

집중질량과 초기 비틀림각을 갖는 회전블레이드의 진동해석

곽주영* · 유흥희**

(1997년 7월 11일 접수)

Vibration Analysis of a Pretwisted Rotating Blade with a Concentrated Mass

Joo Young Kwak and Hong Hee Yoo

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Pretwisted(초기 비틀림각을 갖는), Rotating Blade(회전블레이드), Concentrated Mass(집중질량), Natural Frequency Loci Veering(고유진동수 궤적 휨), Mode Shape Variations(모드형상변화)

Abstract

Equations of motions of a pretwisted rotating blade with a concentrated mass in an arbitrary position are derived. The flapwise and chordwise equations are coupled to each other due to the pretwist angle of the blade. As the angular speed, hub radius ratio, pretwist angle and concentrated mass vary, the vibration characteristics of the blade change. It is found that eigenvalue loci veering phenomena occur between two closing loci due to the pretwist angle. The effect of the pretwist angle on the critical angular speed and location of the concentrated mass on the natural frequencies are also investigated.

1. 서 론

회전운동을 하는 블레이드형태의 구조물은 각종 터빈이나 터보기계, 그리고 항공기의 회전익 등에서 찾아볼 수 있다. 이러한 구조물들을 새로 설계하거나 혹은 기존의 성능을 평가하고 개선시킴에 있어서 그 진동특성의 정확한 예측은 필수적이라 말할 수 있다. 통상 구조물의 회전운동은 원심방향 관성력으로 인한 시스템 강성변화를 초래하여 그 진동 특성을 현격하게 변화시킨다. 따라서 이러한 변화의 정확한 예측을 위한 많은 연구가 이루어져 왔다.

회전운동을 하는 외팔보의 진동에 관해서는 1920년에 Rayleigh Energy 평형이론을 이용하여 고유진동수 변화를 예측하는 방법⁽¹⁾이 최초로 소개되었

다. 그 후 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 직접 유도하고, 이에 Ritz방법을 적용해서 앞서 제시된 고유진동수 예측을 위한 방법에 사용되는 방정식의 계수를 더 정확하게 구하는 방법⁽²⁾이 제시되었다. 전산기의 발전은 굽힘진동 방정식에 근사화방법을 적용, 행렬 고유치 문제를 유도하고 이를 수치적으로 해석하는 방법들을^(3, 4) 가능하게 하였다. 이러한 수치해석방법은 더욱 복잡한 형태의 보의 해석을 가능하게 하였다. 예를들어, 끝단질량을 가진 회전 외팔보의 해석방법들이나^(5, 6) 고정단의 단성 변형효과와 보 단면의 변화까지 고려한 해석방법⁽⁷⁾ 그리고 전단변형까지 고려한 방법⁽⁸⁾ 등이 연구 발표되었다. 또한 보의 초기 비틀림각을 고려한 연구 결과도⁽⁹⁾ 발표되는 등 다양한 형상과 효과들을 고려한 연구들이 계속 발표되고 있다.

본 논문에서는 자유단 단면이 고정단의 단면에 비해 초기 상태에서 비틀림을 갖는 블레이드가 임의의 위치에 집중질량을 갖는 경우의 진동특성을

*회원, 한양대학교 대학원

**회원, 한양대학교 기계공학부

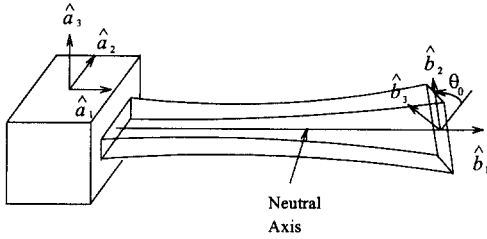


Fig. 1 Pretwisted configuration of a blade.

연구하는데 목적을 두었다. 본 연구는 참고문헌 (9)에서 제시된 초기 비틀림각을 갖는 회전 외팔보의 모델링에 근거하였으며 여기에 참고문헌 (6)에 제시된 집중질량의 모델링을 종합하여 블레이드의 길이에 대한 축반경비, 회전각속도, 비틀림각, 집중질량의 크기 및 위치 등에 의한 진동특성변화를 종합적으로 조사하였다는 점에 그 고유성을 갖는다.

2. 진동방정식 유도

Fig. 1은 변형물없이 초기 비틀림각을 갖는 블레이드의 형상을 나타낸다. 그림에서 블레이드의 탄성축과 중심축은 동일 선상에 위치한다. 그림에서 θ_0 는 블레이드의 변형이 없을 때 자유단의 단면이 고정단의 단면에 비해 비틀린 각도를 나타낸다. 고정단에서 자유단까지 비틀림은 균일하게 발생한다. 그림에서 \hat{a}_1 과 \hat{b}_1 은 일치하며 \hat{a}_2 와 \hat{b}_2 혹은 \hat{a}_3 와 \hat{b}_3 는 서로 θ_0 의 각을 이룬다. Fig. 2는 탄성축상의 점들의 변형시 위치변화를 나타낸다. 탄성축상에 위치한 임의의 질점 P_0 가 변형후 P 의 위치로 움직일 때 그 변위를 \vec{u} 로 나타내고 있는데, 그 \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{a}_3 방향 성분은 각각 u_1 , u_2 , u_3 로 나타내고 있다. 또한 s 는 임의의 질점에서 인장된 길이를 나타낸다. 연속체의 근사화된 운동방정식을 구하기 위해 s , u_2 , u_3 를 다음과 같이 가상모드를 이용하여 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (1)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (2)$$

$$u_3(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \quad (3)$$

여기서, ϕ_{1j} , ϕ_{2j} , ϕ_{3j} 와 q_{1j} , q_{2j} , q_{3j} 는 s , u_2 , u_3 를 나타내기 위한 가상모드함수들과 일반좌표들

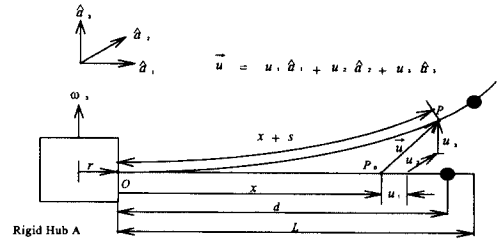


Fig. 2 Neutral axis configuration of a blade with a concentrated mass.

이며, μ_1 , μ_2 , μ_3 는 각각의 개수들이다. 탄성체의 변위를 근사화할 때는 s 가 아닌 u_1 이 사용되는 것이 일반적이나, 선형 동적 모델링을 통해 회전에 의한 강성화 효과를 정확히 예측하기 위해서는 식 (1)에서와 같이 s 를 근사화하는 방법이 사용되고 있다(참고문헌 (10) 참조).

Fig. 2에서 반경 r 인 축 A 가 \hat{a}_3 방향으로 일정한 속력 ω_3 로 회전할 때 A 의 각속도와 O 점의 속도는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (4)$$

$$\vec{v}^O = r\omega_3 \hat{a}_2 \quad (5)$$

이때 P 점의 속도 \vec{v}^P 는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{v}^P = (\dot{u}_1 - \omega_3 u_2) \hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + (x+r+u_1)\omega_3] \hat{a}_2 + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (6)$$

식 (6)에서 u_1 은 근사화를 위해 최종적으로 s 와 u_2 로 나타내야 하며, 이를 위하여 다음의 근사화된 관계식이 유도되어(참고문헌 (10) 참조) 사용되어진다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma \quad (7)$$

속도 \vec{v}^P 를 이용하면 시스템의 운동방정식은 다음식으로부터 유도될 수 있다.

$$\int_0^L \rho \vec{a}^P \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{ij}} \right) dx + \frac{\partial U}{\partial q_{ij}} = 0 \quad (8)$$

($i=1, 2, 3$), ($j=1, 2, \dots, \mu_i$)

여기서, L 과 ρ 는 블레이드의 길이와 단위길이당 질량을 각각 나타내며, U 는 탄성에너지로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI_3 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + EI_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx$$

$$+ 2EI_{23} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) dx \quad (9)$$

여기서, E 는 블레이드의 영계수, A 는 단면적이다. 임의 단면에서 블레이드의 2차면적 모멘트와 프로덕트를 나타내는 I_2 , I_3 와 I_{23} 를 주면적 모멘트 I_2^* 와 I_3^* 로 나타내면

$$I_2(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} + \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\theta) \quad (10)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^* + I_3^*}{2} - \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \cos(2\theta) \quad (11)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^* - I_3^*}{2} \sin(2\theta) \quad (12)$$

$$\theta \equiv \theta_0 \frac{x}{L} \quad (13)$$

여기서, θ 는 블레이드의 임의의 단면에서 비틀림각을 나타내며, 따라서 블레이드의 고정단에서 $\theta=0$ 블레이드의 자유단에서 $\theta=\theta_0$ 이다. 이상의 식들을 이용하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} (K_{ij}^S - \omega_3^2 M_{ij}^{11}) q_{1j} - 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} = P_{1i} \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} K_{ij}^{B23} q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (K_{ij}^{G2} + K_{ij}^{B2} - \omega_3^2 M_{ij}^{22}) q_{2j} = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{B32} q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{G3} + K_{ij}^{B3}) q_{3j} = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$M_{ij}^{ab} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^{Ga} \equiv r\omega_3^2 \left[\int_0^L \rho (L-x) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \right] + \omega_3^2 \left[\int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \right] \quad (18)$$

$$K_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i}' \phi_{1j}' dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^{B2} \equiv \int_0^L EI_3 \phi_{2i}'' \phi_{2j}'' dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^{B3} \equiv \int_0^L EI_2 \phi_{3i}'' \phi_{3j}'' dx \quad (21)$$

$$K_{ij}^{Bab} \equiv \int_0^L EI_{23} \phi_{ai}'' \phi_{bj}'' dx \quad (22)$$

$$P_{1i} \equiv r\omega_3^2 \int_0^L \rho \phi_{1i} dx + \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx \quad (23)$$

블레이드의 임의의 지점에 집중질량이 추가로 붙어 있는 것을 모델링하기 위해 블레이드의 단위길이당 질량을 나타내는 ρ 를 임의의 지점 $x=d$ 에서 충격함수(Dirac's delta function)로 가정하고, 방정식에서 ρ 와 관련된 항들을 다시 구하면 다음과 같다.

$$\widehat{M}_{ij}^{ab} \equiv M_{ij}^{ab} + m \phi_{ai}(d) \phi_{bj}(d) \quad (24)$$

$$\widehat{K}_{ij}^{Ga} \equiv K_{ij}^{Ga} + m(d+r) \omega_3^2 \int_0^d \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \quad (25)$$

$$\widehat{P}_{1i} \equiv P_{1i} + m(d+r) \omega_3^2 \phi_{1i}(d) \quad (26)$$

여기서, m 은 임의의 지점에 위치한 집중질량의 크기를 나타낸다.

블레이드의 인장방향 고유진동수와 굽힘방향 고유진동수는 그 차이가 크므로 이들의 연성에 의한 효과는 무시될 수 있으므로 본 논문에서는 그 효과를 무시하고 수치해석을 하였다. 그러나 고속회전시는 이러한 효과가 주요 변수로 작용할 수 있으며 이에 대한 연구결과는 참고문헌 (11)을 참조할 수 있다. 연성 효과를 무시할 때 집중질량을 고려한 항들을 식 (14~16)에 대입하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \widehat{M}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (\widehat{K}_{ij}^{G2} + K_{ij}^{B2} - \omega_3^2 \widehat{M}_{ij}^{22}) q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} K_{ij}^{B23} q_{3j} = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \widehat{M}_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (\widehat{K}_{ij}^{G3} + K_{ij}^{B3}) q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{B23} q_{2j} = 0 \quad (28)$$

일반성있는 결과를 얻으려면, 운동방정식을 무차원화하는 것이 좋으며, 이를 위해서 다음과 같은 무차원 변수들과 매개변수들을 정의한다.

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (29)$$

$$\vartheta_{ai} \equiv \frac{q_{ai}}{L} \quad (30)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (31)$$

$$\beta \equiv \frac{d}{L} \quad (32)$$

$$\gamma \equiv \omega_3 T \quad (33)$$

$$\alpha \equiv \frac{m}{\rho L} \quad (34)$$

$$x \equiv \frac{I_2^*}{I_3^*} \quad (35)$$

식 (33)에서 T 는 다음과 같은 변수이다.

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI_3^*}} \quad (36)$$

식 (35)를 이용하면, 식 (10)~(12)는

$$\frac{I_2(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)\cos(2\theta_0\xi) \quad (37)$$

$$\frac{I_3(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)\cos(2\theta_0\xi) \quad (38)$$

$$\frac{I_{23}(x)}{I_3^*} = \frac{1}{2}(x-1)\sin(2\theta_0\xi) \quad (39)$$

이상의 관계식들을 이용하여 식 (27)과 (28)을 무차원화된 방정식들로 만들면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [\overline{M}_{ij}^{22} \ddot{\vartheta}_{2j} + \{ \overline{K}_{ij}^{B2} + \gamma^2 (\overline{K}_{ij}^{GA2} + \alpha(\beta + \delta) \overline{K}_{ij}^{CB2} - \overline{M}_{ij}^{22}) \} \vartheta_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_3} \overline{K}_{ij}^{B23} \vartheta_{3j} = 0 \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} [\overline{M}_{ij}^{33} \ddot{\vartheta}_{3j} + \{ \overline{K}_{ij}^{B3} + \gamma^2 (\overline{K}_{ij}^{GA3} + \alpha(\beta + \delta) \overline{K}_{ij}^{CB3}) \} \vartheta_{3j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} \overline{K}_{ij}^{B32} \vartheta_{2j} = 0 \quad (41)$$

여기서,

$$\overline{M}_{ij}^{ab} \equiv \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi + \alpha \psi_{ai}(\beta) \psi_{bj}(\beta) \quad (42)$$

$$\overline{K}_{ij}^{B2} \equiv \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \psi_{2i}'' \psi_{2j}'' d\xi \quad (43)$$

$$\overline{K}_{ij}^{B3} \equiv \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \psi_{3i}'' \psi_{3j}'' d\xi \quad (44)$$

$$\overline{K}_{ij}^{GAa} \equiv \int_0^1 \left[\delta(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right] \psi_{ai}' \psi_{aj}' d\xi \quad (45)$$

$$\overline{K}_{ij}^{CBa} \equiv \int_0^\beta \psi_{ai}' \psi_{aj}' d\xi \quad (46)$$

$$\overline{K}_{ij}^{Bab} \equiv \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)\sin(2\theta_0\xi) \psi_{ai}'' \psi_{bj}'' d\xi \quad (47)$$

식 (40~47)에서 $\alpha=0$, $\beta=1$ 이면 참고문헌⁽⁹⁾에서 유도한 방정식과 같으며, $\theta_0=0$, $x=1$ 이면 참고문헌⁽⁶⁾에서 유도한 방정식과 동일함을 알 수 있다.

식 (40)과 (41)에서 ϑ_{2j} 와 ϑ_{3j} 로 구성된 column 벡터를 ϑ 라 하고, 이 벡터를 시간에 대한 조화함수로 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

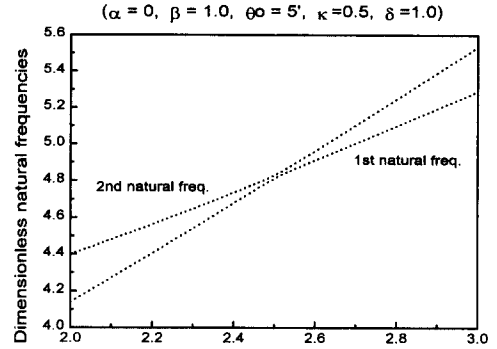
$$\vartheta = e^{j\omega\tau} \underline{\eta} \quad (48)$$

여기서, ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원 변수이며, $\underline{\eta}$ 는 각 모드형상들을 대표하는 column 벡

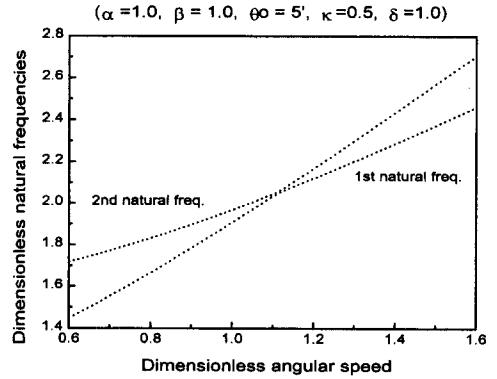
터이다. 식 (48)을 이용하면 식 (40)과 (41)은 다음과 같이 종합된 식으로 표현할 수 있다.

$$\omega^2 \underline{M} \underline{\eta} = \underline{K} \underline{\eta} \quad (49)$$

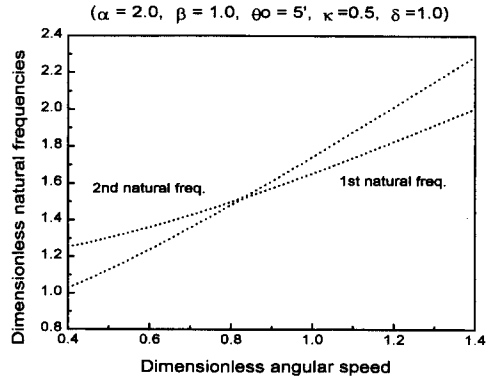
여기서, \underline{M} 과 \underline{K} 는 대칭 정방행렬들로 그를 구성하는 행렬요소들은 다음과 같다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 Veering between 1st & 2nd natural frequencies.

$$M = \begin{bmatrix} \overline{M}^{22} & 0 \\ 0 & \overline{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$K = \begin{bmatrix} \overline{K}^{22} & \overline{K}^{23} \\ \overline{K}^{32} & \overline{K}^{33} \end{bmatrix} \quad (51)$$

여기서,

$$\overline{M}^{22} = [\overline{M}_{ij}^{22}] \quad (52)$$

$$\overline{M}^{33} = [\overline{M}_{ij}^{33}] \quad (53)$$

Table 1 Comparison of natural frequencies. ($\alpha=0, \beta=1, \theta_0=30^\circ, \kappa=1/400, \delta=2/3$)

		1st.	2nd.
$\gamma=0.0000$	Ref. (14)	0.1766	1.0001
	Present	0.1763	0.9825
$\gamma=0.0882$	Ref. (14)	0.2217	1.0273
	Present	0.2200	1.0203
$\gamma=0.1763$	Ref. (14)	0.3166	1.1321
	Present	0.3157	1.1253
$\gamma=0.2645$	Ref. (14)	0.4277	1.2852
	Present	0.4288	1.2796

Table 2 Comparison of 1st & 2nd natural frequencies. ($\alpha=1, \beta=1, \theta_0=0, \kappa=1, \delta=0$)

γ	1st natural frequency		2nd natural frequency	
	Present	Ref. (15)	Present	Ref. (15)
0	1.5573	1.5573	16.2527	16.2500
1	1.9017	1.9017	16.7595	16.7570
2	2.6696	2.6696	18.1932	18.1910
3	3.5823	3.5823	20.3524	20.3504
4	4.5429	4.5429	23.0246	23.0229
5	5.5219	5.5218	26.0431	26.0415
6	6.5091	6.5090	29.2933	29.2917
7	7.5007	7.5005	32.7002	32.6984
8	8.4947	8.4945	36.2156	36.2134
9	9.4903	9.4899	39.8079	39.8048
10	10.4870	10.4864	43.4561	43.4517

$$\overline{K}^{22} = [\overline{K}_{ij}^{B2} + \gamma^2 (\overline{K}_{ij}^{GA2} + \alpha(\beta + \delta) \overline{K}_{ij}^{GB2} - \overline{M}_{ij}^{22})] \quad (54)$$

$$\overline{K}^{33} = [\overline{K}_{ij}^{B3} + \gamma^2 (\overline{K}_{ij}^{GA3} + \alpha(\beta + \delta) \overline{K}_{ij}^{GB3})] \quad (55)$$

$$\overline{K}^{23} = [\overline{K}_{ij}^{B23}] \quad (56)$$

$$\overline{K}^{32} = [\overline{K}_{ij}^{B32}] \quad (57)$$

3. 수치해석

Fig. 3은 집중질량의 영향에 따른 veering현상의 (참고문헌 (12), (13) 참조) 차이를 세 α 값에 대해 나타내고 있다. 여기에서 보듯이 veering현상이 생기는 회전각속도 및 고유진동수의 값이 α 값이 커짐에 따라 점점 작아짐을 알 수 있다. α 가 0일 때와 달리 1과 2일 때는 두 궤적이 실제로 veering 현상을 일으키고 있는 것인지 이 그림들에서는 확실치 않으나 그림을 더 확대해 봄으로써 그 여부를 확실히 확인할 수 있었다.

Table 1은 블레이드가 회전하는 경우 평판이론에 의한 결과와(참고문헌 (14)) 본 연구의 결과를 비교하고 있다. 회전각속도가 변함에 따라 두 결과는 일정한 오차범위내에(최대 약 1.5%정도) 있음을 확인할 수 있다. Table 2는 여러가지 회전각속도에 대하여 본 논문에 제시된 방법에 의한 면외 굽힘진동해석의 결과들을 참고문헌 (15)의 결과들과 비교하고 있다. 여기에서 보듯이 본 논문에서 제시된 모델링은 참고문헌 (15)의 엄밀해와 비교할 때 역시 일정한 오차범위내에(최대 0.02%) 있음을 확인할 수 있다. 비틀림각에 의한 고유진동수 변화는 미미해서 정확한 값을 예측하는 것이 어렵지만 이상의 비교결과에서 두 고유진동수들이 일정한 오차 범위에 있다는 점을 토대로 볼 때 본 논문에서

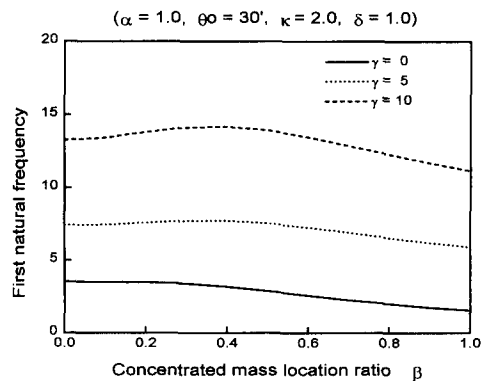


Fig. 4 Concentrated mass location effect on the first natural frequencies.

제시된 모델링의 신뢰성을 잘 보여준다고 판단된다.

Fig. 4는 집중질량의 위치변화에 따른 첫 번째 무차원 고유진동수 값을 세 γ 값에 대하여 나타내고 있다. 무회전시에는($\gamma=0$) 집중질량이 자유단 쪽으로 이동할수록 고유진동수가 계속 감소하나 회전을 할 때에는 ($\gamma=5$ or 10) 집중질량이 고정단에서 자유단쪽으로 이동함에 따라 적절한 위치까지 고유진동수가 증가하는 현상을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 회전시 집중질량에 의한 강성증가 효과가 질량증가 효과보다 크기 때문에 나타나는 현상이라 할 수 있다. 그러나 집중 질량이 자유단 가까이 가면 다시 질량효과가 강성효과보다 커져서 고유진동수값이 감소하는 것을 볼 수 있다. 이것은 블레이드가 회전운동을 할 때 집중질량의 위치에 따라서 그 고유진동수가 증가 혹은 감소할 수 있다는 것을 의미하는 것이며, 집중질량의 부착위치를 조절하여 고유진동수를 적절히 조절할 수 있다는 것을 의미한다.

Fig. 5는 블레이드의 무차원 회전각속도와 고유진동수가 일치하는 임계각속도의 위치를 보여주고 있다. Table 3은 $x=0.5$ 일 때(면내 굽힘강성이 면외 굽힘강성보다 클 때) 초기 비틀림각의 증가에 따라 임계각속도가 다소 감소함을 보여주며, Table 4는 $x=2.0$ 일 때(면외 굽힘강성이 면내 굽힘강성보다 더 클 때) 초기 비틀림각의 증가에 따라 임계각속도가 반대로 다소 증가함을 보여준다. Table 3은 또한 축반경비의 증가에 따라서 임계각속도의 변화가 점점 감소하는 것을 보여주는데 이는 비틀림각은 구조강성만 바꾸며 회전에 의한 강성변화 효과와는 무관하기 때문에 축반경비의 증가에

다른 회전관성효과가 커질수록 그 영향은 점점 미

Table 3 Critical angular speed versus hub radius ratio and pretwisted angle with tip mass. ($x=0.5$)

δ		θ_0			
		0°	15°	30°	45°
0.0	$\alpha=0$	3.8775	3.8728	3.8591	3.8370
	$\alpha=1$	1.7202	1.7172	1.7085	1.6945
0.1	$\alpha=0$	4.2934	4.2891	4.2763	4.2556
	$\alpha=1$	1.8633	1.8606	1.8525	1.8394
0.2	$\alpha=0$	4.8686	4.8646	4.8528	4.8336
	$\alpha=1$	2.0458	2.0433	2.0359	2.0238
0.3	$\alpha=0$	5.7294	5.7258	5.7152	5.6978
	$\alpha=1$	2.2881	2.2858	2.2791	2.2682
0.4	$\alpha=0$	7.1872	7.1841	7.1750	7.1601
	$\alpha=1$	2.6273	2.6254	2.6195	2.6100
0.5	$\alpha=0$	10.2668	10.2644	10.2572	10.2455
	$\alpha=1$	3.1393	3.1377	3.1329	3.1250

Table 4 Critical angular speed versus hub radius ratio and pretwisted angle with tip mass. ($x=2.0$)

δ		θ_0			
		0°	15°	30°	45°
0.0	$\alpha=0$	3.8775	3.8808	3.8907	3.9067
	$\alpha=1$	1.7202	1.7224	1.7288	1.7391
0.1	$\alpha=0$	4.2934	4.2970	4.3078	4.3251
	$\alpha=1$	1.8633	1.8656	1.8723	1.8831
0.2	$\alpha=0$	4.8686	4.8726	4.8842	4.9030
	$\alpha=1$	2.0458	2.0482	2.0553	2.0665
0.3	$\alpha=0$	5.7294	5.7336	5.7460	5.7660
	$\alpha=1$	2.2881	2.2906	2.2978	2.3093
0.4	$\alpha=0$	7.1872	7.1915	7.2041	7.2244
	$\alpha=1$	2.6273	2.6298	2.6369	2.6484
0.5	$\alpha=0$	10.2668	10.2707	10.2823	10.3009
	$\alpha=1$	3.1393	3.1416	3.1484	3.1591

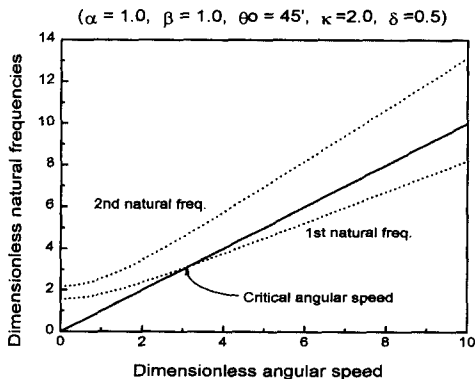
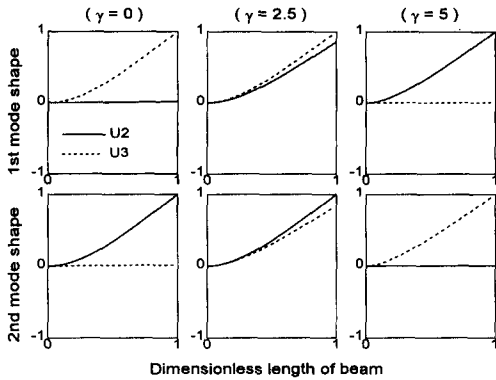
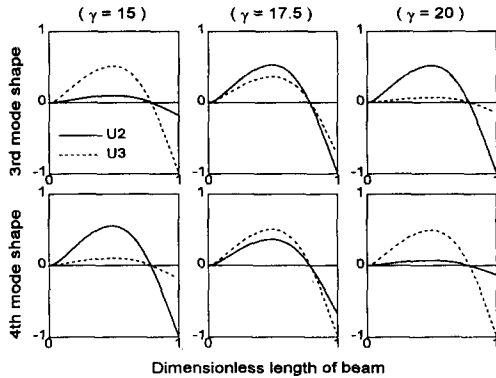


Fig. 5 Critical angular speed.



(a) 1st and 2nd mode variations



(b) 3rd and 4th mode variations

Fig. 6 Mode shape variations.

약해지기 때문이다. 한편 자유단에($\beta=1.0$) 집중 질량이 첨가될 경우 임계각속도가 현저히 감소됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 $\alpha=0$, $\beta=1$, $\theta_0=5^\circ$, $\chi=0.5$, $\delta=1$ 일 때 첫 번째와 두 번째 궤적간의 veering영역과 세 번째 네 번째 궤적간의 veering영역에서 발생하는 모드형상의 변화를 보여주고 있는데, 3차원 모드형상을 나타내기 위해 면내방향과(u_2) 면외방향의(u_3) 모드를 각각 실선과 점선으로 나타내고 있다. Fig. 6(a)에서 보여주듯이 첫 번째 모드형상과 두 번째 모드형상은 무차원 회전각속도가 2.5 근처에서 급작스러운 veering현상이 발생하며, 2.5 근처에서는 첫 번째와 두 번째 모드의 형상이 비슷해지다가 각속도가 더 커지면 모드형상이 서로 역전함을 보여주고 있다. 세 번째와 네 번째 궤적은 무차원 회전각속도가 17.5 근처에서 서로 가장 접근하는데 앞의 경우와 달리 완만한 veering현상이다. 이 경우에도 무차원 회전각속도가 17.5 근처에서 세

번째와 네 번째 모드의 크기가 비슷해지다가 각속도가 더 커짐에 따라 역시 모드형상이 서로 역전함을 보여주고 있다. 이러한 veering현상은 모드들의 급격한 변화를 일으키며, 이는 두 모드 간의 공명현상과 비슷하여 결코 바람직한 현상이 아니다. 따라서 이점을 고려하여 설계시 이러한 현상이 일어나지 않도록 조처하는 것이 꼭 필요하다.

4. 결 론

본 논문에서는 임의의 지점에 집중질량을 가지며 또한 무변형시 초기부터 비틀림이 있는 회전운동을 하는 블레이드의 고유진동특성을 예측하기 위한 모델링방법이 제시되었으며 이를 이용하여 수치해석 결과를 도출하였다. 수치해석결과는 회전각속도, 축반경비, 집중질량의 크기 및 그 위치, 초기 비틀림각의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여 주었는데 기존의 수치해석결과와 비교해 봄으로써 본 논문에서 제시된 방법의 정확성을 검증할 수 있었다. 본 논문에서는 특히 초기 비틀림각에 의해 발생하는 고유진동수 궤적의 휨현상(veering effect) 집중질량의 크기에 의해 영향을 받는 것을 확인할 수 있었다. 헬리콥터의 회전익이나 발전기의 터어빈 등 실생활에 응용되는 블레이드 형태의 구조물이 비틀림각을 가지면서 또한 특정 부분에서 집중질량의 형상을 동시에 나타내므로 본 논문의 결과는 관련분야의 연구에 쉽게 이해되고 응용될 수 있으리라 판단된다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (4) Bauer, H. F., 1980, "Vibration of a Rotating Uniform Beam," *J. Sound and Vibration*, 72(2), pp. 177~189.

- (5) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369~381.
- (6) 유홍희, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제20권, 제8호, pp. 2516~2523.
- (7) Kuo, Y. H., Wu, T. H., and Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
- (8) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (9) 박정훈, 유홍희, 1996, "초기 비틀림각을 갖는 회전 외팔보의 굽힘진동," 대한기계학회논문집 (A), 제20권, 제7호, pp. 2174~2181.
- (10) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Over- all Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (11) 신상하, 유홍희, 1996, "인장-굽힘 운동간 연성 효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주학회지, 제24권, 제2호, pp. 77~84.
- (12) Leissa, A. W., 1974, "On a Curve Veering Aberration," *Journal of Applied Mathematics and Physics(ZAMP)*, 25, pp. 99~111.
- (13) Perkins, N. C. and Mote, C. D., 1986, "Comment on Curve Veering in Eigenvalue Problems," *Journal of Sound and Vibration*, 106(3), pp. 451~463.
- (14) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates," *J. Sound and Vibration*, 97(3), pp. 429~449.
- (15) Wright, A., Smith, C., Thresher, R. and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *J. Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 197~202.