frequency domain method is relatively easily applicable to a complex real structure having nonlinear elements since it uses the frequency response function of each substructure. Since this method is performed in frequency domain, the number of equations required to identify the unknown parameters can be easily increased as many as it needed, just by not only varying excitation amplitude but also selecting excitation frequencies. The validity of this method is tested numerically with a 3 dof system having the nonlinear element of Coulomb friction and hardening stiffness, and experimentally with a suspension testing system. From the results, it was verified that the frequency domain method has some advantages over the classical force-state mapping technique in the number of data points needed in curve fit and the sensitivity to response noise.

1. 서 론

대부분의 기계 계는 비선형성을 포함하고 있지만 일반적으로 비선형 거동을 포함하는 해석은 복잡하고 어렵기 때문에 비선형 항을 무시하거나 선형화

하는 근사적 방법이 주로 이용되어져 왔다. 그러나 비선형성이 무시하지 못할 정도로 큰 계에 있어서는 이러한 근사적 방법에 의한 계의 거동해석 결과가 많은 오차를 포함하게 되므로, 정확한 계의 해석을 위해서는 비선형 거동을 포함할 수 있는 모델이 도입되어야 한다. 비선형 요소를 갖는 시스템을 모델링하기 위해서는 우선적으로 비선형 요소에 대한 모델을 수립하고, 그 모델변수를 규명하는 작업

*회원, 계명대학교 자동차공학과

이 선행되어야 한다. 그런데 이러한 비선형 모델변수를 이론적 방법으로 규명하는 것은 매우 어렵기 때문에 실험적 모델변수 규명방법이 필요한데 이 분야에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔다. Ibrahim⁽¹⁾은 시간영역에서의 선형모드 규명법을 이용하여 선형계모드에 고차모드(higher mode)들을 추가하므로써 비선형계에 확장적용하였고, Lee^(2, 3)는 비선형 계의 응답을 Volterra 급수로 표현하고, 이를 다차원 Fourier 변환하므로 얻어진 고차 주파수 응답함수를 이용하여 가진입력과 응답의 관계식을 수립하고, 비선형 시스템의 매개변수 규명에 적용하였다. Masri^(4~6) Crawley^(7~9) 등은 시간영역에서 직교다항식을 이용하여 비매개변수법(nonparametric method)으로 비선형 계의 모델을 수립하고, 비선형 모델변수를 규명하는 힘-상태 사상법(force-state mapping method)을 제안하였으며, Lee⁽¹⁰⁾는 궁극적으로 비선형 요소를 갖는 시스템에 대해서 가진 입력수준에 따른 모델오차를 계산하여 비선형 위치를 알아낸 후, 비선형이 존재하는 위치만 비선형 모델을 적용하여 비매개변수법으로 모델변수를 구하였다. 시간영역에서의 힘-상태 사상법은, 가진 입력수준의 일정한 범위 내에서 일반적인 비선형 거동을 묘사할 수 있는 장점을 가지지만, 시간영역에서 집중질량계 모델을 이용하기 때문에 선형 부분구조물의 좌표뿐만 아니라 비선형 요소가 관련된 모든 좌표의 변위, 속도, 가속도에 대한 정보를 알아야 하는 제한점을 갖는다. 저자는 이러한 제한점을 보완하고 비선형 요소를 갖는 복잡한 시스템에 적용할 수 있는 주파수영역에서의 힘-상태 사상법을 제안하였으며, 계감쇠와 강화 스프링을 포함하는 이론적 모델의 모의실험(simulation)을 통하여 방법을 검증하였다.⁽¹¹⁾

본 연구에서는 기계 계의 요소에서 흔히 관찰되는 쿨롱마찰(Coulomb friction) 비선형 특성을 갖는 계의 모델변수 규명에 중점을 두었으며, 예제 계의 모의실험 및 현가성능 시험기에서의 실험을 통하여 주파수영역에서의 힘-상태 사상법의 실험적 적용성을 검증하였다. 먼저 주파수영역에서의 힘-상태 사상법의 개념을 도입하기 위해서 일반적 비선형 요소를 갖는 1자유도 계에 대해서 본 방법을 수학적으로 유도하고, 시간영역 방법과 비교 설명하였다. 예제 계의 모의실험에 있어서는 쿨롱마찰과 강화스프링 특성을 동시에 갖는 비선형 요소를 포함하는 3자유도 비선형 계를 대상으로 하였으며,

쿨롱마찰 모델은 부호함수 외에 연속함수인 역탄젠트 함수(arctangent function)를 추가로 제안하여 각 경우에 대하여 모델변수를 규명하고, 그 결과를 검토하였다. 그리고 실제 쿨롱마찰 특성을 갖는 현가시험기(suspension testing system)의 모델변수 규명에 적용하여 반능동 감쇠기(semi-active damper)의 제어를 위한 모델을 개선하고, 제안된 방법을 실험적으로 검증하였다.

2. 방법의 이론적 수식화

주파수영역에서 힘-상태 사상법을 도입하기 위해서 다음의 1자유도 비선형 계의 운동방정식을 이용한다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) - g(x, \dot{x}) \quad (1)$$

여기서 m 은 질량, c 는 감쇠계수, k 는 강성계수, $f(t)$ 는 외력, $g(x, \dot{x})$ 는 비선형 요소에 의한 전달력을 나타낸다. 비선형 요소에 의한 전달력 묘사에는 비선형 수학적 함수가 주로 이용되는데, 상태변수(x, \dot{x})의 (p, q) 차 다항식을 이용하여 일반적인 비선형 거동을 비매개변수법으로 표현하면 다음과 같다.

$$g(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \theta_{ij} x^i \dot{x}^j \quad (2)$$

시간영역에서 힘-상태 사상법⁽¹⁰⁾은 식 (2)에서와 같이 가정된 비선형 요소에 대한 모델을 식 (1)에 대입하여 얻어지는 다음과 같은 비선형 운동방정식을 변형없이 그대로 이용하며, 시간축에 대한 응답을 측정하여 매 시간에 대한 상태마다 매개변수 θ_{ij} 와 관련된 운동상태방정식을 하나씩 구하여 여러 개의 방정식을 동시에 만족시킬 수 있는 최적 매개변수를 규명하는 방법이다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \theta_{ij} x^i \dot{x}^j \quad (3)$$

일반적으로 비선형 거동에 대한 사전의 정보가 없는 경우에는 식 (2)와 같은 수학적 함수를 이용해야 하지만 주어진 비선형 요소에 대한 정보를 가지고 있는 경우에는 물리적 의미를 갖는 적절한 몇 개의 함수 $h_i(x, \dot{x})$ 를 이용해서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{np} \theta_i h_i(x, \dot{x}) \quad (4)$$

주파수영역에서의 힘-상태 사상법을 적용하기 위해서는 주어진 계에 일정한 주파수를 갖는 조화함수(harmonic function)를 외력으로 작용시키는 것이 필요하고, 이 경우의 가진주파수(excitation frequency)가 ω 인 외력 $f(t)$ 는 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(t) = Fe^{j\omega t} + F^* e^{-j\omega t} \quad (5)$$

여기서 $j = \sqrt{-1}$ 이고, F^* 는 F 의 공액복소수를 나타낸다.

그리고 비선형 요소를 갖는 계의 응답과 이 응답으로 표현되는 모델함수, $h_i(x, \dot{x})$ 는 가진주파수의 슈퍼 조화성분(super-harmonics)들의 합을 이용하여 표현가능하다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t} \quad (6)$$

$$h_i(x, \dot{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{in} e^{jn\omega t} \quad (7)$$

여기서,

$$X_n = X_n^* \quad Y_{in} = Y_{in}^*$$

이상에서 주어진 식 (4), (5), (6), (7)을 식 (1)에 대입하면,

$$\sum_{k=1}^n \{ (-n^2 \omega^2 m + jn\omega c + k) X_n e^{jn\omega t} \} = Fe^{j\omega t} + F^* e^{-j\omega t} - \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{in} e^{jn\omega t} \right\} \quad (8)$$

식 (8)을 각 $e^{jn\omega t}$ 항에 대하여 정리하면 다음과 같은 등식들이 성립된다.

$$\begin{aligned} n=0 & kX_0 + Y_0^T \theta = 0 \\ n=1 & (-\omega^2 m + j\omega c + k) X_1 = F - Y_1^T \theta \\ n=2 & (-4\omega^2 m + 2j\omega c + k) X_2 = -Y_2^T \theta \\ & \vdots \\ n=M & (-M^2 \omega^2 m + Mj\omega c + k) X_M = -Y_M^T \theta \\ & \vdots \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \theta^T &= \{ \theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_{n_p} \} \\ Y_k^T &= \{ Y_{1k} \ Y_{2k} \ \cdots \ Y_{n_p k} \} \end{aligned}$$

식 (1)에서 비선형 요소가 없을 경우에 1자유도 선형계의 주파수응답함수(receptance) $\alpha(\omega)$ 는 아래 식 (10)과 같이

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (10)$$

표현되므로 식 (9)를 이 주파수응답함수를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} n=0 & kX_0 + Y_0^T \theta = 0 \\ n=1 & X_1 = \alpha(\omega) (F - Y_1^T \theta) \\ n=2 & X_2 = -\alpha(2\omega) Y_2^T \theta \\ & \vdots \\ n=M & X_M = -\alpha(M\omega) Y_M^T \theta \end{aligned} \quad (11)$$

위 식에서 보면 가진주파수성분 이외의 주파수성분에 대한 식($n=0$ & $n=2, 3, \dots$)도 이론적으로는 비선형 모델변수의 규명에 이용 가능하다. 그러나 일반적으로 비선형 계의 응답에 있어서 이러한 주파수성분은 가진 주파수성분에 비해서 상대적으로 값의 크기가 작기 때문에 측정잡음에 민감하게 된다. 따라서 본 연구에서는 식 (11)에서 가진 주파수 성분에 해당되는 다음 식 ($n=1$)만 선택하여, 즉 진폭의 비선형 특성만을 고려하여 모델변수에 이용하기로 한다.

$$X_1 = \alpha(\omega) (F - Y_1^T \theta) \quad (12)$$

식 (12)에서 Y_1^T 와 X_1 은 가진력의 크기와 가진 주파수의 함수이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a(F, \omega)^T \theta = b(F, \omega) \quad (13)$$

여기서,

$$a = Y_1, \quad b = F - \alpha(\omega)^{-1} Y_1$$

식 (13)에서 알 수 있듯이 변수규명을 위한 방정식의 구성은 가진력의 크기를 변화시키거나 가진 주파수를 변화시키면서 계의 응답을 측정함으로써 가능하다. 즉, 주어진 가진주파수에서 가진력의 크기를 변화시키면 다음과 같은 방정식을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} a(F_1, \omega)^T \theta &= b(F_1, \omega) \\ a(F_2, \omega)^T \theta &= b(F_2, \omega) \\ & \vdots \\ a(F_N, \omega)^T \theta &= b(F_N, \omega) \end{aligned} \quad (14)$$

그리고 가진력의 크기를 일정하게 두고 가진주파수를 변화시키면 다음과 같은 방정식을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} a(F, \omega_1)^T \theta &= b(F, \omega_1) \\ a(F, \omega_2)^T \theta &= b(F, \omega_2) \\ & \vdots \\ a(F, \omega_N)^T \theta &= b(F, \omega_N) \end{aligned} \quad (15)$$

비선형 모델변수의 규명에 있어서 식 (14)과 (15)의 방법을 병행하여 이용할 수 있다. 여기서 방정식에 관련된 값들이 복소수이므로 하나의 방정식을 실수부와 허수부로 나누면 두 개의 독립된 실수 방정식을 얻을 수 있고, 어떤 방법을 이용하더라도 항상 $N/2 \geq n_p$ 의 조건을 만족할 수 있도록 충분한 수의 방정식을 구성하여야 한다.

이러한 방법으로 구성된 방정식은 행렬을 이용하면 다음과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있다.

$$[A]\{\theta\}=\{b\} \quad (16)$$

여기서, $[A]$ 는 $\mathbf{\alpha}$ 벡터가 행으로 구성된 $(N \times n_p)$ 행렬, $\{b\}$ 는 b 의 값으로 구성된 (N) 벡터를 나타낸다. 식 (16)에서 최소자승법 (least square method) 개념을 이용한 pseudo-inverse를 적용하여 다음과 같이 최적 비선형 모델변수를 구할 수 있다.

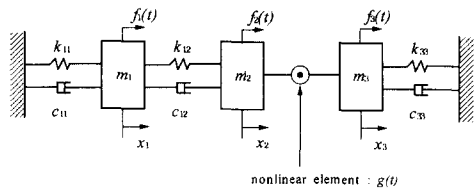
$$\{\theta\}=[A]^T[A]^{-1}[A]^T\{b\} \quad (17)$$

3. 예제 계의 모의실험

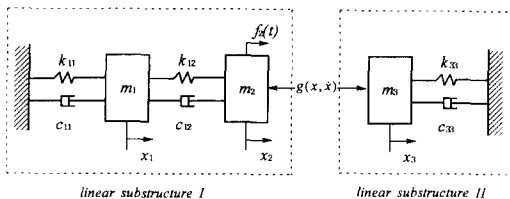
쿨롱마찰과 강화스프링 특성을 동시에 갖는 비선형 계에 대한 주파수영역방법의 적용성을 검토하기 위해서 Fig. 1(a)에서와 같은 3자유도 예제 계의 비선형 모델변수를 규명하였다.

여기서, 예제 계의 비선형 요소에 대한 수학적 모델은 다음과 같이 가정하였다.

$$g(x, \dot{x})=kx+c\dot{x}+F_d \operatorname{sgn}(\dot{x})+Sx^3 \quad (18)$$



(a) Three dof system including a nonlinear element



(b) Divided two substructures

Fig. 1 Three dof system including a nonlinear element.

여기서, $x=x_2-x_3$, $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ 는 부호함수(sign function)를 나타내었고, 모델 매개변수 $k=8000 \text{ N/m}$, $c=20 \text{ Ns/m}$, $F_d=5 \text{ N}$, $S=3 \times 10^8 \text{ N/m}^3$ 으로 두었다. 식(18)에서의 부호함수는 쿨롱마찰현상을 잘 묘사하는 수학적 모델이지만 상대속도가 영인 점에서 비연속적인 특성을 나타내고, 이 점 부근에서는 매우 작은 잡음에도 그 부호에 따라 응답에 큰 영향을 줄 수 있다. 따라서 본 연구에서는 상대속도가 영인 부근에서 응답의 부호변화에 둔감할 수 있고, 연속성을 갖는 역탄젠트함수(arctangent function)를 이용한 다음과 같은 모델을 제안하여 식 (18)의 부호함수를 이용한 모델과 함께 두 가지 모델에 대해서 매개변수를 규명하였다.

$$g(x, \dot{x})=kx+c\dot{x}+\frac{2F_d}{\pi} \tan^{-1}(M\dot{x})+Sx^3 \quad (19)$$

여기서, M 는 상대속도가 영인 부근에서 함수의 기울기를 결정하는 값이다.

그리고 주어진 예제 계의 선형 모델변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1=3, \quad m_2=m_3=2 \text{ [kg]} \\ k_{11}=k_{12}=6, \quad k_{33}=10 \text{ [kN/m]} \\ c_{11}=c_{12}=6, \quad c_{33}=10 \text{ [Ns/m]} \end{aligned} \quad (20)$$

앞 절에서 설명한 방법을 다자유도 계에 적용하기 위해서는 비선형 요소를 중심으로 계를 가상적으로 분리하여 선형 부분계(linear substructure)에 대해 비선형 요소에 의한 전달력이 외력처럼 작용하는 것으로 표현하면 된다. 본 예제 계에서는 Fig. 1(b)에서와 같이 두 개의 선형 부분계를 고려할 수 있고, 2자유도 부분계(substructure I)에 대해서 식 (12)을 적용하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \alpha_{12}(\omega) \\ \alpha_{21}(\omega) & \alpha_{22}(\omega) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 - Y_1^T \theta \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서, $\alpha_{ij}(\omega)$ 는 j 점 가진력에 대한 i 점 응답의 비를 나타내는 선형 부분계의 주파수응답함수를 나타낸다. F_1 과 F_2 는 가진력에 해당되는 항이므로 m_2 에만 가진력을 작용시키면 $F_1=0$ 되고, 식 (21)의 X_2 에 관한 식은 다음과 같다.

$$X_2=\alpha_{22}(\omega)(F_2 - Y_1^T \theta) \quad (22)$$

식 (22)를 이용하여 1자유도 계에서와 같은 방법으로 모델변수의 규명이 가능하다.

Table 1 Identified nonlinear parameters of 3 dof example system.

Excitation type	Coulomb friction model		Parameters			
			k [N/m]	c [Ns/m]	F_d [N]	$s \times 10^8$ [N/m ³]
CASE I	sgn(\dot{x})		7540.8	37.5	4.0	4.54
	$\frac{2}{\pi} \tan^{-1}(M\dot{x})$	M	7542.8	37.0	4.0	4.54
		10^5				
		10^3				
CASE II	sgn(\dot{x})		7731.8	19.6	5.0	3.12
	$\frac{2}{\pi} \tan^{-1}(M\dot{x})$	M	7745.4	19.8	5.0	3.11
		10^5				
		10^3				
True		8000.0	20.0	5.0	3.00	

모델 매개변수 규명은 식 (14)를 이용하였으며, 가진 주파수 5 Hz에서 가진력의 크기를 다음과 같이 변화시키면서 두 가지 경우에 대한 모델변수를 각각 규명하였다.

- i) CASE I : 5, 10, 15, 20, 25 N
- ii) CASE II : 50, 60, 70, 80, 90 N

위의 각 경우에 대하여 10개의 독립된 식을 구성할 수 있으며, 식 (18)과 식 (19)의 두 가지 모델에 대한 모델변수를 규명한 결과는 Table 1과 같다.

모델변수의 규명결과에서 보면 모든 경우에 있어서 오차가 포함되어 있는데, 그 이유는 부호함수를 이용하여 Coulomb마찰을 표현하는 경우에 있어서 응답을 계산하는 측면에서는 힘평형조건을 이용하여 비선형요소가 연결된 두 좌표사이의 상대속도가 영이 되는 순간의 정지마찰력을 계산에 포함시킬 수 있으나, 모델변수를 규명하는데 있어서는 정지상태에서의 마찰력을 고려하지 못하기 때문이다. 그러나 Coulomb마찰력에 비하여 상대적으로 가진력이 큰 경우(CASE II)에는 어느 정도 정확한 변수규명 결과를 얻을 수 있다. 역탄젠트함수를 포함한 모델의 매개변수 규명결과에서 보면 M 값이 상대적으로 크면 역탄젠트함수가 부호함수와 매우 근사하게 되므로 부호함수를 이용한 모델의 결과와 비슷하다. 즉, 적절한 M 값을 선택함으로써 상대속도가 영인 부근에서 마찰력 변화의 영향을 줄여 강성계수를 계산할 수 있음을 알 수 있다.

4. 실제 계에 대한 실험적용

차량 현가장치(suspension system)의 성능시험기를 이용하여 완충기를 대상으로 주파수영역방법과 기존의 시간영역방법을 각각 적용하여 두 방법의 실험적 적용성 및 장단점을 비교하고, 현가시험기의 모델변수를 계산하였다.

4.1 실험장치

실험장치는 Fig. 2에서 나타난 바와 같고, 실험 대상은 감쇠기 내에 유체가 통과하는 오리피스(orifice) 면적을 조절함으로써 점성감쇠계수를 변화시켜 질량체의 진동을 반능동적으로 제어하는 완충기이다.

장치의 상부에는 차체를 가상한 질량체가 있고, 하부에는 원하는 형상의 입력을 줄 수 있도록 유압가진기(hydraulic exciter) 설치되어 있다. 그리고 질량체와 입력부 사이에 선형 스프링과 반능동 감쇠기가 장착된다.

변수규명에 사용된 모델은 Fig. 3에 보인 바와 같으며, 상부 질량체의 질량은 36 kg이고, 가진입력부와 질량체 사이에 비선형요소가 존재하는 단일자유도 계이다.

장치에서 반능동 감쇠기의 Coulomb마찰(Coulomb friction)이 질량체의 비선형 거동을 발생시키는 주요 원인이기 때문에 비선형 요소의 모델은 선형 강성계수(k), 점성감쇠계수(c), Coulomb마찰력(F_d)로

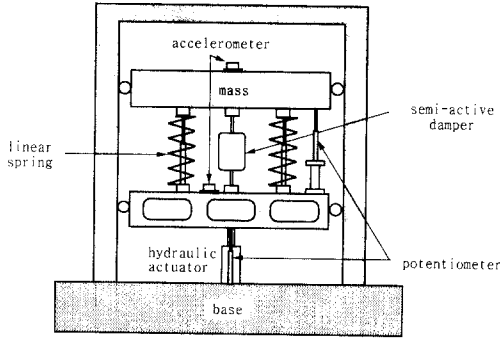


Fig. 2 Suspension testing system.

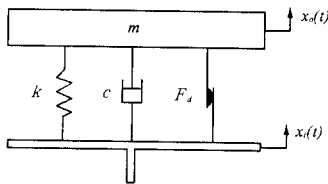


Fig. 3 Model of suspension testing system.

모델링하였으며, 반능동 감쇠기의 기준위치에서의 모델변수를 규명하기 위해서 오리피스 면적은 일정하게 고정하였다.

가진입력은 모델변수 규명 및 규명된 모델변수의 검증을 위하여 스텝사인(step sine)과 밴드랜덤(banded random) 함수를 각각 이용하였다. 여기서 모델변수 규명을 위한 스텝사인 가진에 있어서는 1.6 Hz에서 0.2 Hz 간격으로 3.4 Hz까지 10개의 가진 주파수를 이용하고, 규명된 모델 검증에 위한 밴드랜덤 가진은 장치에 사용된 유압 가진기의 성능한계 때문에 1 Hz의 범위를 갖는 1.5~2.5 Hz와 2.5~3.5 Hz에 대해 실시하였다. 응답측정에 있어서 하부의 변위(x_o), 질량체와 하부의 상대변위($x_o - x_i$)는 포텐시옴터(potentiometer), 질량체와 하부의 가속도는 스트레인 게이지형의 저주파용 가속도계를 이용하여 측정하였다. 모델변수 규명에는 가진주파수성분만 이용하기 때문에 스텝 사인 가진에 의한 응답측정에 있어서 10 Hz 이상의 고주파수응답과 잡음은 저주파 통과필터(low pass filter)를 사용하여 측정시 제거하였다. 측정신호의 샘플링주파수(sampling frequency)는 100 Hz, 데이터 수는 1300개로 하였다.

4.2 주파수영역방법 적용

주파수영역방법은 식 (12)에서 알 수 있듯이 질

량체의 변위와 비선형 요소 양단의 상대변위 측정만으로 모델변수 규명이 가능하다. 대상 장치의 질량체에 대한 입력은 하부의 변위형태를 가지므로 식 (1)에서 직접적으로 작용하는 외력 $f(t)$ 는 영이고, 식 (1)에서 $g(x, \dot{x})$ 는 비선형력만 포함하고 있으나, 실제 선형 감쇠계수와 강성계수도 모르는 상태이므로 이들에 해당되는 전달력도 $g(x, \dot{x})$ 에 포함하여 다음과 같은 방정식으로 모델변수를 규명하였다.

$$m\ddot{x} = g(x, \dot{x}) \quad (23)$$

여기서, $x = x_o - x_i$ 를 나타낸다.

모델선정에 있어서는 선형 모델을 포함한 다음 세 가지 모델을 이용하여 비선형 모델의 도입에 의한 모델 개선 및 각 모델의 적합성에 대해서 알아본다.

선형 모델 :

$$g(x, \dot{x}) = kx + c\dot{x} \quad (24)$$

비선형 모델 :

$$g(x, \dot{x}) = kx + c\dot{x} + F_d \text{sgn}(\dot{x}) \quad (25)$$

$$g(x, \dot{x}) = kx + c\dot{x} + \frac{2F_d}{\pi} \tan^{-1}(M\dot{x}) \quad (26)$$

여기서, F_d 는 쿨롱마찰력의 크기를 나타낸다.

모델변수 규명을 위한 식을 구성하기 위해서 식 (14)에서와 같은 방법을 이용하면 하나의 가진 주파수에 대해서 실수부와 허수부로 두 개의 독립된 식을 얻을 수 있고, 여기서는 10개의 가진주파수에 따른 질량체와 하부사이의 상대변위 응답을 이용해서 총 20개의 식을 구성할 수 있다. 이러한 방법을 세 가지 모델에 각각 적용하여 구성된 방정식으로부터 주어진 모델에 대한 최적 매개변수를 구하였다.

선형 모델 식 (24)와 비선형 모델 식 (25)에 대한 매개변수를 규명한 결과는 Table 2에 나타내었고, 비선형 모델 식 (26)에 대해서는 5개의 M 값에 따른 매개변수를 규명하여 Table 3에서와 같이 정리하였다.

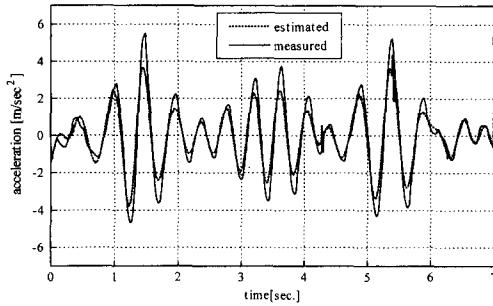
그리고 규명된 모델 매개변수의 정확도를 평가하기 위해서 두 가지 형태의 랜덤 가진입력에 대한 질량체의 실측가속도와 규명된 모델로부터 계산된 가속도의 평균제곱오차(normalized mean square error)⁽¹²⁾를 다음과 같이 계산하여 Table 2와 3에 표시하였다.

Table 2 Results of identified parameters using frequency domain method.

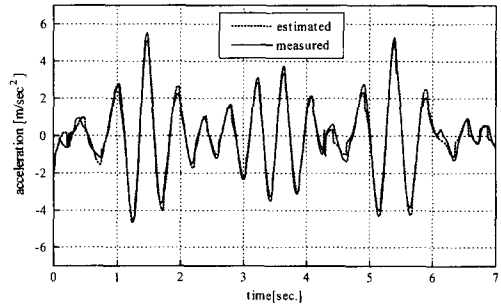
Model	k [N/m]	c [N-s/m]	F _d [N]	MSE ₁ [%]	MSE ₂ [%]
Linear	6259.1 (r=49.4%)	392.0 (r=50.6%)	—	11.0	17.2
Nonlinear	6378.2 (r=58%)	184.6 (r=27.4%)	12.3 (r=14.5%)	4.0	6.5

Table 3 Results of identified parameters using arctangent function.

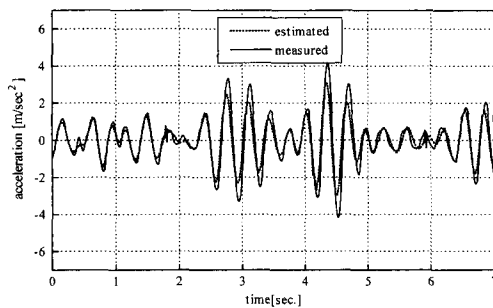
M	k [N/m]	c [N-s/m]	F _d [N]	MSE ₁ [%]	MSE ₂ [%]
50	6360.4	116.6	21.4	6.7	6.9
100	6371.4	155.5	16.1	4.5	6.2
500	6383.1	180.2	12.9	3.6	6.0
1000	6384.1	182.7	12.5	3.7	6.0
10000	6381.8	184.6	12.3	3.9	6.5



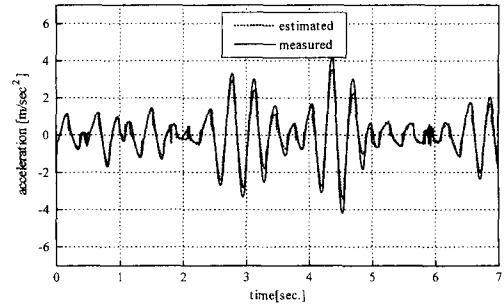
(a) The case using linear model



(b) The case using nonlinear model

Fig. 4 Measured and estimated accelerations when the excitation has 1.5~2.5 Hz frequency band.

(a) The case using linear model



(b) The case using nonlinear model

Fig. 5 Measured and estimated accelerations when the excitation has 2.5~3.5 Hz frequency band.

$$MSE = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N_o} (x_o(i) - \hat{x}_o(i))^2}{N_p O_{x_o}^2} \right\} \times 100 [\%] \quad (27)$$

여기서, \hat{x}_o 는 실제 측정된 응답, x_o 는 예측된 응답을 각각 나타낸다.

Table 2에서 보면 선형과 비선형 모델을 각각

적용하여 규명된 선형 강성계수의 값은 큰 차이가 없으나 점성감쇠계수의 값은 큰 차이를 보이는데, 이것은 선형모델을 이용하여 모델변수를 구하는 경우에 쿨롱마찰이 점성감쇠에 포함되어 피팅되기 때문이다. 그리고 선형 모델의 경우에 있어서 예측된 응답오차는 11, 17.2%로 비선형 모델의 4, 6.5%

Table 4 Results of identified parameters using time domain method.

Model	k [N/m]	c [N-s/m]	F _d [N]
Nonlinear	6790.6 (r=65%)	188.5 (r=30%)	4.1 (r=5%)
	MSE ₁ =8.7[%] MSE ₂ =8.1[%]		

에 비하여 크게 나타난다. Table 2에서 r 값은 모델변수 피팅(fitting) 시에 사용된 상대변위, 속도의 실효값(root mean square value)을 이용해서 각 변수항의 전체 전달력에 대한 기여도를 나타낸 것인데, 비선형 모델의 경우에 있어서 쿨롱마찰력이 전체 전달력의 14.5% 정도를 차지함을 알 수 있다.

연속함수인 역탄젠트함수를 이용한 Table 3의 결과에서 보면 앞질의 모의실험에서와 같이 M 값이 커질수록 부호함수를 이용한 결과와 일치됨을 알 수 있고, 실험에서의 가진주파수가 3.5 Hz 이하의 저주파수이므로 부호함수에 비하여 두드러진 모델개선은 없으나 M 값이 500~1000에서 최소의 응답오차 값을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 4과 5는 Table 2의 비선형 모델의 매개변수에 의해 예측된 질량체 가속도와 실측된 가속도를 비교하여 나타낸 것이다.

두 가지의 가진입력에 따른 응답을 비교해 보면 두 경우 모두 쿨롱마찰을 포함하는 모델이 실제 가속도를 보다 잘 예측함을 알 수 있다. 또한 선형 모델로부터 예측된 가속도를 측정신호와 비교해 볼 때 점성감쇠계수 값(감쇠비 $\zeta=0.41$)이 과대 평가되고 있음을 알 수 있다.

이상의 주파수영역방법의 결과에서 알 수 있듯이 주어진 현가 시험기에 대한 모델은 감쇠기의 정확한 성능평가 및 제어를 위해서 쿨롱마찰 모델을 포함시키는 것이 바람직하며, 쿨롱마찰에 대한 모델은 가진주파수가 낮으므로 주어진 가진주파수대역에서는 부호함수 모델만 사용하여도 어느 정도 정확한 모델을 구성할 수 있다.

주파수영역방법을 적용하여 구해진 비선형 모델로부터 예측된 가속도 응답오차가 4~7% 정도로 낮은 수준이므로 본 방법을 통하여 비교적 정확한 비선형 모델변수의 규명이 가능함을 알 수 있다.

4.3 시간영역방법 적용

시간영역에서의 힘-상태 사상법을 적용하기 위해서는 주파수영역에서의 매개변수 규명에서 사용된 질량체의 변위와 비선형 요소 양단의 상대변위 외에 질량체의 가속도 및 비선형 요소 양단의 상대속도가 추가로 필요하게 된다. 여기서 비선형 요소 양단의 상대속도는 상대가속도를 적분하여 구하였다. 이 방법을 적용할 경우에는 시간축의 임의의 한 상태에서 변수규명을 위한 식이 하나씩 존재하기 때문에 하나의 가진 주파수에 대하여 1300개의 응답데이터를 측정할 경우에 1300개의 식이 얻어진다. 따라서 가진 주파수를 10개로 하면 총 13000개의 식을 이루게 되므로 변수규명시에 행렬크기(matrix size)가 매우 커서 계산에 어려운 점이 있다. 따라서 각 가진 주파수에 대해서 시간축에서 20개의 점만 선택하여 총 200개의 식과 식 (25)의 비선형 모델을 이용하여 모델 매개변수를 계산하였다. 규명된 매개변수의 결과는 Table 4에 나타내었다. 주파수영역에서 규명된 결과와 비교하여 보면 선형 강성계수와 감쇠계수는 각각 6.5%, 2.0%로 큰 차이가 없으나 쿨롱마찰력계수는 67.0%로 큰 차이를 보이고 있다. 시간영역방법에서 얻어진 매개변수는 주파수영역방법에 비하여 적은 응답정보를 이용하였고, 모든 주파수를 포함하는 시간영역 데이터를 신호처리없이 바로 사용하기 때문에 응답 잡음에 민감하다. 따라서 쿨롱마찰력계수와 같은 전체 연결력에 대한 기여도가 다른 항에 비하여 상대적으로 적은 매개변수는 규명오차를 많이 포함하게 된다.

5. 결 론

일반적인 비선형 요소를 갖는 1자유도 계에 대해서 주파수영역에서의 힘-상태 사상법을 수학적으로 유도하고, 우선적으로 쿨롱마찰과 강화 스프링 특성을 동시에 갖는 예제 계에 대한 모의실험을 통하여 주어진 비선형 요소에 대한 방법의 적용성을 검증하였다. 그리고 쿨롱마찰 특성을 갖는 현가성능 시험기에 주파수영역방법과 시간영역방법을 각각 적용하여 모델변수를 규명함으로써, 반응동 감쇠기의 모델을 개선하고, 제안된 주파수영역방법을 실험적으로 검증할 수 있었다. 예제 계의 모의실험으로부터 부분계의 선형 주파수응답함수를 이용하여 쿨롱마찰과 강화스프링을 갖는 비선형 계의 모델변수 규명이 가능함을 알 수 있었다. 그리고 쿨롱마

찰을 갖는 계의 모델변수를 정확하게 규명하기 위해서는 마찰력보다 상당히 큰 가진력이 필요하다는 것을 알 수 있었으며, 쿨롱마찰력을 부호함수외의 연속함수인 역탄젠트함수로 표현하므로 다른 모델변수를 개선할 수 있었다. 현가성능 시험기에 대한 실험적용 결과로부터 반응동 감쇠기의 쿨롱마찰력은 무시할 수 없을 정도로 커서 선형모델만으로는 불충분한 것으로 판명되며, 쿨롱마찰 모델을 포함시킨 비선형 모델을 이용하여 주파수영역에서 모델변수를 규명한 결과 어느 정도 정확한 시험기 질량체의 응답을 예측할 수 있었다. 특히 실험적용에서 주파수영역방법과 시간영역방법을 비교해 보면 알 수 있듯이 주파수영역에서의 힘-상태 사상법은 시간영역방법에 비하여 아주 적은 수의 방정식으로 구성되기 때문에 데이터 축약효과(data reduction effect)가 크고, 응답속도 및 가속도 측정없이 변위측정만으로 가능하다. 또한 잡음에 민감한 시간영역방법과는 달리 가진주파수성분만 분리하여 결과식을 구성함으로써 잡음에 덜 민감한 결과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

참고문헌

- (1) Ibrahim, S. R., 1984, "Time-Domain Quasilinear Identification of Nonlinear Dynamic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 6, pp. 817~823.
- (2) 이건명, Tomlinson, G. R., 1995, "Volterra 급수로 나타낸 비선형시스템 주파수응답함수의 수렴특성," 대한기계학회논문집, 제19권, 제8호, pp. 1901~1906.
- (3) 이건명, 1997, "고차 주파수응답함수를 이용한 비선형시스템의 매개변수 추정," 한국소음진동공학회지, 제7권, 제2호, pp. 223~229.
- (4) Masri, S. F., Miller, R. K., Saud, A. F. and Caughey, T. K., 1987, "Identification of Nonlinear Vibrating Structures: Part I-Formulation," *Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 918~922.
- (5) Masri, S. F., Miller, R. K., Saud, A. F. and Caughey, T. K., 1987, "Identification of Nonlinear Vibrating Structures: Part II-Application," *Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 923~929.
- (6) Masri, S. F., Miller, R. K., Dehghanyar, T. J. and Caughey, T. K., 1989, "Active Parameter Control of Nonlinear Vibrating Structures," *Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 659~666.
- (7) Crawley, E. F. and Aubert, A. C., 1986, "Identification of Nonlinear Structural Element by Force-State Mapping," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 1, pp. 155~162.
- (8) Crawley, E. F. and O'Donnell, K. J., 1987, "Force-State Mapping Identification of Nonlinear Joints," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 7, pp. 1003~1010.
- (9) Al-Hadid, M. A. and Wright, J. R., 1992, "Estimation of Mass and Modal Mass in the Identification of Non-linear Single and Multi Degree of Freedom Systems Using the Force-State Mapping Approach," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 6, No. 4, pp. 383~401.
- (10) Lee, S. S. and Park, Y. S., 1991, "Position of Non-linear Elements and Identification of Their Type by a Local Non-Parameteric Method," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, No. 5, pp. 430~420.
- (11) Kim, W. J. and Park, Y. S., 1994, "Non-linear Joint Parameter Identification by Applying the Force-State Mapping Technique in the Frequency Domain," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 8, No. 5, pp. 519~529.
- (12) Mohamad, K. S., Worden, K. and Tomlinson, G. R., 1992, "Direct Parameter Estimation for Linear and Nonlinear Structures," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 3, pp. 471~499.