

변위형 유한요소 해에서 국부응력장 향상에 대한 연구

송 기 남*

(1996년 12월 27일 접수)

A Study on the Improvement of the Local Stress Field in a Displacement-Formulated Finite Element Solution

Kee-Nam Song

Key Words : Displacement-Formulated Finite Element Method(변위형 유한요소법), Local Stress Field(국부응력장), Conjugate Stress(공액응력), Fundamental Matrix(기본행렬), Ratio of Force Imbalance Norm(힘 불균형 크기의 비), Theory of Conjugate Approximations(공액근사이론)

Abstract

An efficient and useful method to improve the local stress field in a displacement-formulated finite element solution has been proposed using the theory of conjugate approximations for a stress field and the Loubignac's iterative method for a displacement field. Validity of the proposed method has been tested through three test examples, to improve the stress field and displacement field in the whole domain and the local regions. As a result of analysis on the test examples, it is found that the stress field in the local regions are approximated to those in the whole domain within a few iterations which have satisfied the original finite element equilibrium equation. In addition, it is found that the local stress field are by far better approximated to the exact stress field than the displacement-based stress field with the reduction of the finite element mesh-size.

기 호 설 명

$[N]$: 요소의 형상함수 행렬
 $\Phi_d(x)$: 변위형 유한요소에서 절점의 형상함수
 $[B]$: 요소의 변형률행렬
 $[D]$: 재료의 구성행렬
 Ω_e : 요소의 영역
 $[K]_e$: 요소의 강성행렬
 $\{F\}^e$: 요소의 절점력벡터
 $[K]_L$: 국부영역 모델의 강성행렬
 u_L : 국부영역 모델에서 절점변위
 f_L : 국부영역 모델에서 절점력

$\{u\}^e$: 요소의 변위장
 $\{\Delta\}^e$: 요소의 절점변위벡터
 $\{\sigma\}^e$: 요소의 변위기초응력장
 σ^* : 연속인 응력장
 S^i : 절점(i)에서 공액응력
 S^i : 절점(i)에서 응력의 공액성분
 C_{dr} : 기본행렬(fundamental matrix)
 $LSED_i$: 유한요소 i 에서 변형률에너지밀도
 $GSED$: 전체영역에서 변형률에너지밀도

1. 서 론

*회원, 한국원자력연구소

원리에 근거하여 형성된 이론의 간단성, 우수한 수학적 특성 및 수치해석의 용이함 등의 장점으로 인하여 여러 가지 공학문제에 대한 해를 구하는데 가장 보편적이며 효과적인 도구로 사용되고 있으며 상업용 프로그램에도 널리 이용되고 있다. 그러나 변위형 유한요소법의 단점중에 하나는 이 방법에서 얻은 일차적인 수치해인 변위장은 유한요소들의 경계에서 연속성(C^0 continuity)이 유지되고 있으며 비교적 정확도가 높은 편이나 변위-변형도 및 응력-변형도 구성방정식에서 구한 변위기초응력장은 요소경계면에서 불연속일 뿐만 아니라 정확도가 변위장에 비해 떨어진다는 것이다.⁽¹⁾

이러한 단점을 해소하기 위해 크게 3가지 분야로 연구가 진행되어 왔다. 첫째, 응력의 불연속을 근본적으로 해결하기 위해 변위장이외에 응력과 변형도를 추가적인 독립변수로 취급하는 혼합 유한요소법이 발전되어 비압축성 물질의 문제해석을 비롯하여 우수한 수치적 특성을 갖는 판/셸요소 개발에 성공적으로 이용되었으나 독립변수가 늘어남에 따라 해를 구하기 위한 수치계산량이 다소 늘어난다.⁽²⁾ 둘째, 변위형 유한요소법에서 얻은 불연속한 변위기초응력장을 기초로 하여 영역내에서 응력의 분포를 재구성하는 방법들이, 즉 개선된 응력장을 불연속한 변위기초응력장과 완전히 별개로 취급하여 최소자승오차법에 바탕을 둔 전체/국부 평탄화법(smoothing method)^(3,4) 공액근사(conjugate approximation) 개념을 이용하여 전영역에서 연속인 응력분포를 계산하는 방법⁽⁵⁻⁹⁾ 그리고 정해에 빠르게 수렴하는(super-convergent) 절점응력 계산방법등이⁽¹⁰⁻¹³⁾ 제시되고 있다. 이들중 국부 평탄화법은 절점에서 응력의 불연속이 존재하지만 대부분의 경우 매우 개선된 절점응력을 구할 수 있으며 계산에 소요되는 계산량이 매우 작기 때문에 현재 ANSYS code를 비롯한 여러 상업용 유한요소 프로그램에 후처리과정(post-process)⁽¹⁴⁾으로 널리 사용되고 있는 반면, 전체 평탄화법 및 공액근사법은 추가로 소요되는 계산량이 변위해를 얻는데 필요한 만큼 되어서, 그리고 빠르게 수렴하는 절점응력 방법은 연구단계에 있어서 아직까지는 상업용 프로그램에 널리 사용되고 있지 않다. 셋째, 변위형 유한요소법에서 얻은 연속응력장은 영역내에서 유한요소 평형방정식을 만족하고 있지 않기 때문에 유한요소 평형방정식을 맞추기 위해 변위장을 반복적으로 개선하는 반복적 알고리즘을 개발하여 변위장을 개선하고 아울러 연

속응력장을 개선하는 것이다.⁽¹⁵⁻¹⁸⁾ 그러나 이 방법에 의해서 개선된 변위해와 연속응력장은 원래의 변분식을 만족한다는 장점이 있으나 반복적인 알고리즘의 특성상, 추가로 요구되는 계산량이 너무 많다는 단점을 갖고 있다.

본 연구에서는 계산량이 추가로 소요되어서 사용하는 데 제한이 있으나 에너지 개념을 도입하여 물리적으로 의미가 있는 공액근사법의 특성과 반복적 알고리즘에 의한 변위장 개선 방법의 장점을 이용하고 이들 방법을 전체영역에 적용하는 대신에 국부영역에 적용할 수 있는 근사방법을 제안함으로써 공학문제에서 상세한 응력장 해석이 요구되는 국부영역에서 응력장의 정확도를 향상시킬 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

2. 변위형 유한요소해석 및 응력해 산출

선형 탄성문제를 변위형 유한요소법으로 해석하는 경우 유한요소 (e)에서 응력벡터 $\{\sigma\}^e$ 와 변형률벡터 $\{\epsilon\}^e$ 그리고 변위벡터 $\{u\}^e$ 는 다음과 같이 표현된다.^(9, 19)

$$\{\epsilon\}^e = [S] \cdot \{u\}^e \quad (1)$$

$$\{\sigma\}^e = [D] \cdot \{\epsilon\}^e = [D] \cdot [S] \cdot \{u\}^e \quad (2)$$

$$\{u\}^e \approx [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad (3)$$

단, $[S]$, $[D]$, $[N]$ 은 각각 미분행렬, 구성행렬, 형상함수행렬이며, $\{\Delta\}^e$ 는 요소의 절점변위벡터이다.

위의 식을 가중잔차법(weighted residual method) 또는 포텐셜에너지 최소화조건에 대입하여 정리하면 요소에서의 유한요소 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[K]^e \cdot \{\Delta\}^e = \{F\}^e \quad (4)$$

$$[K]^e = \int_{\Omega_e} (\{S\} \cdot [N])^T \cdot [D] \cdot [S] \cdot [N] d\Omega \quad (5)$$

이들 식에서 상첨자 e 는 요소를 나타내고 $[K]^e$, $\{F\}^e$ 는 각각 요소의 강성행렬과 절점력벡터이다.

식 (4)의 유한요소 방정식을 유한요소법의 표준절차에 의하여 계 전체에 대한 유한요소 방정식으로 조합하고 경계조건을 고려하여 행렬방정식을 풀면 각 절점에서의 변위를 구할 수 있다. 이와같이 요소의 절점변위벡터 $\{\Delta\}^e$ 가 결정되면 요소내에 분포하는 변위기초응력 ($\{\sigma\}^e$)은 절점변위 ($\{\Delta\}^e$)와

형상함수 그리고 변위-변형률, 변형률-응력의 구성 관계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\{\sigma\}^e = [D] \cdot [S] \cdot [N] \cdot \{\Delta\}^e \quad (6)$$

3. 공액근사법에 의한 응력계산방법

변위형 유한요소법에서 변위장은 유한차원 공간의 비직교성 기저함수들의 선형조합으로 근사화되며 변위장과 공액관계인 힘(응력)은 변위장을 근사화하는데 사용한 기저함수들과 직교성을 갖는 새로운 기저함수로 표시되어야 하는 것이 물리적 의미에서 힘과 변위의 내적으로 표현되는 에너지 범함수에 근거한 유한요소법의 취지에 맞는다는 관점에서 공액근사이론이 제안되었다.⁽⁶⁾ 공액근사법에 의한 응력계산 방법을 정리하면 다음과 같다.

(1) 유한요소 내에서 변위장(u_i)은 절점(Δ)에서의 기저함수($\Phi_{\Delta}(x)$)와 절점변위(u_i^{Δ})를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$u_i = u_i^{\Delta} \Phi_{\Delta}(x) \quad (7)$$

(2) 변위기초응력장(σ_{ij})은 변위-변형률, 변형률-응력 구성식에서 다음과 같이 표현된다. 여기서 E^{ijmn} 은 재료의 탄성모듈텐서이며, $\Phi_{\Delta, n}(x)$ 은 형상함수($\Phi_{\Delta}(x)$)를 공간좌표(x_n)로 편미분한 것이다.

$$\sigma_{ij} = E^{ijmn} u_n^{\Delta} \Phi_{\Delta, m}(x) \quad (8)$$

(3) 공액응력(S^{ij})은 변위기초응력에 근거하여 다음과 같은 방정식에서 계산된다.

$$S^{ij} = \langle \sigma_{ij}, \Phi_{\Delta}(x) \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \Phi_{\Delta}(x) d\Omega \quad (9)$$

$$C_{Dr} S^{ij} = S^{ij} \quad (10)$$

여기서, 기초행렬(fundamental matrix) C_{Dr} 은 유한요소 공간에서 변위장을 근사하는 기저함수($\Phi_{\Delta}(x)$)들의 내적으로 정의된다. 즉,

$$\begin{aligned} C_{Dr} &= \langle \Phi_{\Delta}(x), \Phi_{\Delta}(x) \rangle \\ &= \int \Phi_{\Delta}(x) \cdot \Phi_{\Delta}(x) d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

공액근사이론에 입각하여 응력을 나타낼 경우 물리적 의미에서 일관성있는 응력장일 뿐만 아니라 요소간의 불연속한 응력분포를 갖는 변위기초응력의 단점을 해소할 수 있고 경계상에서 응력의 정확도가 향상되는 것으로 알려져 있으니⁽⁵⁻⁷⁾ 공액응력

을 계산하기 위해서는 유한요소 방정식에 비견되는 식 (10)의 방정식을 추가로 풀어야 하는 단점이 있다.

4. 국부영역의 선정

변위장이나 변형률에너지를 어느정도 정확하게 계산할 수 있는 유한요소 모델(coarse model로 칭함)에 대한 변위형 유한요소해석 결과를 상세응력해석이 필요한 국부영역을 선정하는데에 이용할 수 있다. 국부영역을 선정할 때 사전 정보로는 응력, 변위, 변형률에너지의 크기나 이 값들의 그라디언트 크기등 여러 가지가 고려될 수 있으나^(20, 21) 본 연구에서는 기존 상용 프로그램에 적용이 용이한 변형률에너지의 밀도를 이용하였다. 국부영역은 다음과 같은 과정으로 선정한다.

(1) 각 유한요소(i)에서 변형률에너지의 밀도($LSED_i$)를 구한다.

$$LSED_i = \frac{U_i}{A_i}$$

여기서, U_i 및 A_i 는 요소 i 에서 각각 변형률에너지와 면적(체적)이다.

(2) 전체영역에서 변형률에너지밀도($GSED$)를 구한다.

(3) $LSED_i$ 와 $GSED$ 의 비(β)를 변형률에너지 밀도지수(strain energy density index: SEDI)로 정의하고 이 값을 정보로 이용하여 국부영역 위치 및 크기를 결정한다.

$$\beta = \frac{LSED_i}{GSED}$$

5. 국부영역의 응력장 개선방안

Fig. 1은 변위형 유한요소 모델에서 국부영역,

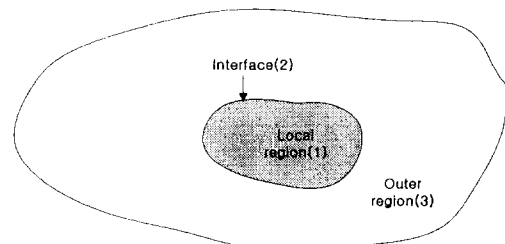


Fig. 1 Illustration of the whole domain and the local region.

국부영역과 외부영역의 경계선(영역) 그리고 외부영역을 나타낸 것으로 전체영역에 대한 유한요소 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다. 여기서 하첨자 1은 국부영역, 하첨자 2는 경계선(영역) 그리고 하첨자 3은 외부영역을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

식 (12)에서 첫째 및 둘째 열의 식만을 취하면 국부영역 및 경계선(영역)에서의 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - K_{23}u_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

즉, $[K]_L u_L = f_L$ 로 표현된다. 여기서, 하첨자 L 은 국부영역과 경계선(영역)을 지칭한다.

Jara-Almonte 등⁽²²⁾은 외부영역에서 유한요소를 세분화하지 않으면서 국부영역에서만 유한요소를 세분화하고 외부영역의 변위(u_3)와 외부영역과 경계선(영역)간의 강성행렬(K_{23})로 경계절점에서의 하중을 보정한 식 (13)의 유한요소 방정식을 풀면 국부영역에서의 유한요소해가 개선될 수 있음을 보였다. 그러나 본 연구에서는 Jara-Almonte의 방법과는 다르게 국부영역에서 유한요소를 세분화하지 않으면서, 즉 자유도를 증가시키지 않으면서 공액근사개념 및 반복적 알고리즘을 국부영역에 적용하여 개선된 응력장을 구한다. 이를 간략히 설명하면 다음과 같다.

Fig. 1의 전체영역에 대하여 공액근사법을 적용할 경우 식 (10)의 방정식을 영역별로 구분하여 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서, S^i 는 공액응력을 나타내고 S_i 는 식 (9)에서와 같이 변위기초응력과 형상함수의 내적으로 정의되는 응력의 공액성분이다. 식 (14)에서 외부영역의 변위기초응력장에 근거한 절점의 평균응력(σ_3)이 비교적 충분히 정확하여 공액응력(S^3)과 비슷하다고 가정하고 공액 기저함수의 특성을-즉 공액 기저함수들은 유한요소법의 기저함수들의 선형

적인 관계로 나타내지며 아울러 공액 기저함수들은 기저점에서 멀어질수록 그 크기가 현격히 감소하는 감쇄특성이 있음-고려하면 국부영역 및 경계선(영역)에서 공액응력장은 다음과 같은 방정식에서 얻어질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - C_{23}\sigma_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

식 (15)에서 얻은 절점(i)의 공액응력(S^i)과 형상함수(N_i^*)로 표시되는 유한요소 응력장(σ^*)을 유한요소 평형방정식에 대입하여 요소의 절점력을 계산하면 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma^* = N_i^* S^i \quad (16)$$

$$f_e = \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \quad (17)$$

국부영역 및 경계선(영역)을 포함한 영역의 유한요소들에 대하여 식 (17)을 결합하면 영역내에서 절점력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{element} f_e = \sum_{element} \int_{\Omega_e} [B]^T \sigma^* d\Omega_e \\ &= \sum_{element} \int_{\Omega_e} [B]^T N_i^* d\Omega_e S^i \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)의 절점력은 식 (17)의 유한요소 평형조건에서의 절점력과 일치하지 않으므로 다음과 같은 반복적 알고리즘을 적용한다.

$$(1) \Delta u_i^1 = K_L^{-1} (f_L - f^*) \quad (19)$$

여기서, i -번째 반복계산에서 “힘 불균형의 크기” (L_2 -norm of force imbalance), $\|\Delta f\|_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\|\Delta f\|_i^2 \equiv \int_{\Omega_L} (f_L - f^*)^T \cdot (f_L - f^*) d\Omega$$

또한 i -번째 반복계산에서 “섭동변위장의 크기” $\|\Delta u_i\|$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\|\Delta u_i\|_i^2 \equiv \int_{\Omega_L} (\Delta u_i)^T \cdot (\Delta u_i) d\Omega$$

$$(2) u_i^{1+1} = u_i^1 + \Delta u_i \quad (20)$$

$$(3) \sigma_i^{1+1} = [D] \cdot [B] u_i^{1+1} \quad (21)$$

(4) 식 (17) 및 (18)를 이용하여 영역에서의 절점력을 계산한다.

(5) 식 (21)의 변위기초응력장을 이용하고, 식 (15)의 방법으로 공액응력장을 계산한다.

(6) 식 (13)과 식 (18)에서 절점에서 “섭동변위

장의 크기"가 미리 정해는 값보다 크면 상기 (1)~(5)의 과정을 반복한다.

6. 수치계산 및 검토

국부영역에서 반복적으로 변위장을 개선시키고 아울러 공액근사개념을 사용하여 연속응력장을 개선할 수 있도록 본 연구에서 제안된 방법론을 세가지 예제, 즉 (1) 정해가 잘 알려진 내압을 받고 있는 두꺼운 실린더, (2) 응력집중이 있는 짧은 보, (3) 특이점이 있는 L형 평판문제에 적용하였다.

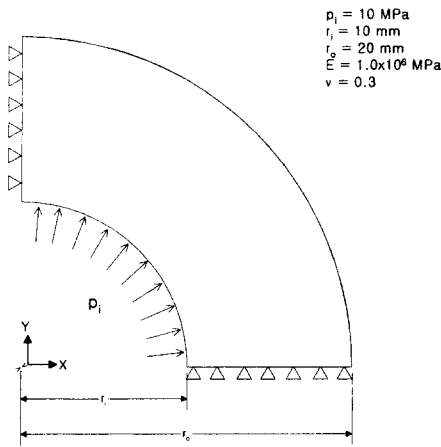


Fig. 2 (a) Thick-walled cylinder.

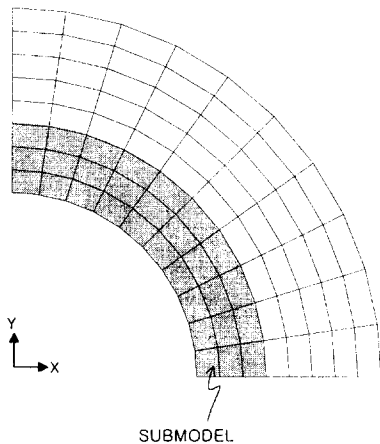


Fig. 2 (b) Finite element model.

6.1 내압을 받는 두꺼운 실린더 문제

Fig. 2(a)는 실린더 해석모델의 영역과 경계조건을 나타낸 것이며 Fig. 2(b)는 사각형 유한요소로 모델링한 유한요소 모델을 보여주고 있다. Fig. 2(b)에서 어둡게 표시된 영역(shaded area)은 국부영역 모델(국부영역내의 유한요소들과 경계영역과 접한 외부영역의 유한요소들을 포함한 모델)을 나타낸 것이다. Fig. 2(b)의 유한요소모델을 평면변형률 문제의 변위형 유한요소법(ANSYS code)으로 해석하여 얻은 연속 변위기초응력장(개개의 유한요소에 대하여 국부 평탄화법을 적용하여 얻은 절점응력들의 평균값에 기초한 연속응력장)과 전체영역 및 국부영역 모델에서 변위장을 개선하여 구한 응력장 그리고 엄밀해에서 얻은 응력장을 비교하였다. Table 1은 Fig. 2(b)의 전체영역 유한요소 모델에 대한 변위형 유한요소해로부터 얻은 실린더 내면의 유한요소층으로부터 외면의 유한요소층까지의 변형률에너지의 밀도를 나타낸 것이며, 이를 이용하여 실린더 내면에서부터 3열까지 유한요소들을 국부영역 모델로 선정하였다.

Table 2는 전체영역 모델에서 반복계산에 따른 전체 변형률에너지의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 반복계산 횟수 0과 1에서의 변형률에너지는 변위형 유한요소해(ANSYS code)의 연속 변위기초응력장에 근거한 값과 공액근사이론을 적용하여 얻은 연속응력장으로부터 구한 값이며, 반복계산 횟수 2부터는 힘평형조건을 만족시키기위해 변위장을 개선하고 아울러 공액근사이론을 적용하여 얻은 연속응력장으로부터 구한 값이다. Table 2에서 보면 변위장이 개선되지 않고 얻어진 공액응력장에서의 변형률에너지(반복계산 회수 1에서의 값)는 변위형 유한요소해(ANSYS code)의 연속 변위기초응력장에 근거한 값(반복계산 회수 0에서의 값)보다 약간 증가하고 있으나 힘평형조건을 만족시키기 위해 변위장을 개선한 이후(반복계산 회수 2이후에서의 값)에 변형률에너지는 급격히 이론해(0.14975E+05)에 수렴하고 있어서 변위장 개선과 공액근사이론을 적용할 경우 영역내에서 응력장이 크게 개선

Table 1 SEDI in the element layer along the radial direction for the thick-walled cylinder.

Element layer from the inner surface	1	2	3	4	5	6	7	8
Strain energy density index (β)	2.937	1.918	1.317	0.945	0.703	0.542	0.430	0.351

Table 2 Variation of total strain energy*, $\|u\|$, vs. iteration numbers.

Iteration number	Thick-walled cylinder		Short cantilever		L-shaped domain	
	$\ u\ _i$	$\frac{\ u\ _i}{\ u\ _{exact}}$	$\ u\ _i$	$\frac{\ u\ _i}{\ u\ _{exact}}$	$\ u\ _i$	$\frac{\ u\ _i}{\ u\ _{exact}}$
0	0.14558E+5	0.97215	0.93340	0.98062	0.15174	0.97475
1	0.14582E+5	0.97376	0.94057	0.98815	0.15312	0.98362
2	0.14892E+5	0.99446	0.94667	0.99456	0.15492	0.99518
3	0.14906E+5	0.99539	0.94732	0.99524	0.15512	0.99647
4	0.14909E+5	0.99559	0.94753	0.99546	0.15521	0.99705
5	0.14910E+5	0.99566	0.94763	0.99557	0.15527	0.99743
6	0.14910E+5	0.99566	0.94769	0.99563	0.15531	0.99769
7	0.14911E+5	0.99573	0.94773	0.99567	0.15534	0.99788
8	0.14911E+5	0.99573	0.94776	0.99570	0.15537	0.99807
9	0.14911E+5	0.99573	0.94778	0.99572	0.15540	0.99827
10	0.14911E+5	0.99573	0.94780	0.99575	0.15542	0.99839
11	0.14912E+5	0.99579	0.94781	0.99576	0.15544	0.99852
$\ u\ _{exact}$	0.14975E+5		0.95185		0.15567	

$$* \|u\|_i \equiv \frac{1}{2} \int \sigma^{*T} \cdot \epsilon^* d\Omega = \frac{1}{2} \int \sigma^{*T} \cdot D^{-1} \cdot \sigma^* d\Omega$$

되고 있음을 보여주고 있다.

Fig. 3은 전체영역 및 국부영역 모델에서 반복적인 변위장 개선 및 공액근사개념을 적용하였을 때 개선된 연속응력장에서 “힘 불균형 크기의 비” ($R_i \equiv \| \Delta f \|_i / \| \Delta f \|_0$)가 반복계산 횟수에 따른 변화를 나타낸 것이다. 여기서, $\| \Delta f \|_0$ 은 변위형 유한요소해의 연속 변위기초응력장으로부터 구한 “힘 불균형 크기”를 나타내며, $\| \Delta f \|_i$ 은 i 번째 반복계산 얻은 연속응력장에 근거한 “힘 불균형 크기”를 나타낸다. Fig. 3에서 보면 반복계산 횟수가 증가함에 따라 R_i 가 전체영역 및 국부영역 모델 모두에서 현격히 감소하다가 수렴하고 있는데 이것은 반복계산 횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음과 수회 이내의 반복계산 횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

Fig. 4는 Fig. 2(b)의 전체영역 및 국부영역 모델에 대하여 응력장을 개선한 결과 실린더 내면에서 원주방향으로 반경방향응력(σ_r)의 분포를 나타낸 것이다. Fig. 4에서 보면 다음의 3가지 사항을 관찰할 수 있다. 첫째, 변위형 유한요소해석에서 얻

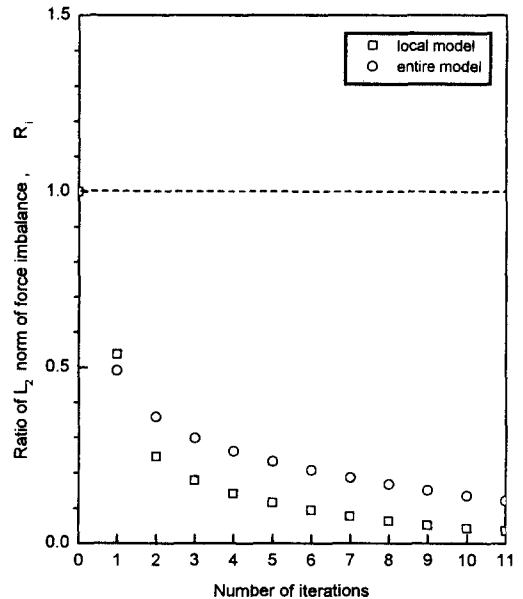


Fig. 3 Ratio of L_2 norm of force imbalance norm vs. iteration numbers for the thick-walled cylinder.

은 반경방향응력은 엄밀해보다 21.53% 작으며, Fig. 2(b)의 모델에 사용된 유한요소보다 요소의

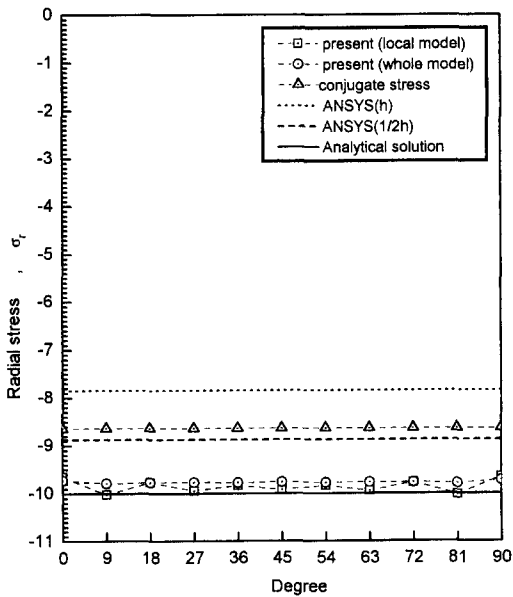


Fig. 4 Variation of the radial stresses along the inner radius.

크기를 1/2로 세분화하여도(절점의 수가 99개에서 357로 증가) 변위형 유한요소해석에서 얻은 반경방향 응력은 엄밀해보다도 11.31% 작은 반면 Fig. 2(b)의 전체영역 및 국부영역 모델에 대하여 본 연구에서 제시한 방법을 적용하여 얻은 응력은 엄밀해에 비하여 최대 3.47% 정도 밖에 차이가 나지 않아서 응력의 정확도가 크게 향상되었음을 알 수 있다. 둘째, 반복적 알고리즘을 사용하지 않고 공액근사개념만을 적용한 경우에 전체영역 모델 및 국부영역 모델의 해석결과를 살펴보면 실린더 내면에서 원주방향으로의 반경방향응력은 엄밀해에 비하여 13.6%정도 작으며, 요소의 크기를 1/2로 세분화한 변위형 유한요소해와는 약 2.3%정도 밖에 차이가 나지 않는다. 이것은 공액근사개념이 경계상에서 응력을 개선시킨다는 예전 연구자들의 연구결과와⁽⁶⁻⁷⁾ 일치하고 있다. 셋째, 국부영역 모델에서 얻은 응력분포는 전체영역 모델에서 얻은 결과와 비교할 때 응력의 크기는 비교적 잘 일치하고 있으나 원주방향(θ)으로 응력값이 약간 진동(oscillation)되는 현상이 발견되었다. 이러한 현상은 공액기저함수의 특성중의 하나로 전체영역 모델에서도 발견되고 있으나 국부영역 모델에서 다소 심화되는 것은 실제로 전체영역 모델에서는 국부영역 모델에 사용된 외부영역의 변위장(u_3) 및 응력

Elastic modulus
 $E = 1.0$
 Poisson's ratio
 $\nu = 0.3$
 Thickness
 $t = 1.0$
 Plane strain condition

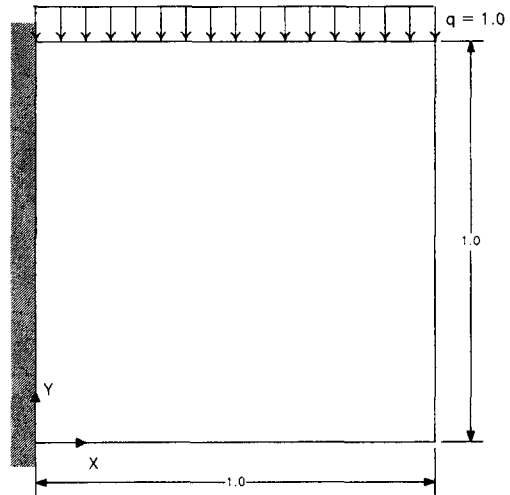


Fig. 5 (a) Short cantilever.

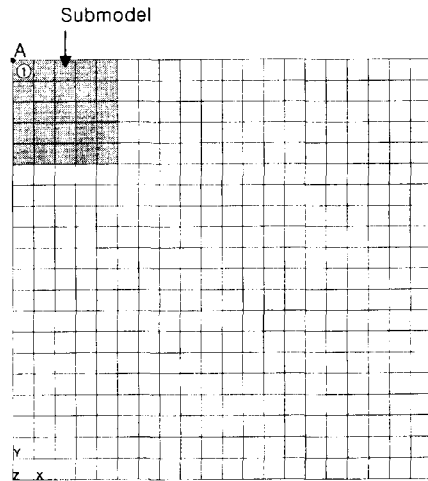


Fig. 5 (b) Finite element model.

장(S^3)이 반복계산시에 변화되고 있으나 본 연구에서의 국부영역 모델에서는 외부영역의 변위장 및 응력장이 고정되어 있다고 가정하여서 기인되는 것으로 추정된다.

한편 본 연구에서 제시한 방법으로 전체영역 및 국부영역 모델에 대한 수치계산 시간을 비교한 결과 R_1 가 R_0 의 10% 이하가 될 때까지 소요된 수치

계산 시간은 CYBER-960으로 계산할 때 전체영역 모델(절점수 99)에서는 316.052초 그리고 국부영역 모델(절점수 44)에서는 7.076초가 소요되고 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법으로 얻은 국부영역에서 응력장은 전체영역 모델에서 얻은 결과와 비견되나 수치계산 시간이 훨씬 줄어들 수 있어서 국부영역에서 응력을 개선하는데 유용하게 이용될 수 있다.

6.2 짧은 외팔보 문제

Fig. 5(a)는 짧은 외팔보 문제의 전체영역과 경계조건을 나타낸 것이며, Fig. 5(b)는 사각형 유한요소로 모델링한 유한요소 모델을 보여주고 있다. Fig. 5(b)의 전체영역 유한요소 모델을 평면변형률 문제의 변위형 유한요소법으로 해석하여 얻은 변형률에너지의 밀도를 정보로 이용하여 선정한 국부영역 모델이 어두운 영역으로 표시되어 있다. Fig. 5(b)에서 ①로 표시된 유한요소에서 변형률에너지 밀도가 최대이며 ($\beta_{max} = 13.855$), 이 유한요소를 주변으로 β 가 2.0이상인 부위를 국부영역으로 선정했다.

Fig. 6은 전체영역 및 국부영역 모델에서 반복적인 변위장 개선 및 공액근사개념을 적용하였을 때 개선된 연속응력장에서 R_i 가 반복계산 횟수에 따른 변화를 나타낸 것이다. Fig. 6에서 보면 반복계산 횟수가 증가함에 따라 R_i 가 전체영역 및 국부영역 모델 모두에서 현격히 감소하고 있는데 이것은 반복계산 횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음을 보여주며, 반복계산 초기에 R_i 가 급격히 감소하고 이후에는 점차로 감소량이 둔화되는 수렴현상을 보여주고 있는데 이것은 수회 이내의 반복계산 횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

Table 2에서 보듯이 반복계산이 진행됨에 따라

응력장으로부터 계산한 변형률에너지가 이론해 (0.95185)⁽²³⁾에 수렴하고 있어서 응력장이 개선되고 있음을 보여주고 있다. 또한 Fig. 5(b)에 A로 표시된 부위에서 최대 수직응력값($\sigma_{x, max}$)이 발생되고 있는데, 전체영역 및 국부영역 모델에서 얻은 최대 수직응력을 비교한 것이 Table 3에 나타나 있다. Table 3을 살펴보면 국부영역 모델에서 얻은 응력값이 전체영역 모델에서 얻은 값에 근접함을 보여준다.

6.3 L형 평판문제

Fig. 7(a)는 L형 평판문제(Re-entrant corner or L-shape domain)의 전체영역과 경계조건을 나타낸 것이며, Fig. 7(b)는 사각형 유한요소로 모델링한 유한요소 모델을 보여주고 있다. Fig. 7(b)의

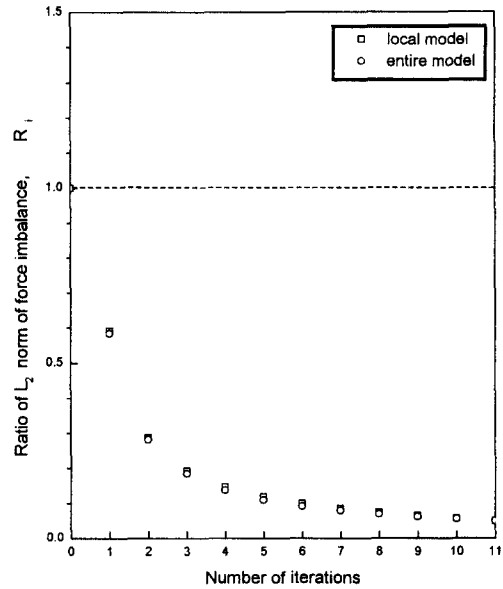


Fig. 6 Ratio of L_2 norm of force imbalance norm vs. iteration numbers for the short cantilever model.

Table 3 Comparisons of maximum normal stress, σ_x , at A for the local and entire model.

	Short cantilever		L-shaped domain	
	Local model	Entire model	Local model	Entire model
Conventional F. E. M.	7.25458	7.25458	6.10603	6.10603
Conjugate approximation	7.89336	8.44189	6.70691	6.70905
Present study	8.70953	8.74296	6.81486	6.98762

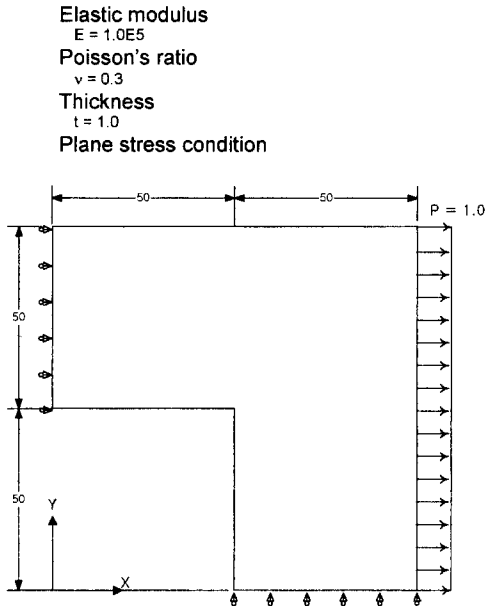


Fig. 7 (a) L-shaped domain.

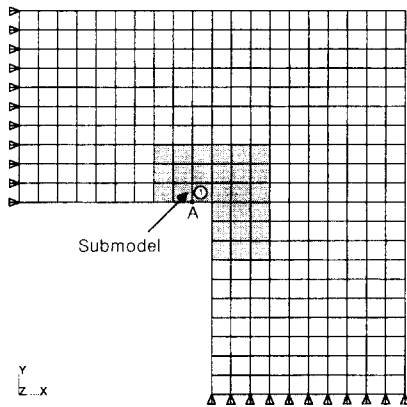


Fig. 7 (b) Finite element model.

전체영역 유한요소 모델을 평면응력문제의 변위형 유한요소법으로 해석하여 얻은 변형률에너지의 밀도를 정보로 이용하여 선정된 국부영역 모델이 어두운 영역으로 표시되어 있다. Fig. 7(b)에서 ①로 표시된 유한요소에서 변형률에너지밀도가 최대이며 ($\beta_{max} = 7.707$), 이 유한요소를 주변으로 국부영역으로 선정했다.

Fig. 8은 전체영역 및 국부영역 모델에서 반복적인 변위장 개선 및 공액근사개념을 적용하였을 때에 개선된 연속응력장에서 R_i 가 반복계산 횟수에 따른 변화를 나타낸 것이다. Fig. 8에서 보면 반복

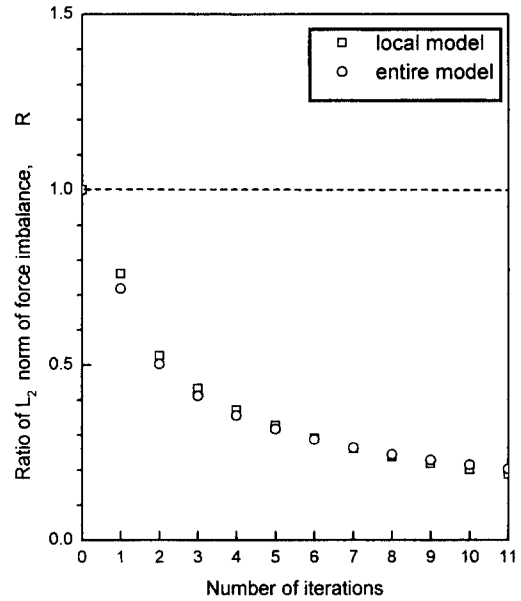


Fig. 8 Ratio of L_2 norm of force imbalance norm vs. iteration numbers for the L-shaped domain.

계산 횟수가 증가함에 따라 R_i 가 전체영역 및 국부영역 모델 모두에서 현격히 감소하고 있는데 이것은 반복계산 횟수가 증가함에 따라 응력장이 원래의 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 개선되고 있음을 보여주며, 반복계산 초기에 R_i 가 급격히 감소하고 이후에는 점차로 감소량이 둔화되는 수렴현상을 보여주고 있는데 이것은 수회 이내의 반복계산 횟수에서도 응력장이 현격히 개선될 수 있음을 보여주고 있다.

Table 2에서 보듯이 반복계산이 진행됨에 따라 응력장으로부터 계산한 변형률에너지가 이론해 (0.15567)⁽²⁴⁾에 수렴하고 있어서 응력장이 개선되고 있음을 보여주고 있다. 또한 Fig. 7(b)에 A로 표시된 부위에서 최대 수직응력값($\sigma_{x, max}$)이 발생되고 있는데 전체영역 및 국부영역 모델에서 얻은 최대 수직응력을 비교한 것이 Table 3에 나타나 있다. Table 3을 살펴보면 국부영역 모델에서 얻은 응력값이 전체영역 모델에서 얻은 값에 근접함을 보여준다.

7. 결 론

변위형 유한요소해에서 구한 변위장을 기초로 하고 국부영역 모델에 대하여 공액근사개념 및 반복

적인 변위장 개선방법을 적용하여 국부영역에서의 응력장이 개선될 수 있는 방법을 제안하였다. 본 연구에서 제안한 방법을 내압을 받는 두꺼운 실린더 문제, 짧은 외팔보문제 그리고 L형 평판문제에 적용한 결과 연속응력장이 전체영역 및 국부영역 모델 모두에서 유한요소 평형방정식을 만족하는 방향으로 또한 변형률에너지가 이론해에 근접하는 방향으로 응력장이 개선되고 있으며, 국부영역 모델에 대한 해석결과가 전체영역 모델의 해석결과와 비교할 때 응력의 정확도가 비견될 수 있을 정도로 근접하고 있을 뿐만 아니라 수치계산에 소요되는 계산시간이 훨씬 줄어들고 있어서 국부영역의 상세 응력해석에 효과적이고 적절하게 이용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1983, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- (2) Im, Jong-Soon, 1993, "Design Sensitivity Analysis of Boundary Stress Constraints for Shape Optimization of Structural Systems," Ph. D Thesis, KAIST.
- (3) Hinton, E., Scott, F. C. and Ricketts R. E., 1975, "Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 235~256.
- (4) Hinton, E. and Campbell, J. S., 1974, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461~480.
- (5) Oden, J. T. and Reddy, J. N., 1973, "Note on an Approximate Method for Computing Consistent Conjugate Stresses in Elastic Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, pp. 1492~1506.
- (6) Brauchli, H. J. and Oden, J. T., 1971, "Conjugate Approximation Function in Finite-Element Analysis," *Quarterly of Applied Mathematics*, No. 1, pp. 65~90.
- (7) Oden, J. T. and Brauchli, H. J., 1971, "On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Approximation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 317~325.
- (8) Oden, J. T., 1972, *Finite Elements of Non-linear Continua*, McGraw-Hill, pp. 54~92.
- (9) Gallagher, Richard, H., 1975, *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice Hall.
- (10) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331~1364.
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 101, pp. 207~224.
- (12) Wieberg, Nils-Eric and Abdulwahab, Fethi, 1993, "Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703~2724.
- (13) Krizek, Michal and Neittaanmoeki, Pekka, 1987, "On Superconvergence Techniques," *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol. 9, pp. 175~198.
- (14) ANSYS *User's Manual for Revision 5.0*, 1992, Swanson Analysis System, Inc.
- (15) Loubignac, G., Cantin, G. and Touzot, G., 1977, "Continuous Stress Field in Finite Element Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 11, pp. 1645~1646.
- (16) Cantin, G., Loubignac, G. and Touzot, G., 1978, "An Iterative Algorithm to Build Continuous Stress and Displacement Solutions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1492~1506.
- (17) Zienkiewicz, O. C., Li, Xi-Kui and Nakazawa, S., 1985, "Iterative Solution of Mixed Problems and the Stress Recovery Procedures," *Communications in Applied Numerical Method*, Vol. 1, pp. 3~9.
- (18) Hwang, W. C. and Sun, C. T., 1987, "Iterative Study for Three-Dimensional Finite Element Stress Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 12,

- Dec., pp. 1636~1638.
- (19) Bathe, K-J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- (20) Febres-Cedillo, Hector, E. and Bhatti, M. Asghar, 1988, "A Simple Strain Energy Based Finite Element Mesh Refinement Scheme," *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 4, pp. 523~533.
- (21) Hsu, T.-S. and Saxena, S. K., 1989, "New Guidelines for Optimization of Finite Element Solutions," *Computers & Structures*, Vol. 31, No. 2, pp. 203~210.
- (22) Jara-Almonte, C. C. and Knight, C. E., 1988, "The Specified Boundary Stiffness/Force SBSF Method for Finite Element Subregion Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1567~1578.
- (23) Ainsworth, M., Zhu, J. Z., Craig, A. W. and Zienkiewicz, O. C., 1989, "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori Error Estimation in the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2161~2174.
- (24) Fish, J., 1992, "The s-Version of the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 3, pp. 539~547.