

3차 등매개 유한요소를 이용한 이종재료 접합면에 수직인 균열의 응력확대계수 평가

임원균* · 정규철** · 송치훈***

(1997년 7월 30일 접수)

Evaluation of Stress Intensity Factor for a Crack Normal to Bimaterial Interface Using Cubic Isoparametric Finite Elements

W. K. Lim, K. C. Jeong and C. H. Song

Key Words : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Bimaterial Interface(이종재료 접합면), Cubic Isoparametric Singular Element(3차 등매개 특이요소), Order of Stress Singularity(응력특이차수), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

When a crack meets bimaterial interface stress singularity depends on the elastic constants of the adjacent materials. In the present study we are going to describe the finite element formulation for problems with a crack to be embedded in the stiffer material ($\mu_2/\mu_1 < 1$). The cubic isoparametric singular element, represented by adequately shifting the mid-side nodes adjacent to the crack tip is constructed to enclose the crack tip. An alternative method to obtain the optimal position of the mid-side nodes of cubic isoparametric elements is presented. In addition, a proper definition for the stress intensity factors of a crack normal to bimaterial interface is provided. It is based upon near a tip displacement solutions. Models for numerical analysis are two dimensional elastic bodies with a through crack under plain strain. The results obtained are compared with the previous solutions.

1. 서 론

두 개의 서로 다른 탄성재료의 접합면에 수직인 균열 선단에서의 응력특이성의 차수는 등방성 재료 내 균열선단에서의 것과는 달리 반드시 0.5는 아니며, 이는 두 재료의 재료특성치에 따라 다르다. 문헌들은^(1~3) 두 재료의 전단 탄성계수와 푸아송비의 비율에 따라서 응력특이성의 차수가 0에서 1까지

변화하고 있음을 보여준다. 이러한 특이성의 차수가 변화하는 문제들에 대하여 정확한 수치 해를 얻기 위해서는 균열선단에서의 정확한 특이성을 나타낼 수 있는 특이요소가 필요하게 된다.

균열선단 요소에 이론적 특이성을 부과하기 위한 연구들은 여러 문헌들에^(4,5) 보고되고 있다. 이들 특이요소들은 균열선단에서 이른바 특이성을 나타낼 수 있도록 하는 아이디어를 제공함으로써 균열선단 주위에 많은 수의 요소분할을 필요로 하고 있지는 않으나, 이들의 형상함수는 인접하고 있는 표준요소와 결합하였을 때 적합조건을 만족하지 못하므로 수렴에 문제를 야기한다. 이러한 문제점을 해

*회원, 명지대학교 기계공학과

**대우중공업(주) 중앙연구소

***명지대학교 대학원

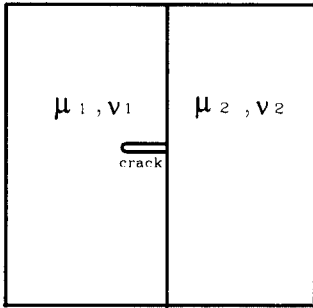


Fig. 1 Crack terminating at the interface.

결하는 방법으로서 표준 유한요소를 이용하는 방법이 제안되었는데, Abdi는⁽⁶⁾ 균열선단을 포함하는 등매개요소의 중간절점의 위치를 적절히 이동하여 놓음으로서 균열선단에서의 변화하는 특이성을 간단히 나타낼 수 있음을 보였으며, 임⁽⁷⁻¹⁰⁾ 등은 균열요소 중간절점의 위치와 응력확대계수를 효과적으로 구할 수 있는 수법 그리고 이의 수법의 경계요소 해석에의 적용을 시도하였다. 이들 요소는 범용 유한요소 프로그램을 손쉽게 적용할 수 있다는 이점을 가지고 있다. 그러나 이와 같은 연구결과들은 해석모델로서의 두 탄성재료 중에 보다 연한재료내에 균열이 내재되어 있는 경우에 대해서만 자세한 해석이 이루어졌다.

따라서 본 연구에서는 균열이 위에서 언급한 바와 반대의 위치 즉, 두 재료중에서 보다 단단한 재료에 내재되어 있는 균열문제를 다룬다. 이 경우에 2차 형상함수로는 균열주위의 변위 이론식을 적절히 나타낼 수 없으므로, 범용 3차 등매개 유한요소의 적용을 시도한다. 이로부터 해석의 단순화를 통한 이의 적용방법과 변화하는 특이성을 나타내기 위한 균열요소 중간절점의 위치를 효율적으로 구할 수 있는 수정된 최소자승법을 제안한다. 또한 균열의 성장을 지배하는 가장 중요한 매개변수는 응력확대계수이고, 이를 정확히 계산한다는 것은 이종재료내 균열의 파괴거동을 정확히 나타낼 수 있는 매우 중요한 과제이므로, 요소 중간절점의 위치를 적절히 이동하여 얻은 균열선단 특이요소로부터 유도된 응력확대계수의 새로운 결정수법의 제안과 함께 이 방법의 유효성을 기존의 결과와 비교검토한다. 아울러 균열선단에서의 특이요소의 크기에 따른 응력확대계수의 정확도에 대하여 서로 검토를 가하고자 한다.

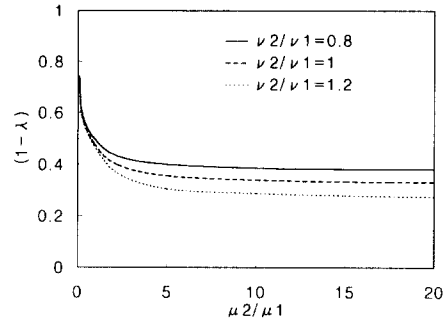


Fig. 2 Stress singular exponent term.

2. 특이 등매개요소의 형성

Fig. 1과 같이 두 개의 서로 다른 탄성재료가 접합되어 있다고 하자. 이 때 이들 두 재료의 접합면에 균열이 수직으로 위치하는 경우, 균열에서의 응력특이차수는 두 재료의 물질특성치에 따라서 변화한다. 이렇게 두 물질의 물질특성치에 따라서 변화하는 응력특이차수 β , 즉 $1-\lambda$ 는 다음의 특성방정식으로부터 얻을 수 있다.⁽²⁾

$$\cos \pi\beta - C_1 - \beta C_2 - \frac{1}{2}\beta(1+\beta) C_3 = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$C_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3(1-m)}{2(1+mx_2)} + \frac{m(1+x_2)}{2(m+x_1)}$$

$$C_2 = \frac{6(m-1)}{1+mx_2}$$

$$C_3 = \frac{4(1-m)}{1+mx_2}$$

$$x_i = 3 - 4\nu_i$$

$$m = \mu_2/\mu_1$$

윗식에서 x_i 는 평면변형률에서 탄성재료 i 에 대한 재료상수로서 $3-4\nu_i$ 이며, m 은 전단 탄성계수 비로서 μ_2/μ_1 이다. 그리고, μ_i 와 ν_i 는 각각 탄성재료 i 에 대한 전단 탄성계수 및 푸아송비를 나타낸다. 식 (1)로부터 응력특이성의 차수는 두 재료의 특성치, 즉 μ_2/μ_1 및 ν_2/ν_1 의 비에 따라 달라짐을 알 수 있으며, 이와같은 변화를 Fig. 2에 도시하였다. 이와 같이 두 이종탄성재료의 특성치의 값에 따라서 변화하는 응력의 특이성은 균열선단을 포함하는 등매개요소의 중간절점의 위치조작에 의하여 손쉽게 나타낼 수 있다.

지금 Fig. 3과 같은 12절점 등매개요소를 생각하

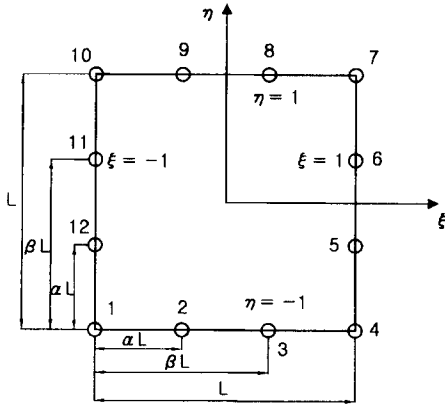


Fig. 3 12-noded cubic element (Q12).

여 보자. 이때 국소좌표 $\eta = -1$ 인 변 1-4를 따르는 x 좌표와 x 방향으로의 변위 u 는 다음과 같이 주어진다.

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (2)$$

여기서, x_i, u_i 는 각각 절점에서의 x 좌표와 x 방향의 변위이고, N_i 는 각 절점에 대한 형상함수로서 이들은 다음과 같이 표시된다.

$$N_1 = \frac{2}{32}(1-\xi)(9\xi^2-1)$$

$$N_2 = \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)$$

$$N_3 = \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)$$

$$N_4 = \frac{2}{32}(1+\xi)(9\xi^2-1) \quad (3)$$

절점 1을 원점으로 하고, 변 1-4의 길이를 L 이라고 표시하면 $x_1=0, x_2=\alpha L, x_3=\beta L, x_4=L$ 이 된다. 따라서 변 1-4를 따르는 x 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)\alpha L + \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)\beta L + \frac{2}{32}(1+\xi)(9\xi^2-1)L \quad (4)$$

또는

$$\frac{x}{L} = \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)\alpha + \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)\beta$$

$$+ \frac{2}{32}(1+\xi)(9\xi^2-1)$$

선단과 제일 가까운 첫 번째 중간절점의 위치 α 를 1/9로, 두 번째 중간절점 β 의 위치를 4/9로 취한 경우에 Pu 등⁽¹¹⁾이 제안한 선형 탄성체내에서의 응력특이성(특이차수 0.5)을 얻을 수 있으며, 이때의 x 좌표 식은 다음과 같이 표시된다.

$$x/L = \frac{(1+\xi)^2}{2} \quad (5)$$

$$\text{또는 } \xi = -1 + 2(x/L)^{1/2}$$

한편 상기 식을 특이차수 λ 를 이용한 다음과 같은 식, 즉

$$x/L = \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{(1/\lambda)} \quad (6)$$

$$\text{또는 } \xi = -1 + 2(x/L)^{\lambda}$$

로 놓을 수 있다고 가정하면, 이 때 변 1-4를 따르는 x 방향의 변위 u 는,

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$= \frac{2}{32}(1-\xi)(9\xi^2-1)u_1 + \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)u_2 + \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)u_3 + \frac{2}{32}(1+\xi)(9\xi^2-1)u_4 \quad (7)$$

로 나타낼 수 있으므로, 상기 식에 식 (6)을 대입함으로써 다음과 같은 변형된 식을 얻는다.

$$u = u_1 + \frac{1}{2}(-11u_1 + 18u_2 - 9u_3 + 2u_4)\left(\frac{x}{L}\right)^\lambda + \frac{9}{2}(2u_1 - 5u_2 + 4u_3 - u_4)\left(\frac{x}{L}\right)^{2\lambda} + \frac{9}{2}(-u_1 + 3u_2 - 3u_3 + u_4)\left(\frac{x}{L}\right)^{3\lambda} \quad (8)$$

이 때 x 방향의 변형률 ϵ_x 는 변위 u 를 x 에 대하여 미분함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\lambda}{2}(-11u_1 + 18u_2 - 9u_3 + 2u_4)x^{\lambda-1} + 9\lambda(2u_1 - 5u_2 + 4u_3 - u_4)x^{2\lambda-1} + \frac{27\lambda}{2}(-u_1 + 3u_2 - 3u_3 + u_4)x^{3\lambda-1} \quad (9)$$

상기 결과 식으로부터 요소변 1-4를 따르는 변형률성분 ϵ_x 는 $r^{\lambda-1}$ 의 특이성, 즉 응력의 특이성을 가지고 있음을 알 수 있다.

3. 균열요소 중간절점위치의 선정법

특이차수 λ 의 함수인 식 (6)을 식 (4)와 같은 3차함수로 근사화 할 수 있다면, Pu 등이 제안한 1/9, 4/9절점 특이요소수법을 차수가 변화하는 이중재료 접합면에 수직인 균열에 대해서도 적용할 수 있다. 이를 위하여 Abdi 등⁽⁶⁾은 일반 최소자승법과 Simplex법을 이용하여 식 (10)의 근사함수를 구하였고, 이들 계수 A_i 와 α , β 와의 관계로부터 Optimization법을 이용하여 중간절점의 최적위치를 구하는 등 다소 번잡한 계산과정을 거치고 있다. 여기서는 위와 같은 계산을 하지 않고서도 보다 간편하게 α , β 값을 결정할 수 있는 수정된 최소자승법을 제안한다.

지금 Y 를 x/L 의 3차 근사식이라고 하면, 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 \quad (10)$$

앞에서 언급하였듯이, Pu 등이 제안한 특이요소형성 수법을 이용하기 위하여 상기식과 식 (4)를 등치하여 놓을 수 있다. 따라서 식 (10)은 다음과 같이 표시된다.

$$Y' = \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)\alpha + \frac{18}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)\beta + \frac{2}{32}(1+\xi)(9\xi^2-1) \quad (11)$$

상기 근사식에서 x/L 의 실제값인 식 (6)과 오차가 최소가 되도록 편차의 제곱의 총합이 최소가 되는 α , β 값을 결정하여야 한다.

지금 편차제곱의 총합 S 를

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{18}{32}(1-\xi_i^2)(1-3\xi_i)\alpha + \frac{18}{32}(1-\xi_i^2)(1+3\xi_i)\beta + \frac{2}{32}(1+\xi_i)(9\xi_i^2-1) - y_i \right]^2 \quad (12)$$

으로 놓았을 때, S 가 최소로 될 필요조건은,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (13)$$

이며 상기 미분으로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^n \frac{9}{16}(1-\xi_i^2)^2(1-3\xi_i)^2\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{9}{16}(1-\xi_i^2)^2(1-9\xi_i^2)\beta = \sum_{i=1}^n y_i(1-\xi_i^2)(1-3\xi_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{16}(1+\xi_i)(9\xi_i^2-1)$$

$$\cdot (1-\xi_i^2)(1-3\xi_i) \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{9}{16}(1-\xi_i^2)^2(1-9\xi_i)^2\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{9}{16}(1-\xi_i^2)^2(1+3\xi_i)^2\beta = \sum_{i=1}^n y_i(1-\xi_i^2)(1+3\xi_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{16}(1+\xi_i)(9\xi_i^2-1) \cdot (1-\xi_i^2)(1+3\xi_i) \quad (15)$$

따라서 α 와 β 의 값은 상기 두 식의 2원 1차 연립 방정식을 풀어서 결정할 수 있으므로, 요소길이가 L 인 균열요소의 중간절점의 최적위치 aL , βL 을 손쉽게 결정할 수 있다. 이들 균열선단 주위 요소 변의 중간절점 이동모양을 Fig. 4에 도시하였다.

4. 응력확대계수 결정법

Fig. 3과 같은 사변형 요소에서 변 1-4을 따르는 x 방향으로의 변위 u 는 식 (8)로부터 얻을 수 있다. 동일한 표현식을 y 방향으로의 변위인 v 에 대하여 나타낼 수 있는데, 이는 다음과 같다.

$$v = v_1 + \frac{1}{2}(-11v_1 + 18v_2 - 9v_3 + 2v_4)\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \frac{9}{2}(2v_1 - 5v_2 + 4v_3 - v_4)\left(\frac{x}{L}\right)^{2\lambda} + \frac{9}{2}(-v_1 + 3v_2 - 3v_3 + v_4)\left(\frac{x}{L}\right)^{3\lambda} \quad (16)$$

균열선단을 좌표의 원점으로 취하면 절점1에서의 변위인 $v_1=0$ 이고, 또한 좌표 x 를 균열선단으로부터의 거리 r 로 놓으면 식 (16)은 다음과 같이 보다 간단히 표시된다.

$$v = \frac{1}{2}(18v_2 - 9v_3 + 2v_4)\left(\frac{r}{L}\right)^4 + \frac{9}{2}(-5v_2 + 4v_3 - v_4)\left(\frac{r}{L}\right)^{2\lambda} \quad (17)$$

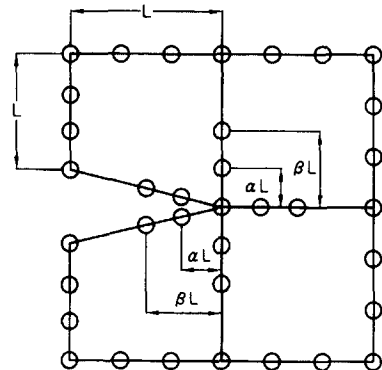


Fig. 4 Displacement of the mid-side nodes.

$$+ \frac{9}{2}(3v_3 - 3v_3 + v_4) \left(\frac{r}{L}\right)^{3\lambda}$$

한편 주어진 응력성분 σ_{ij} 에 따른 균열선단에서의 응력확대계수 K_{ij} 의 이론식은 다음과 같이 정의된다.

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{1-\lambda} \sigma_{ij}(r, \theta) \tag{18}$$

특히 중요한 것은 균열선단과 인접하는 이중재료에서의 y 방향으로의 응력 σ_{yy} 이므로, 균열선단인 $\theta=0$ 에서의 응력확대계수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r^{1-\lambda} \sigma_{ij}(r, 0) \tag{19}$$

$\theta = \pi$ 인 균열면을 따르는 y 방향의 변위 $v(r, \pi)$ 와 응력 $\sigma_{yy}(r, 0)$ 는 다음과 같은 관계를 가진다. ⁽⁴⁾

$$\sigma_{yy}(r, 0) = \frac{2\lambda\mu^* v(r, \pi)}{r}$$

$$\mu^* = \mu_1 m \left[\frac{(1-2\lambda)(m+x_2) + (1+2\lambda)(1+mx_1)}{(m+x_2)(1+mx_1)\sin(\pi\lambda)} \right] \tag{20}$$

여기서, μ^* 는 두재료의 특성치와 특이차수와와의 대수함수이며, μ_1, v_1 과 μ_2, v_2 는 각각 균열을 가진 재료 1과 재료 2에서의 전단탄성계수와 푸아송비이다.

식 (20)을 식 (19)에 대입함으로써 응력확대계수에 대한 식을 변위의 성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \frac{2\sqrt{2}\lambda\mu^* v(r, \pi)}{r^\lambda} \tag{21}$$

상기 식으로부터 $v(r, \pi)$ 에 대하여 정리하면,

$$v(r, \pi) = \frac{K}{2\sqrt{2}\lambda\mu^*} r^\lambda \tag{22}$$

이 된다. 따라서 식 (22)와 식 (17)에서 r^λ 의 계수를 서로 같게 놓음으로써, 균열요소절점에서의 변위값으로부터 응력확대계수를 결정할 수 있는 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_I = \sqrt{2}\lambda\mu^* (18v_2 - 9v_3 + 2v_4) \left(\frac{1}{L}\right)^\lambda \tag{23}$$

5. 계산결과 및 고찰

5.1 요소 중간절점의 위치

이중재료의 접합면에 수직으로 내포되어 있는 균

열이 두 재료중에 보다 탄성계수가 큰 재료에 위치하는 경우, 접합면 상에 위치한 균열선단에서의 특이차수 λ 는 0에서 0.5사이의 값을 가진다. 따라서 이들 λ 의 값에 따른 요소 중간절점의 위치 α, β 를 본 해석에서 제안한 수정된 최소자승법을 이용하여 결정하였으며, 이들 값을 Abdi의 Simplex법과 Optimization법에 의한 해석결과⁽⁶⁾와 함께 Table 1에 나타내었다. 아울러 이들 중간절점 좌표값들로부터 얻을 수 있는 x 좌표식의 근사값을 비교하기 위하여 실제함수인 식 (6)의 결과와 함께 Fig. 5에서 Fig. 8에 도시하였다. 그림에서 실선은 이론식을 나타내며, 나머지 점선들은 근사식들을 나타낸다. 먼저 Fig. 5는 λ 가 0.1746인 작은값을 가지는 경우의 x 좌표값을 나타낸다.

그림에서 보듯이 두 근사식은 서로 비슷한 결과들을 보이고 있으나 두 함수 모두 실제 x 의 좌표값과 다소 벗어나 있으며, 근사적으로 일치하고 있을 뿐이다. 다음으로 특이차수 λ 가 0.3일 때의 x 좌표값을 Fig. 6에 나타내었다. 이 경우 두 근사함수들은 앞서의 결과와는 달리 실제함수와 거의 근접하고 있다. 이 두 그림으로부터, λ 가 작은 값을 가질수록 x 의 3차근사식으로서의 실제함수를 잘

Table 1 α, β values for various λ values.

λ	Present results		Abdi's results	
	α	β	α	β
0.1746	0.0000814	0.0865	0.00126	0.109
0.2	0.00176	0.125	0.0073	0.143
0.3	0.025	0.259	0.015	0.271
0.4	0.065	0.363	0.049	0.377
0.5	0.111	0.444	0.0824	0.462

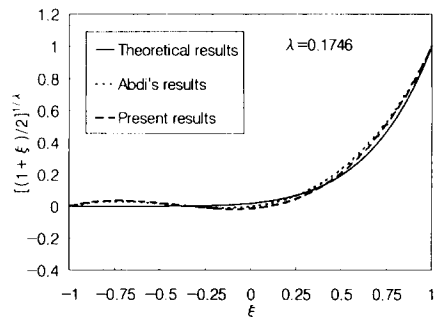


Fig. 5 Approximate values of a theoretical opening displacement.

나타낼 수가 없음을 알 수 있다. 이와 같은 실제함수와의 이탈현상은 λ 가 0에 가까운 값을 가질수록 더욱 심화된다. 이는 λ 가 작은 값을 가질수록 등매개 균열요소에서 균열선단과 바로 이웃하는 중간절점의 위치가 균열선단 좌표와 거의 일치하고 있기 때문인데 (Table 1 참조), 이로부터 요소의 좌표근사식을 3차식으로 나타낸다고 하여도 마치 2차식으로 근사화되는 효과를 보이게 되므로 균열선단 부근의 좌표근사식을 정확히 나타낼 수가 없게 된다. 따라서 이 경우에는 3차식보다 고차의 근사식이 요구된다고 하겠다. Fig. 7은 $\lambda=0.4$ 인 경우의 계산결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 λ 의 값이 커질수록 근사함수들은 실제함수와 거의 일치함을 보인다. 그러나 두 근사함수 중에서도 본 해석 과정으로부터 얻은 함수는 실제함수와 거의 일치하는 반면에 Abdi에 의한 해석결과는 실제함수로부터 다소 이탈하는 경향을 보인다. 이와같은 현상은 λ 가 0.3인 값을 가진 경우인 Fig. 6에서부터 차츰 나타나기 시작했는데, 특이차수 λ 가 0.5인 경우에는 0.4에서보다도 실제함수로 부터의 이탈현상이

더욱 크게 나타남을 알 수 있다 (Fig. 8). 그러나 이 경우에서도 본 해석으로부터 얻은 결과들은 실제함수와 완전히 일치함을 보인다.

이상의 계산결과로부터 본 해석방법은 변화하는 균열의 특이성을 나타내기 위한 요소의 중간절점 위치를 구하는 과정에서 단순화를 이룰 수 있으며, 보다 정확한 근사해를 얻을 수 있는 유효성을 가지고 있음을 알 수 있다.

5.2 응력확대계수

수치해석을 위한 모델로서는 Tracey와 Cook⁽⁴⁾에 의하여 해석된 Fig. 9와 같은 단순 평면변형률 상태하에서의 균열문제를 고려하였다. 그림에서와 같이 균일압력 σ_0 를 받는 균열이 알루미늄판에 존재하며, 이는 에폭시와의 접합면에 수직으로 위치하고 있다. 이들 재료의 특성치들은 알루미늄에 대한 전단탄성계수 μ_{Al} 과 푸아송비 ν_{Al} 이 각각 2.652×10^7 kN/m²와 0.3 그리고 에폭시에 대한 값들은 각각 1.149×10^6 kN/m²와 0.35이다. 이런 균열문제에서 전단탄성계수비 $\mu_{Ep}/\mu_{Al}=0.043$ 이며, 특이차수 $\lambda=0.1746$ 의 값을 가진다. 해석모델은 균열선을 따라서 서로 대칭이므로 1/2평판만을 고려하

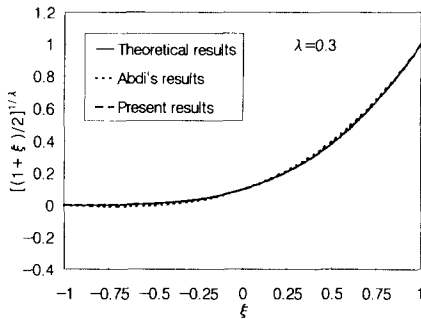


Fig. 6 Approximate values of a theoretical opening displacement.

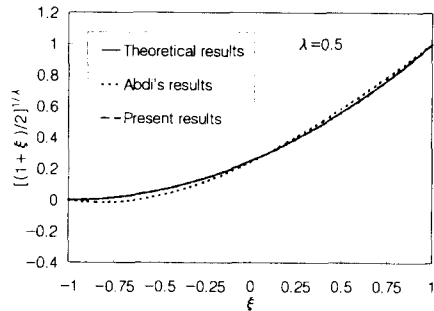


Fig. 8 Approximate values of a theoretical opening displacement.

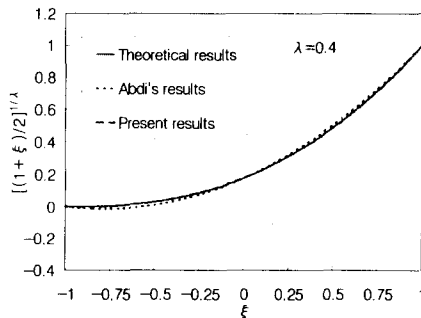


Fig. 7 Approximate values of a theoretical opening displacement.

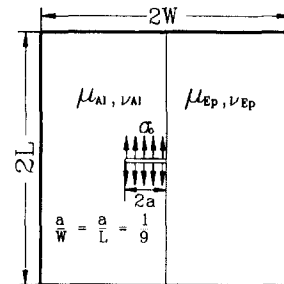


Fig. 9 Finite crack perpendicular to the interface.

였으며, 수치해석을 위한 분할요소로는 표준 3차 등매개 유한요소를 사용하였고, 균열요소로는 앞에서 언급한 3차 등매개요소에서 중간절점의 위치를 적절히 이동시켜 놓음으로써 특이성을 나타내도록 하였다. 아울러 강성행렬을 구하기 위한 수치적분에서는 3×3 가우스적분법을 채택하였다. Fig. 10은 수치해석을 위한 1/2평판의 유한요소 분할모습을 보여준다. 해석모델은 균열요소 2개를 포함하여 200개로 분할하였다.

균열요소의 크기가 응력확대계수의 결정에 미치는 영향을 검토하기 위하여 요소의 크기 L/a 를 0.02에서 0.4까지 변화시켜 주어가며 해석을 수행하였다. 응력확대계수의 결정을 위하여 균열면에서의 단일절점변위 이용법인 식 (21)과 균열요소 균열면상에 있는 3개의 절점변위 이용법인 식 (23)을 이용하였다. 계산된 응력확대계수값 K_I 은 $\sigma_0 a^{1-\lambda}$ 로 나누어줌으로서 무차원화된 값으로 표시하였으며, 이들 값은 특이적분식을 이용한 K_I 값 (4)과 비교하였다.

Fig. 11에서 Fig. 13까지는 균열요소의 크기 L/a 를 각각 0.02, 0.04 그리고 0.1로 변화시켜 주었을

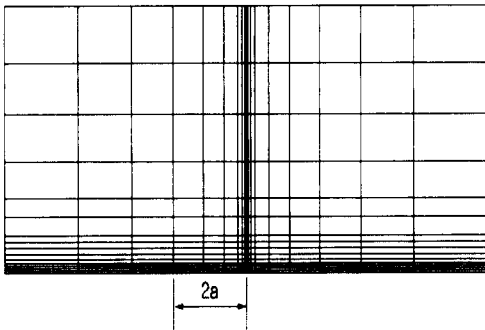


Fig. 10 Finite element discretization.

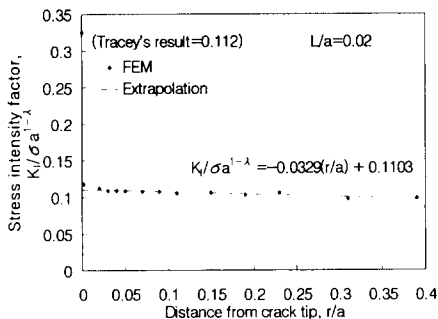


Fig. 11 Stress intensity factor evaluation by one-point formula.

때의, 균열선단으로부터의 무차원화된 거리 $r/a=0.4$ 에 이르기까지의 균열면상에 있는 절점변위들을 이용한 응력확대계수의 계산된 값들을 나타낸다. 그림에서 보듯이 균열선단과 바로 인접하는 절점변위값으로부터 얻어진 K_I 값을 제외하고서, 그 외에 균열선단 주위의 절점변위로부터 얻어진 무차원화된 K_I 값은 이론치인 0.112에 가까운 값들을 보이고 있다. 더욱이 이 계산된 값들은 균열요소의 크기에 크게 상관없이 서로 비슷한 결과를 보이고 있는데, 균열선단으로부터 거리 r/a 이 0.1인 범위 내의 절점변위들을 이용하는 경우에는 이론치와 약 5%이내의 오차를 나타낸다. 그림에서 균열선단과 바로 인접한 부근에서의 큰 오차는 특이차수 λ 가 0.1746의 값을 가지는 경우에 3차 등매개 균열요소가 균열선단에서의 좌표의 근사식을 정확히 나타내주지 못하기 때문인데, 이에 따라서 접합면 균열선단에서의 급격히 변화하는 하중방향으로의 변위를 제대로 나타낼 수가 없게 된다. 이와 같은 변위의 급격한 변화는 접합면 균열에서의 특이차수 λ 가 작은 값을 가질수록 더욱 가파르게 나타난다. 따라서 균열 특이차수 λ 가 0에 가까운 값을 가지는 균

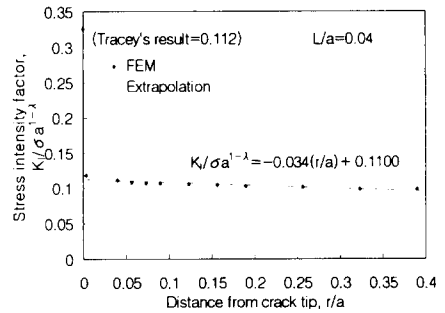


Fig. 12 Stress intensity factor evaluation by one-point formula.

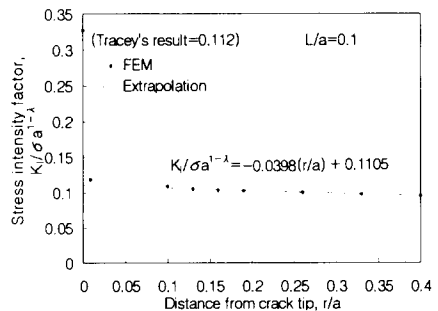


Fig. 13 Stress intensity factor evaluation by one-point formula.

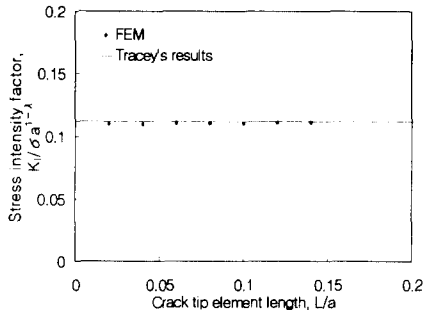


Fig. 14 Stress intensity factor evaluation by displacement extrapolation.

열문제일수록 3차 등매개 균열요소를 이용한 해석으로부터 K_I 의 결정을 위해서는 균열선단과 바로 인접한 요소가 아닌, 그 다음으로 인접하는 요소에서의 절점변위값을 이용하는 것이 보다 효율적인 K_I 의 결정방법이라고 할 수 있다.

위에서 언급한 바와 같은 문제의 근본적 해결을 위해서는 보다 고차인 4차이상의 균열요소가 필요할 것이다. 그러나 이 경우에는 고차 균열요소의 정식화와 유한요소 프로그램의 작성이 매우 복잡해 지므로 비현실적이다. 이와 같은 균열선단에서의 오차를 극복하면서 보다 정확한 $r=0$ 에서의 K_I 값을 구하기 위하여 3차 등매개요소를 적용한 해석결과로부터 변위 외삽법(displacement extrapolation)을 적용하여 보았다. 앞에서 언급한 그림에서 점선들은 외삽을 위한 근사직선을 나타낸다. 균열선단과 인접한 절점에서의 K_I 의 값은 거리 r 에 따른 선형관계로부터 많이 벗어남으로, 외삽에 있어서 균열요소를 이루는 절점에서의 K_I 값은 제외시켰다. 균열요소길이 L/a 를 0.02에서 0.14에 이르기까지 변화시켜 주어가며 외삽법에 의한 K_I 값을 구하였으며, 이의 결과를 Fig.14에 나타내었다. 그림에서 보듯이 계산된 K_I 값은 균열요소 크기에 크게 상관하지 않으면서 이론치에 거의 근접하는 값들을 보이고 있다. 이의 수법은 특이차수 λ 가 0에 가까운 작은 값을 가질수록 더욱 유효할 것이다. 이와 같이 특이차수가 변화하는 균열문제에서도 등매개요소의 해석을 통한 변위외삽법은 응력확대계수를 구할 수 있는 효율적인 수법임을 확인할 수 있다.

다음은 본 해석에서 제한한, 균열요소 균열선상의 3개 절점변위값의 상관관계를 이용한 관계식을 적용하여 응력확대계수를 구하였으며, 균열요소의

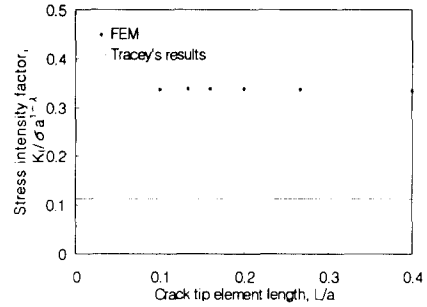


Fig. 15 Stress intensity factor evaluation by three-point formula.

크기에 따른 이의 결과를 Fig.15에 나타내었다. 그림에서 보듯이 이의 해석결과는 이론해와 상당한 오차를 보이고 있다. 이는 앞에 설명하였듯이 특이차수가 0과 가까운 작은 값을 가지는 경우에 나타나는 접합면 균열선단 부근에서의 급변하는 변위분포를 3차 등매개 형상함수로서 정확히 나타낼 수 없기 때문인데, 특이차수 λ 가 0.3이상의 큰 값을 가지는 경우에는 등매개 균열요소에서 균열선단을 나타내는 절점과 바로 이웃하는 중간절점의 위치가 떨어져서 존재하게 되고, 접합면 균열선단에서의 실제변위분포 또한 다소 완만해지므로 3차 등매개 요소로서 균열선단에서의 변위분포를 충분히 나타낼 수 있을 것이다. 이와 같은 경우에 응력확대계수를 구하는 본 결정수법은 효율적인 방법이 될 수 있을 것이다.

6. 결 론

균열내암을 받고 있는 이종재료 접합면에 수직인 균열이 두 재료중에 보다 탄성계수가 큰 재료에 내재되어 있는 균열문제(특이차수 λ 는 $0 < \lambda < 0.5$ 의 값을 가짐)에 대하여 3차 등매개 유한요소를 적용하는 연구에서, 균열선단에서의 변화하는 특이성포시를 위한 3차 등매개 균열요소의 중간절점의 위치를 간단히 구할 수 있는 방법을 제시하였으며, 이는 균열선단 부근에서의 좌표값의 계산과정과 정확도면에서 기존의 결정방법보다도 우수함을 확인하였다.

균열요소인 3차 등매개 형상함수로서는 특이차수 λ 가 0.3 이상의 비교적 큰 값을 가질 때에 균열선단부근에서의 좌표값을 정확히 나타내 줄 수 있으며, λ 가 0에 가까운 값을 가질수록 3차함수로는

부족하며, 이때에는 보다 고차의 요소가 필요하다. 따라서 균열선단에서의 응력확대계수를 구하는데 있어서 본 연구에서 제안한 균열면에서의 3절점 변위이용법은 특이차수가 0.3이상인 값을 가지는 균열문제에서 효율적인 수법이 될 수 있을 것이다. 특히 특이차수가 작은 값을 가지는 경우, 즉 균열선단에서의 변위가 급변하는 균열문제에 대하여 3차 등매개 유한요소해석으로부터 변위외삽을 이용한 응력확대계수의 결정은 효율적인 방법임을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1996년도 교육부 학술연구조성비(ME 96-C-05)에 의하여 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Williams, M. L., 1952, "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates of Extension," *J. Appl. Mech.*, Vol. 19, *Trans. ASME*, Vol. 74, SeriesE, pp. 526~528.
- (2) Lu, M. C. and Erdogan, F. 1983, "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface. I -Analysis," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 18, pp. 491~506.
- (3) Cook, T. S. and Erdogan, F., 1972, "Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface," *Int. J. Engng. Science*, Vol. 10, pp. 677~697.
- (4) Tracey, D. M. and Cook, T. S., 1977, "Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 1225~1233.
- (5) Staab, G. H., 1983, "A Variable Power Singular Element for Analysis of Fracture Mechanics Problem," *Comput. Struct.*, Vol. 17, pp. 449~457.
- (6) Abdi, R. EI and Valentin, G. V., 1989, "Isoparametric Elements for a Crack Normal to the Bimaterial Between Two Bonded Layers", *Comput. Struct.*, Vol. 33, pp. 241~248.
- (7) 임원균, 김상철, 이창수, 1993, "유한요소법에 의한 이종재료 접합면에 수직인 균열의 응력확대계수 결정," 제17권, 제10호, pp. 2398~2406.
- (8) Lim, W. K. and Kim, S. C., 1994, "Further Study to Obtain a Variable Power Singularity Using Quadratic Isoparametric Elements," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 47, pp. 223~228.
- (9) Lim, W. K. and Lee, C. S., 1995, "Evaluation of Stress Intensity Factors for a Crack Normal to Bimaterial Interface Using Isoparametric Finite Elements," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 52, No. 1, pp. 65~70.
- (10) 임원균, 이현규, 1996, "이종재료 접합면에 수직인 균열의 경계요소해석," 전산구조공학화논문집, 제8권, 제1호, pp. 93~99.
- (11) Pu, S. L., Hussain, M. A. and Lorensen, W. E., 1978, "The Collapsed Cubic Isoparametric Element as a Singular Element for Crack Problems," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 1727~1742.