

비압축성 문제에 대한 비적합 복합유한요소 정식화

주 상 백* · 신 호 철**

(1997년 4월 29일 접수)

A New Incompatible Mixed Formulation for Incompressible and Nearly-incompressible Media

Sang-Baek Ju and Hyo-Chol Sin

Key Words : Incompatible Function(비적합 함수), Hu-Washizu(변분원리), Incompressibility Locking(비압축 강성과잉현상), Mixed Finite Element Formulation(복합유한요소 정식화)

Abstract

In the present study, we attempted to add the incompatible functions as additional variable terms to the conventional u-p formulation. It is derived from the four-field generalized variational principle that encompasses velocity, pressure, velocity strains and stress fields as independent interpolated variables. As a severe test of the present formulation, we have investigated the driven cavity with the corner velocity singularity like leaky lid. Through the test, the present element performs very well without unstable oscillation of pressure distribution.

1. 서 론

비압축성 탄성문제나 혹은 비압축성 점성유체 문제의 수치해석에서 주로 쓰이는 속도와 압력의 양자를 모두 기초변수로 하는 복합 유한요소법(mixed finite element method)은 그 결과가 수렴성을 갖기 위해선 몇 가지 안정성 조건(stability condition)을 만족해야 한다. 그러나, 불행히도 이 방법에서 저 차의 함수 도입에 의해 정식화된 유한 요소들은 일반적으로 엄밀한 의미에서 그 거동이 불안정한 것으로 알려져 있다. 이들은 직사각형의 유한요소 격자에서 체크무늬의 불연속적이고 불균질한 압력모드를 나타내며, 좀더 일반적인 사각형 요소의 격자에서는 속도 혹은 변위장에서 부정확성을 보이는 것으로 알려져 있다. 최근 이 불안정한 방법으로

인한 비압축성 물질의 수치적 해석의 어려움이 명확해짐에 따라 세계적으로 많은 연구들이 진행되어 왔다.⁽¹⁻⁴⁾

한편, 비적합 함수는 결점이 작고, 강력한 성능과 안정성이 있는 최근의 유한요소 디자인에 많이 사용되어 왔다.⁽⁵⁻¹¹⁾ 특히, 굽힘문제와 같은 심각한 구조 강성과잉현상을 제거하는 데 있어, 비적합 요소는 매우 효율적이며, 높은 정확성과 안정성을 지닌 해를 제공한다.

본 연구에서는 비압축성 재료에 대한 전통적인 속도-압력 정식화⁽⁹⁾에 추가변수로서 비적합 함수를 도입하였다. 이는 기존의 Hu-Washizu 변분원리를 수정하여, 속도장, 압력장, 응력장 그리고 속도 변형률장 등의 4개의 물리장을 독립적 변수로서 포괄하는 일반화된 변분원리로부터 유도되었다. 본 정식화에 대한 몇 가지의 엄격한 테스트 결과, 유도된 본 연구의 요소는 압력분포에 있어서 불안정한 진동이 없이 안정된 해를 제공하는 것으로 나타났다.

*서울대학교 터보동력기계센터

**회원, 서울대학교 기계설계학과

2. 기초방정식

일반적인 비압축성 문제에 대한 기본식은 다음과 같다.

- 구성방정식

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

- 운동량방정식

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (4)$$

- 적합조건

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (4)$$

- 구성법칙

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_\varepsilon W(\boldsymbol{\varepsilon}, p) \quad (5)$$

여기서, \mathbf{f} 는 물체력벡터, \mathbf{u} 는 속도장벡터, p 압력장, \mathbf{I} 는 정방단위행렬, μ 는 점성계수 그리고 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 속도변화량의 대칭부분을 의미한다. 규정된 경계조건을 다음과 같이 고려한다.

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{T} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \quad (7)$$

여기서, \mathbf{g} 와 \mathbf{h} 는 주어진 함수이다.

3. 4개장 변분법

이제, 식 (4)에 주어진 조건을 Lagrange 승수 σ 를 통하여 변분식에 삽입하면, 그 변분이 각각 식 (1)과 식 (3), 식 (4), 식 (5), 식 (6)으로 유도되는 일반화된 에너지변분식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, p) = & \int_{\Omega} \{ W(\boldsymbol{\varepsilon}, p) - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) \} d\Omega \\ & - L_{ext}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$\begin{aligned} L_{ext}(\mathbf{u}) = & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \\ W(\boldsymbol{\varepsilon}, p) = & -p\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} + \mu(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \text{이다.} \end{aligned}$$

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, p)$ 는 모든 변분변수 $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}, q)$ 에 대한 실제의 속도와 속도변화량, 응력, 압력을 의미한다. 물체부분에 대한 영역을 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n_{sd}}$ 으로 규정하고, W 를 $W := \{ \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^{n_{sd}} \}$ 와 같이 표준

적인 형태로 정의된 속도변분의 유한차원 공간이라 하자. 그리고, 압력변분에 대한 공간집합을 $P := \{ q \in [L_2(\Omega)]^{n_{sd}} \}$ 라 하고, 응력과 속도변화량에 대한 변분공간을 각각 $S := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L_2(\Omega)]^{n_{sd}} \}$ 와 $E := \{ \boldsymbol{\gamma} \in [L_2(\Omega)]^{n_{sd}} \}$ 라 하자. 식 (8)의 각각의 변분량에 대한 변분을 취하면 다음의 표준적인 4가지 변분방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \{ \partial_\varepsilon W(\boldsymbol{\varepsilon}, p) - \boldsymbol{\sigma} \} dV = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{v}) dV = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} q \cdot \partial_p W(\boldsymbol{\varepsilon}, p) dV = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - L_{ext}(\mathbf{w}) = 0 \quad (12)$$

한편, 속도변화량을 다음과 같이 표시하자.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{u}_\lambda \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla^s \mathbf{w} + \nabla^s \mathbf{w}_\lambda \quad (14)$$

여기서, $\nabla^s \mathbf{u}$ 는 속도 실험해(trial solutions)에 대한 대칭구배량(symmetric gradient)이고, $\nabla^s \mathbf{w}$ 는 가중치함수(weighting functions), 그리고, $\nabla^s \mathbf{u}_\lambda$ 와 $\nabla^s \mathbf{w}_\lambda$ 는 각각의 속도부분에 대한 비적합 함수의 대칭구배량을 의미한다. 식 (13)과 식 (14)를 식 (9)~(11)에 대입하여 수정하면 다음과 같은 4가지 변분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} \cdot \partial_\varepsilon W(\mathbf{x}, p, \nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{u}_\lambda) d\Omega - L_{ext}(\mathbf{w}) \\ = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w}_\lambda \cdot [-\boldsymbol{\sigma} + \partial_\varepsilon W(\mathbf{x}, p, \nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \mathbf{u}_\lambda)] d\Omega \\ = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\lambda d\Omega = 0 \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} q \cdot (\nabla^s \mathbf{u} \cdot \mathbf{I} + \nabla^s \mathbf{u}_\lambda \cdot \mathbf{I}) d\Omega = 0 \quad (18)$$

식 (17)은 L_2 -직교성이 응력과 속도변화량 사이에 성립함을 보여주고 있다. 그 결과로 식 (16)의 첫번째 항은 소거되어 이산화식에서 응력장이 효율적으로 제거된다.

4. Galerkin 정식화

Ω^e 를 e 번째 요소의 내부영역을 나타낸다고 하

면, 물체영역 Ω 는 n_{el} 개 요소로 나누어 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$$

$$\emptyset = \bigcap_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$$

Γ^e 로 Ω^e 의 물체의 경계를 표시하면, 이산화된 물체의 내부경계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Gamma^e - \Gamma$$

W^h 를 선택된 속도의 가중치함수(weighting function)의 집합이라 할 때, W^h 는 $W^h \subset W \subset [H^1(\Omega)]^{n_{sd}}$ 의 관계에 있고, W^h 가 전형적인 C^0 유한요소의 함수일 때, $\mathbf{w}^h \in V^h$ 의 관계에서 다음의 식이 성립한다.

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g$$

V^h 를 속도장에 대한 실험해(trial function)의 집합으로 나타낼 때, V^h 는 $V^h \subset V \subset [H^1(\Omega)]^{n_{sd}}$ 의 관계가 성립하고, 마찬가지로 V^h 가 전형적인 C^0 유한요소 함수일 때, $\mathbf{u}^h \in W^h$ 의 관계에서

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \mathbf{g}^h$$

이 성립한다. 여기서, $\mathbf{v}^h \in W^h$ 이고, $\mathbf{g}^h \in V^h$ 이다. 규정된 함수 \mathbf{g} 는 경계에서 다음의 조건을 만족한다.

$$\mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g$$

한편, P^h 를 압력에 대한 가중치 함수와 실험 함수의 집합으로 표시하면, $P^h \subset P \subset [L_2(\Omega)]^{n_{sa}}$ 의 관계가 성립한다. 일반적으로 P^h 의 함수는 불연속적이다.

다음으로 $E^h \subset E \subset [L_2(\Omega)]^{n_{sa}}$ 와 $S^h \subset S \subset [L_2(\Omega)]^{n_{sa}}$ 를 각각 속도변화량과 응력의 유한차원 공간이라고 하고, 모든 $(\mathbf{r}^h, \nabla^s \mathbf{u}^h) \in S^h \times E^h$ 이 식 (17)의 L_2 -직교성을 만족한다고 가정하자. 가정에 의하여, 응력장은 효율적으로 방정식으로부터 제거된다. 그러므로, 비압축성 문제에 대한 Galerkin 정식화는 다음과 같은 문제로 요약될 수 있다.

주어진 \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{h} 에 대하여, 모든 $\mathbf{w}^h \in W^h$, $q^h \in P^h$ 그리고 $\nabla^s \mathbf{w}^h \in E^h$ 와 다음의 조건을 만족하는 $\mathbf{v}^h \in W^h$, $p^h \in P^h$, $\nabla^s \mathbf{u}_\lambda \in E^h$ 를 찾아라.

$$B_a(\mathbf{w}^h, q^h, \nabla^s \mathbf{w}_\lambda^h; \mathbf{v}^h, p^h, \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^h)$$

$$= L_a(\mathbf{w}^h, q^h)$$

여기서,

$$B_a(\mathbf{w}^h, q^h, \nabla^s \mathbf{w}_\lambda^h; \mathbf{v}^h, p^h, \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^h)$$

$$= (\nabla^s \mathbf{w}^h, -p^h \mathbf{I}) + (\nabla^s \mathbf{w}^h, 2\mu \nabla^s \mathbf{v}^h)$$

$$+ (\nabla^s \mathbf{w}^h, 2\mu \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^h) + (\nabla^s \mathbf{w}_\lambda^h, -p^h \mathbf{I})$$

$$+ (\nabla^s \mathbf{w}_\lambda^h, 2\mu \nabla^s \mathbf{v}^h) + (\nabla^s \mathbf{w}_\lambda^h, 2\mu \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^h)$$

$$+ (q^h, \nabla^s \mathbf{v}^h, \mathbf{I}) + (q^h, \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^h, \mathbf{I})$$

$$+ \frac{1}{\lambda} (q^h, p^h)$$
(20)

$$L_a(\mathbf{w}^h, q^h) = (\mathbf{w}^h, \mathbf{f})_{\Omega^e} + (\mathbf{w}^h, \mathbf{h})_{\Gamma_h}$$
(21)

$(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$ 는 $L_2(\Gamma_h)$ 내적을 의미한다.

5. 행렬식

본 정식화에 대한 행렬식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\lambda} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{u\lambda}^T & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} & \mathbf{K}_{\lambda p} \\ \mathbf{K}_{up}^T & \mathbf{K}_{\lambda p}^T & \mathbf{K}_{pp}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix}$$
(22)

여기서, $\hat{\mathbf{u}}$ 는 절점속도 자유계의 벡터이고, $\hat{\lambda}$ 는 비적합 함수에 대한 자유도계 벡터, $\hat{\mathbf{p}}$ 는 압력 자유도계 벡터이고, 각각의 행렬에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{uu}^e)$$

$$\mathbf{K}_{u\lambda} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{u\lambda}^e)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{up}^e)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda p} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{\lambda p}^e)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{\lambda\lambda}^e)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{k}_{pp}^e)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{h}^e)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{f}^e)$$

여기서, $\mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}$ 는 전체 배열에서 각 요소에 대한 위치를 배정하여 합성해 주는 유한요소 합성자이고,

$$\mathbf{k}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_u^e d\Omega$$
(23)

$$\mathbf{k}_{u\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_\lambda^e d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{k}_{up}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^{eT} \mathbf{I}_m \mathbf{N}_p^e d\Omega \quad (25)$$

$$\mathbf{k}_{\lambda\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_\lambda^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_\lambda^e d\Omega \quad (26)$$

$$\mathbf{k}_{\lambda p}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_\lambda^{eT} \mathbf{I}_m \mathbf{N}_p^e d\Omega \quad (27)$$

$$\mathbf{k}_{pp}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_p^{eT} \mathbf{N}_p^e d\Omega \quad (28)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_n, e} \mathbf{h} d\Gamma - \sum_{j=1}^{n_{elem}} (k_{uu}^e)_{j\mathcal{E}_j} \xi_j^e \quad (29)$$

여기서, n_{elem} 는 요소의 속도 자유도계수이고, $n_{sd}=2$ 일 때, $\mathbf{D} = \mu \text{diag}(2, 2, 1)$ 이고, $\mathbf{I}_m = [1, 1, 0]$ 이다. 유한요소해석을 위한 각 성분에 대한 이산화 행렬식과 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N}_u^e(\xi) \hat{\mathbf{u}}_e, \quad \nabla^s \mathbf{u}_e^h = \mathbf{B}_u^e(\xi) \hat{\mathbf{u}}_e \quad (30)$$

$$\mathbf{u}_\lambda^e = \mathbf{N}_\lambda^e(\xi) \hat{\lambda}_e, \quad \nabla^s \mathbf{u}_\lambda^e = \mathbf{B}_\lambda^e(\xi) \hat{\lambda}_e \quad (31)$$

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{N}_p^e(\xi) \hat{\mathbf{p}}_e \quad (32)$$

여기서, $\xi(\xi, \eta) \in \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}^{n_{sd}}$ 는 단위 등매개 공간(unit isoparametric space)이고, $\mathbf{x}_e = \mathbf{N}^e(\xi) \hat{\mathbf{x}}_e$ 는 표준 등매개 보간함수, $\hat{\mathbf{u}}_e$ 는 요소 절점속도벡터, $\hat{\lambda}_e$ 는 비적합 함수의 자유도에 해당하는 요소벡터, $\hat{\mathbf{p}}_e$ 는 압력 자유도계 함수의 요소벡터, $\mathbf{B}_u^e(\xi)$ 는 이산화한 속도 변화율 연산자(discrete strain operator), $\mathbf{N}_\lambda^e(\xi)$ 는 비적합 함수 연산자(incompatible function operator), $\mathbf{N}_p^e(\xi)$ 는 이산화된 압력의 연산자이고, 그 성분은 다음과 같다.

$$\mathbf{N}_u(\xi) = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_3 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

$$h_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (33)$$

비적합 함수행렬 \mathbf{N}_λ^e 구성은 식 (17)의 L_2 -적교성 조건을 만족하도록, 응력장을 일정하게 유지시키면 식 (17)의 조건은 다음과 같은 간단한 형태가 된다.

$$\tau_c \cdot \int_{\Omega_e} \nabla^s \mathbf{u}_{\lambda e}^h d\Omega = 0 \quad (34)$$

위의 식은 비적합 함수로부터 유도된 상정된 속도 변화율이 요소의 내부영역에서 제거되어야 함을 의미하며, 또한, 이것은 일반적인 비적합 변위 이론의 수렴조건과 같은 형태이다.⁽¹²⁾ 식 (35)에 기초하여, 기존의 비적합 함수에 추가적인 보간함수 항을 도입하여 다음과 같이 \mathbf{N}_λ^e 에 직교조건을 부여

하자.⁽¹⁰⁻¹⁴⁾

$$\mathbf{N}_\lambda(\xi) = \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} C_1 \xi + C_2 \eta & D_1 \xi + D_2 \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \xi + C_2 \eta & D_1 \xi + D_2 \eta \end{bmatrix}$$

$$C_1 = D_1 = -\frac{2}{3} \frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3}$$

$$C_2 = D_2 = -\frac{2}{3} \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \quad (35)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

이고, ξ_i, η_i 는 절점의 요소좌표계 변수, C_1, C_2, D_1, D_2 는 요소의 절점에 대한 좌표 매개변수, $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4$ 는 $n_{sd}=2$ 일 때 선형 요소의 절점에 대한 직교좌표계 값을 나타낸다.

6. 수치 테스트

이번 절에서는 앞서 밝힌 정식화에 기초하여 개발된 요소를 몇가지 대표적인 문제에 적용하여 요소의 성능을 테스트해 보았다. 본 테스트에 사용된 요소는 응력장에 대한 도입함수는 상수로 가정하여, 변위함수와 압력함수를 각각 절점 선형함수(bilinear functions)로 그리고 식 (35)의 비적합함수를 도입하였다. 요소의 강성행렬에 대한 수치적분에서 2점 적분을 사용하였다.

새는 구멍이 있는 덮개를 가진 용기에서의 유동

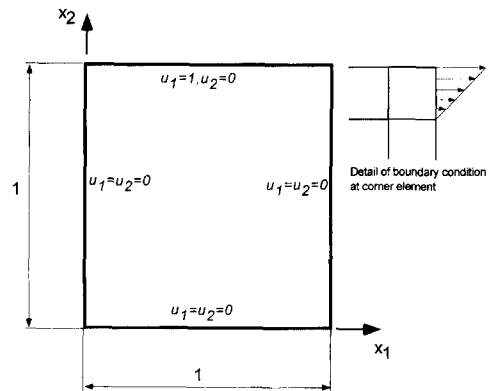


Fig. 1 Driven cavity flow : problem description.

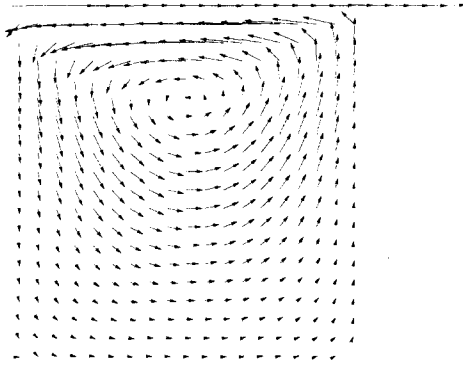


Fig. 2 Velocity vectors for the driven cavity flow problem.

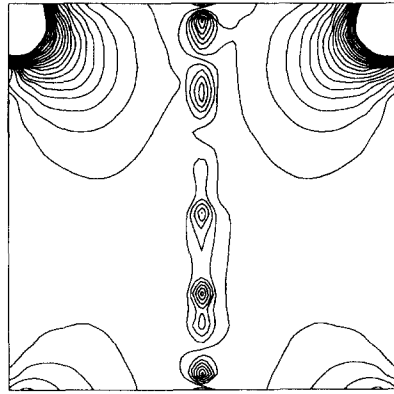


Fig. 5 Pressure contour plot by using the linear velocity and linear pressure elements (20×20 meshes).

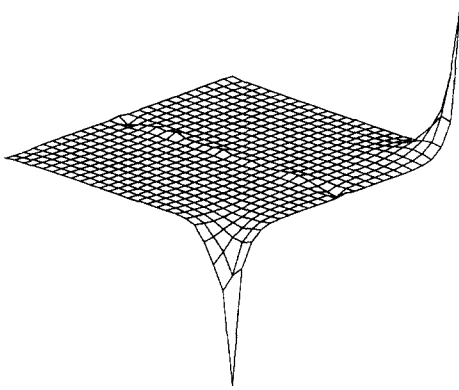


Fig. 3 Pressure elevation plot by using the linear velocity and linear pressure elements (20×20 meshes).

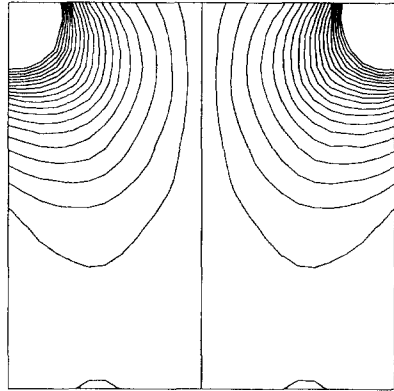


Fig. 6 Pressure contour plot by using the pressure elements (20×20 meshes).

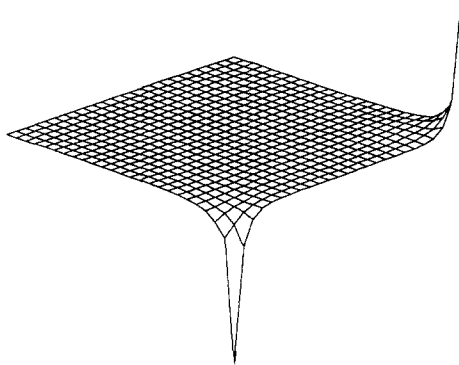


Fig. 4 Pressure elevation plot by using the pressure elements (20×20 meshes).

문제: 본 연구의 요소에 대한 압력 해의 안정성을 조사하기 위하여 Fig. 1과 같이 새는 구멍이 있는 덮개를 가진 용기에서의 비압축성 유체유동문제⁽⁴⁾를 조사하였다. 같은 문제에 대하여 본 연구의 요

소의 결과와 현재 일반적으로 유체유동문제의 분석에 쓰이는 선형 연속압력 보간함수를 가진 속도-압력 정식화에 의한 4절점 요소의 결과를 비교하였다. Fig. 2는 본 연구의 속도장에 대한 각 절점에서의 속도벡터의 분포를 나타낸 것이다. 그림에서 보듯이 속도해에 대한 결과는 불연속성이 문제에 대한 속도장 분포를 잘 표현하고 있다. Fig. 3과 Fig. 4는 각각 선형속도장 함수 및 선형압력 함수에 의해 유도된 기존의 복합요소와 본 연구의 비적합 함수 요소를 사용하여 같은 문제를 해석한 압력에 대한 3차원 그래프를 나타낸 것이다. Fig. 3에서 기존의 요소는 불연속성을 보이고 있으나 Fig. 4에서 보듯이 본 연구의 요소의 결과에서는 전혀 그런 현상이 나타나고 있지 않다. 이러한 경향은 Fig. 5와 Fig. 6의 각각의 요소를 사용하여 해석한

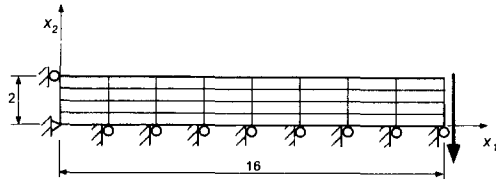


Fig. 7 Element mesh and boundary condition for plane elasticity problem.

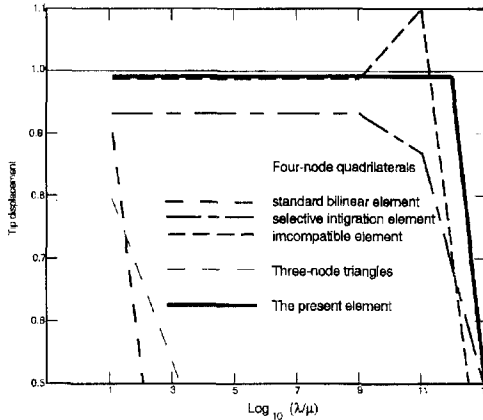


Fig. 8 The behaviors of various elements as Poisson's ratio approaches 1/2.

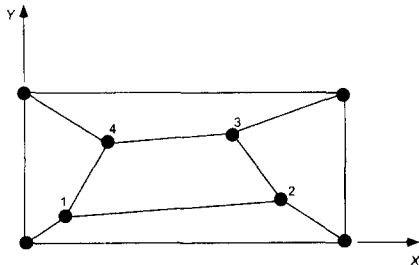


Fig. 9 Distorted element test (constant stress test).

결과의 2차원 contour 그림에서 더욱 명확하게 나타나고 있다. 이상에서 보듯이 본 연구의 요소는 속도분포에 대한 결과에서 좋은 거동을 나타내며, 압력분포에서 기존의 요소에서 나타나는 심한 압력 발진현상을 보이지 않으며, 안정된 결과를 나타내고 있다.

굽힘문제에 대한 거동테스트 : 비압축성 탄성문제에 대한 본 연구 요소의 거동을 테스트하고자, Fig. 7와 같은 참고문헌 (4)의 보 굽힘문제가 고찰되었다. 이 테스트에서는 3절점 삼각요소, 일반 4절점 사각요소, 비적합 요소와 선택적 감차 적분요소 그리고 본 연구의 요소가 사용되었다. Fig. 8은

그 결과를 도시한 것으로, 본 연구의 요소는 다른 요소들에 비해 비압축성 한계치에 대한 요소의 거동이 다른 일반 요소나 비적합 요소 및 선택적 감차 적분요소에 비해 우수한 것을 보여주고 있다.

패치테스트 : Fig. 9는 MacNeal 등⁽¹⁶⁾이 제안한 패치테스트이며, 본 연구의 요소는 이 테스트를 통과하여 비적합 함수 도입에 따른 수렴성에 대한 문제가 없는 것으로 나타났다.

7. 결 론

본 연구에서는 Hu-Washizu 변분원리에 기초하여, 속도장과 압력장 그리고 비적합 모드를 고려한 복합 유한요소법에 대한 정식화를 수행하였다. 본 연구의 요소를 Stokes 유동유체나 비압축성을 가진 굽힘문제에 적용한 결과, 요소의 거동이 기존의 요소에 비해 월등히 뛰어난 것으로 나타났다. 본 연구에서는 비적합 모드가 기존의 유한요소법에서 굽힘문제와 같은 구조 요소에 국한되어 쓰이는 한계를 벗어나, 현재 널리 사용되고 있는 속도-압력 복합유한요소법에 적용이 가능하며, 기존의 방법에 비해 그해의 수렴성 문제나 안정성에 있어 뛰어난 것으로 나타났다. 이로써, 현재 기존의 속도-압력 정식화가 쓰이는 분야, 즉 비압축성 Newtonian 유동유체, 고무와 같은 비압축성과탄성재료나 소성문제에 직접적으로 확장 적용되는 것이 가능할 것으로 보인다.

후 기

본 연구는 서울대학교 공대 교육연구재단(현대기금)과 터보·동력기계연구센터의 지원으로 수행되었다.

참고문헌

- (1) Hughes, T. J. R. and Franca, L. P., 1987, "A New Finite Element Formulation for CFD: VII," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 60, pp. 85~96.
- (2) Hughes, T. J. R., Franca, L. P. and Balestra, M., 1986, "A New Finite Element Formulation for CFD: V," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 59, pp. 85~99.

- (3) Hughes, T. J. R., Lui W. K., and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow by Penalty Function Formulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, No. 00, pp. 00~00.
- (4) Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Analysis*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.
- (5) Simo, J. C. and Rifai, M., 1990, "A Class of Mixed Assumed Strain Method of Incompatible Modes," *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol. 29, pp. 1595~1638.
- (6) Pian, T. H. H. and Sumihara, K., 1984, "Rational Approach for Assumed Stress Finite Element," *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol. 20, pp. 1685~1695.
- (7) Talyor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-conforming Element for Stress Analysis," *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol. 20, pp. 1211~1219.
- (8) Belytschko, T. and Bachrach, W. E., 1986, "Efficient Implementation of Quadrilaterals with High Coarse-mesh Accuracy," *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 54, pp. 279~301.
- (9) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- (10) Ju Sang-Baek and Sin Hyo-Chol, 1996, "New Four-noded Incompatible Elements for Axisymmetric Structure with Assumed Strains," *Computers and Structures* Vol. 60, No. 2, pp. 269~278.
- (11) 주상백, 신호철, 1995, "가상변형률을 갖는 비적합 4절점 축대칭 요소," 대한기계학회논문집, 제19권, 제2호, pp. 486~494.
- (12) 주상백, 1994, "다변수 변분해법에 의한 비적합유한요소의 개발," 박사학위논문, 서울대학교.
- (13) 주상백, 신호철, 1995, "다변수 변분해법에 의한 비적합 4 절점 사각형 평면응력 및 평면변형률 요소의 개발," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 2871~2882.
- (14) 주상백, 신호철, 1996, "다변수 변분해법에 의한 비적합 8절점 육면체 요소," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제7호, pp. 2078~2086.
- (15) Strang, G. and Fix, G. J., 1973, *An Analysis of the Finite Element Method*, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall.
- (16) MacNeal, R. H. and Harder, R. L., 1985, "A Proposed Standard Set of Problem to Test Finite Element Accuracy," *Finite Elements Anal. Des.*, 1, 3~20.