

준역행렬과 투영행렬을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석

김 외 조* · 유 완 석**

(1997년 6월 26일 접수)

A Dynamic Analysis for Constrained Multibody Systems Using Pseudo-inverse and Projection Matrix

Oe-Jo Kim and Wan-Suk Yoo

Key Words : Null Space(영공간), Column Space(행공간), Pseudo-inverse Matrix(준역행렬) Projection Matrix(투영행렬)

Abstract

In this paper, the column space and null space of the Jacobian matrix were obtained by using the pseudo-inverse method and projection matrix. The equations of motion of the system were replaced by independent acceleration components using the null space matrix. The proposed method has the following advantages. (1) It is simple to derive the null space. (2) The efficiency is improved by getting rid of constrained force terms. (3) Neither null space updating nor coordinate partitioning method is required. The suggested algorithm is applied to a three-dimensional vehicle model to show the efficiency.

1. 서 론

일반적인 다물체계의 해석에서 계의 운동방정식은 기구학적 조인트 및 구동조건으로부터 생기는 구속식과 미분방정식이 혼합된 미분-대수방정식의 형태로 표시된다. 이 방정식을 풀 때 라그랑지곱수 기법을 이용하여 구속조건에 의해 발생하는 반력항을 추가하고, 구속식의 시간에 대한 2차 미분형태의 가속도식과 연립해서 풀게 된다. 이러한 미분-대수방정식을 푸는 방법으로 좌표분할법에 기초한 방법으로서 독립좌표의 성분만으로 적분과정을 수행하여 뉴우튼방법(Newton method) 등을 이용하여 해의 보정을 실시하는 방법이 주종이었다.⁽¹⁻³⁾ 최근에는 구속력을 발생시키는 자코비안행렬을 영공간(null space)과 행공간(column space)으로 분

할하는 방법을 사용하여 구속력항을 제거하여 순수한 미분방정식 형태로 운동방정식을 유도하는 기법들이 많이 소개되고 있다.⁽⁴⁻⁸⁾ 이 방법들은 운동방정식을 독립좌표성분으로 줄여서 해석하므로 효율성 측면과 정확도 측면에서 이전의 방법에 비해 개선된 방법이다.

Blajer, W.등⁽⁵⁾은 구속조건에 대한 자코비안행렬에 대한 일반적인 직교보충행렬(orthogonal complement matrix)을 구해서 구속력 제거를 시도하였으나, 직교보충 행렬을 구하는 자체가 매우 까다로운 면이 있다. Vlase, S.⁽⁶⁾은 자코비안의 좌표분할을 이용하여 구속력을 제거하는 행렬을 유도하여 적용하였으나 구속력의 계산에 관한 처리가 미흡하다. 이동찬 등⁽⁸⁾은 상대조인트좌표계를 사용하고, 좌표분할에 의해서 구해진 직교투영행렬(orthogonal projection matrix) 사용하여 구속력이 제거된 미분방정식을 얻을 수 있음을 보였다.

지금까지 소개된 이 방법들은 주로 영공간의 유

*부산대학교 대학원 기계공학부

**회원 부산대학교 기계기술연구소

도가 복잡하고 좌표변환기법들을 도입하므로써 방정식의 유도가 복잡하였다. 또한 시뮬레이션 도중에 영공간을 개선하는 기준이 모호하고 수학적으로 그 기준이 명확히 제시된 경우는 없었다.

본 연구에서는 준역행렬(pseudo-inverse matrix) 법과 투영행렬(projection matrix)법을 이용하여 구속조건의 자코비안의 행공간 및 영공간을 유도하고, 속도벡터를 일반속도와 독립속도로 분리하여 순수 독립좌표의 항으로 가속도식을 유도하였다. 본 연구에서 사용한 방법은 자코비안의 영공간 및 행공간의 유도가 단순하면서도 영공간 개선에 필요한 여러 가지 제약조건이 없으므로 효과적으로 영공간을 만들 수 있는 이점을 가진다. 유도된 방정식에 차량의 예제를 적용하여 효율성을 보인다.

2. 운동방정식

계에 조인트 및 구동구속조건에 의해서 발생하는 구속식은 조인트좌표계를 이용하여 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi(q, t) = [\Phi_1(q, t), \dots, \Phi_m(q, t)] = 0 \quad (2.1)$$

여기서, q 는 일반좌표벡터로서 $q = [d, \phi]^T$ 이고, d 와 ϕ 는 각각 상대병진변위와 상대회전변위를 나타낸다.

(2.1)식을 시간에 대해서 각각 미분함으로써 (2.2), (2.3)식과 같은 속도 및 가속도방정식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t \quad (2.2)$$

$$\Phi_q \ddot{q} = -2\Phi_{qt} \dot{q} - (\Phi_{qq} \dot{q})_q \dot{q} - \Phi_{tt} \quad (2.3)$$

여기서, Φ_q 는 구속식의 일반좌표성분의 미분항인 자코비안행렬을 나타내며, Φ_t 는 시간에 대한 구속조건에서 나타나는 속도방정식의 우측항이다.

또한 라그랑지방정식과 속도변환기법(velocity transformation method)을 사용하여 계의 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.⁽⁴⁾

$$\overline{M} \ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = \overline{g} \quad (2.4)$$

여기서, M 은 시스템 전체의 질량행렬이고, λ 는 라그랑지곱수를 나타내며, $\overline{M} \equiv B^T M B$, $\overline{g} = B^T [f - M \ddot{B} \dot{q} - M \dot{B} \dot{q}]$ 을 나타내고, B 는 조인트좌표계의 속도를 절대좌표계의 속도로 변환하는 속도변환 행렬이다.

식 (2.3)과 식 (2.4)을 연립하여 전체 시스템의

운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{g} \\ -2\Phi_{qt} \dot{q} - (\Phi_{qq} \dot{q})_q - \Phi_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

3. 준역행렬 및 투영행렬의 유도

다물체계에서 사용되는 자코비안행렬은 행의 수보다 열의 수가 많은 형태이므로 일반적인 방법으로 그 역행렬은 정의되지 않는다. 자코비안의 각 열이 선형독립이면 $\Phi_q \Phi_q^T$ 의 역행렬은 존재하며, 준역행렬(pseudo-inverse)법의 한 형태를 이용하여 역행렬을 구하면 다음과 같은 자코비안의 우측 역행렬 성분을 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$I_R = \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1}, \quad \Phi_q I_R = I \quad (3.1)$$

행의 수(m)가 열의 수(n)보다 많은 일반적인 행렬 A에 대한 선형연립방정식 $Ax=b$ 를 풀기 위해서는 b의 각 성분은 A의 부공간(열공간) 성분의 선형결합 형태로 표현되어야 한다. 즉, Fig. 1에서와 같이 b벡터의 성분이 A행렬의 열공간 성분에 벗어나 있으면, 해를 구할 수 없다. 이를 해결하기 방법으로 b벡터를 열공간 성분으로 투영시켜서 오차를 최소화하는 \bar{x} 를 가정하여 해를 구하는 최소자승법을 많이 이용하며, 그 방법은 다음과 같다.

Fig. 1에서 c 점은 b의 성분을 A의 행공간에 투영한 점이다. 여기서 정해와의 오차벡터인 $(b - A\bar{x})$ 는 행공간에 대하여 수직이 됨을 알 수 있다. 즉, 오차벡터는 A^T 의 영공간이 됨을 의미하며, 다음과 같은 수식으로 표현할 수 있다.

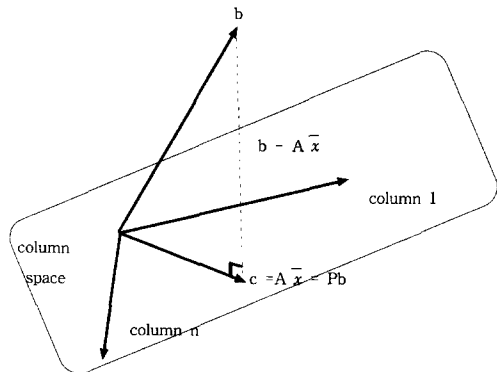


Fig. 1 Projection onto the column space of m by n matrix.

$$A^T(b - A\bar{x}) = 0 \quad (3.2)$$

$$A^T A \bar{x} = A^T b \quad (3.3)$$

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (3.4)$$

$$c = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b = Pb \quad (3.5)$$

윗식에서 P 는 b 의 성분을 A 행렬의 행공간으로 투영시키는 투영행렬이며, 오차 $b - Pb$ 는 행공간에 대해서 직교성분을 나타낸다. 즉, $(I - P)b$ 에서 $(I - P)$ 성분은 A^T 의 영공간 성분으로 투영하는 투영행렬이 된다.

위의 성질을 이용하여 다물체계에서 사용되는 자코비안행렬의 수직 영공간 성분을 다음과 같이 적용할 수 있다.

$$P_N = [I - \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \Phi_q] \quad (3.6)$$

여기서, $\Phi_q P_N = 0$ 이 성립하므로 P_N 는 자코비안의 영공간으로 사용할 수 있다. 그런데 실제 자코비안의 영공간은 $(n - m)$ 개의 독립성분만으로 표현되므로, 위에서 구한 P_N 행렬중에 영공간 계산에 사용되는 부분은 $(n - m)$ 개만 존재하고 독립이 아닌 종속성분이 m 개 존재하는 행렬이 된다. 따라서 본 연구에서는 P_N 행렬중에서 독립성분의 행을 추출하는 행렬 $B_{(n \times n - m)}$ 를 곱하여 최종 자코비안의 영공간을 다음 식으로 사용하고자 한다.

$$P_T = P_N B_{(n \times n - m)} \quad (3.7)$$

4. 운동방정식의 해법

일반적으로 완전 행차수(row rank)를 가지는 자코비안행렬에 대하여 위에서 구한 I_R 과 P_T 는 다음의 식들과 같은 특징을 가지게 된다.

$$\Phi_q I_R = \Phi_q \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} = I_{(m \times m)} \quad (4.1)$$

$$\Phi_q P_T = \Phi_q [I - \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \Phi_q] B = 0_{(n \times n - m)} \quad (4.2)$$

이는 P_T 의 행공간은 자코비안의 영공간이 된다는 의미이다. 따라서 P_T 는 구속식 표면에서 구속조건을 만족시키는 접평면 성분으로 사용 가능하다. 초기시간 t_0 에서 일반좌표 q_0 의해 구속식이 만족한다면 구속식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi(q_0, t_0) = 0 \quad (4.3)$$

(4.3)식을 시간에 대해 미분하면 다음식과 같다.

$$\Phi_q(q_0, t_0) \dot{q}_0 = b_0 \quad (4.4)$$

여기서, $b_0 = -\Phi_t(q_0, t_0)$ 이다.

윗식의 해를 특별해와 일반해의 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{q}_0 = I_R b_0 + P_T \dot{z} \quad (4.6)$$

여기서, \dot{z} 는 구속조건에 접평면 성분과 평행한 자유변수벡터이다.

위의 식을 이용하여 일반적인 형태의 속도방정식을 구성하면 다음과 같으며, P_{NT} 의 자세한 유도는 부록에 나타내었다.

$$\dot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

위의 식은 자코비안의 행공간을 우측 역행렬 성분으로 사용하고, 현재의 영공간은 이전 영공간에서 투영행렬을 매 순간마다 곱하여 영공간을 갱신하는 방법이다. 따라서 이전의 방법과 달리 별도의 좌표분할기법을 도입하여 영공간을 개선하는 번거로움 및 영공간을 개선할 때 기준의 모호함에 의해서 생기는 논란없이 단순히 행렬의 곱셈만으로 행공간 및 영공간을 만들 수 있고, 독립좌표성분으로 운동방정식을 줄여서 표현가능하다.

가속도관계식을 구하기 위해서 (4.7)식을 시간에 대하여 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\ddot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \ddot{b} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

그런데 $\frac{d}{dt} [I_R, P_{NT}] = -I_R \dot{\Phi}_q [I_R, P_{NT}]$ 이므로 \ddot{q} 은 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \ddot{b} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} - I_R \dot{\Phi}_q \dot{q} \quad (4.8)$$

$$\ddot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

여기서, $\ddot{a} = -\dot{\Phi}_q \dot{q} - \ddot{\Phi}_t$ 이다.

계 전체의 운동방정식에다 위에서 유도한 $[I_R, P_{NT}]^T$ 행렬을 곱하면 구속력을 제거하여 계의 자유도 수와 동일한 순수미분방정식 형태로 다음과 같이 고칠 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I_R^T \\ P_{NT}^T \end{bmatrix} \overline{M} \ddot{q} = \begin{bmatrix} I_R^T \overline{g} \\ P_{NT}^T \overline{g} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

윗식을 두 개의 식으로 나누어 쓰면 다음과 같다.

$$P_{NT}^T \overline{M} \ddot{q} = P_{NT}^T \overline{g} \quad (4.10)$$

$$\lambda = I_R^T (\overline{M} \ddot{q} - \overline{g}) \quad (4.11)$$

식 (4.10)에 가속도 관계식을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$M_{11}\ddot{z} = P_{NT}^T(\bar{g} - \overline{M}I_Ra) \quad (4.12)$$

여기서, $M_{11} = P_T^T \overline{M} P_T$ 이다.

따라서 계의 독립가속도벡터 \ddot{z} 은 다음식과 같이 표현되며, 벡터의 크기는 계의 자유도수와 같다.

$$\ddot{z} = M_{11}^{-1} P_T^T(\bar{g} - \overline{M}I_Ra) \quad (4.13)$$

5. 제한한 알고리즘

일반 위치좌표는 일반속도좌표로부터 계산되지만 일반적으로 위치좌표는 기구학적 구속식 및 구동조건을 만족하지 않으므로 다음과 같이 독립좌표는 고정하고 Newton-Raphson법으로 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ P_{NT}^T \end{bmatrix} \Delta q = \begin{bmatrix} -\Phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q^{i+1} = q^i + \Delta q, \quad i=0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

다음의 속도관계식에서 독립속도벡터 \dot{z} 으로부터 일반좌표의 속도를 계산한다.

$$\dot{q} = [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

식 (4.13)을 사용하여 \ddot{z} 을 구하면, (4.8)으로부터 \dot{q} 를 구할 수 있고, (4.11)식으로부터 λ 를 계산할 수 있다. 또한 \dot{z} 을 적분하면 독립속도벡터 \dot{z} 을 얻을 수 있고, (4.8)식으로부터 \dot{q} 를 구할 수 있다. 다시 \dot{q} 를 적분하면 비선형방정식 해법을 도입하여 q 를 얻을 수 있다.

6. 시뮬레이션

본 연구에서 제시한 운동방정식으로 3차원 차량 예제에 대하여 적용하여 그 타당성을 보이고자 한다. 예제로 사용한 차량의 전륜현가장치로는 Fig. 2와 같은 맥퍼슨형 (Macpherson type)을 사용하고 있다. 이 맥퍼슨 현가장치에서 로우-컨트롤-암(lower-control arm), 조향 너클(steering knuckle), 스트럿(strut)으로 구성되어 있다. 로우-컨트롤-암은 회전조인트(revolute joint)로 차체와 연결되고, 구면조인트(spherical joint)로 조향 너클에 연결되는 것으로 모델링하였다. 스트럿(strut)은 병진조인트로 연결하여, 상하 스트럿(strut) 사이에 스프링과

함께 감쇠력과 스프링 변형력을 받는 것으로 모델링하였다. 스트럿의 상부는 구면조인트로 차체에 연결시켰다.

6.1 전륜 현가장치의 모델

전륜 현가계에 장착된 조향계(steering system)는 랙과 피니언(rack & pinion)의 형식인데, 랙과 피니언 및 타이 로드(tie rod)로서 구성되어 있다. 랙과 피니언은 차체와 병진조인트로 모델링하였고, 이것과 타이로드와는 유니버설조인트(universal joint)로, 타이-로드와 조향-너클은 구면조인트로 연결되어 조향을 가능하게 모델링하였다. 그리고, 각 바퀴부(wheel assembly)는 조향 너클과 연결된 스핀들(spindle)과 회전조인트로 연결되어져 회전한다.

6.2 후륜 현가장치의 모델

차량의 후륜 현가장치는 Fig. 3과 같은 비틀림축(twist axle)을 사용하고 있다. 이 비틀림축 현가

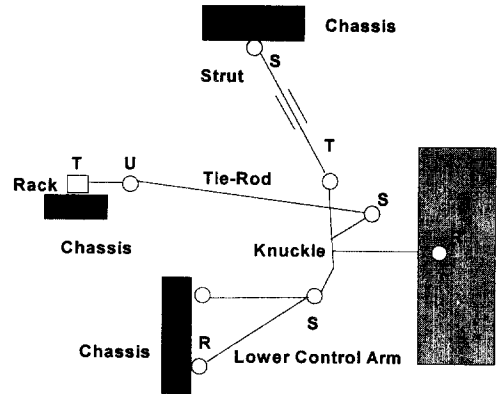


Fig. 2 Front suspension model(McPherson strut type).

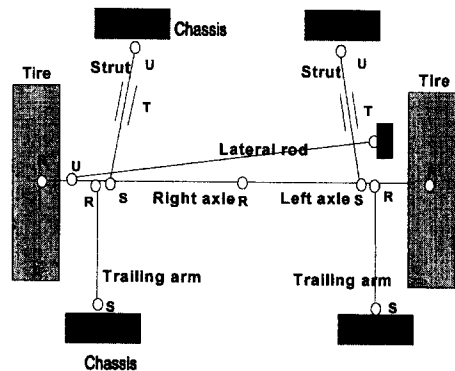


Fig. 3 Rear suspension model(Twist axle type).

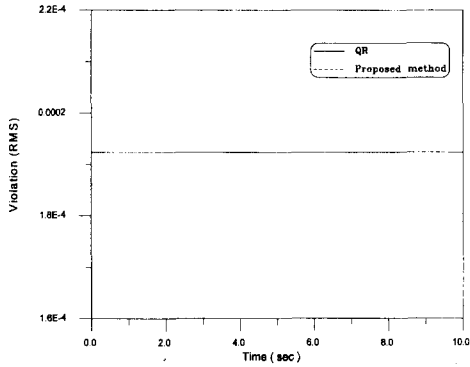


Fig. 4 Constraint violation (Max. integration step 0.001).

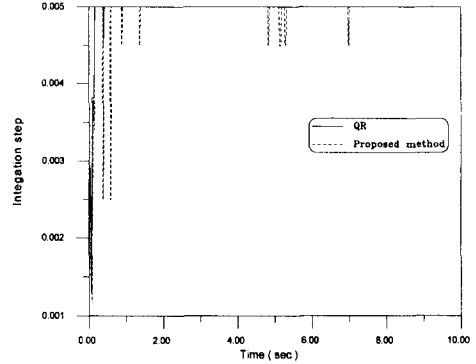


Fig. 7 Comparison of integration step size (Max. integration step 0.005).

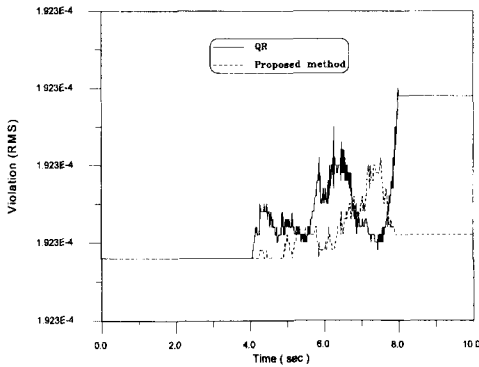


Fig. 5 Constraint violation (Max. integration step 0.01).

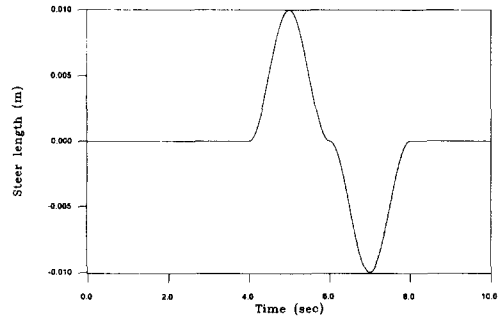


Fig. 8 Steer input of the Rack & Pinion.

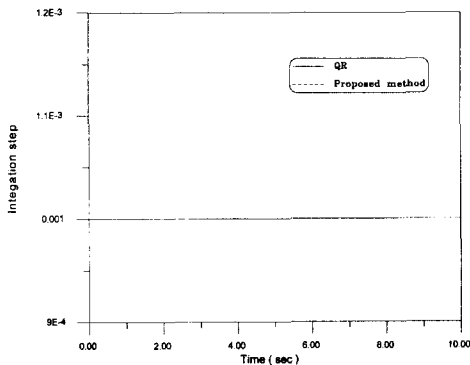


Fig. 6 Comparison of integration step size (Max. integration step 0.001).

장치는 토션 바를 가진 뒷 차축(rear axle), 트레일링-암(trailing arm), 스프링(spring), 감쇠기(shock absorber)로 구성되어 있다. 트레일링-암은 구면조인트(spherical joint)로 차체와 연결하며 감쇠기는 병진조인트로 연결되고 차체와 구면조인트

트(spherical joint)로 연결되어 감쇠력을 받는 것으로 모델링하였다. 스프링도 동일하게 위치하여 힘을 받도록 하였다. 그리고 바퀴부는 뒷 차축과 회전조인트로 연결되어져 회전한다.

이상의 모델로부터 차선변경 시뮬레이션을 수행하여 차체의 거동을 조사하였다. 40 km/hr로 정속 주행하는 차량에 대하여 4초 동안 동적 평형 상태에 도달하고, 4초에서 8초사이에 Fig. 8와 같은 형태로 조향기구인 랙과 피니언 사이의 상대적인 변위의 최대진폭이 1 cm 발생하도록 정현파 형태로 부여하여 차체의 응답을 범용프로그램인 DADS와 비교하였다. 타이어 모델링의 통일성을 위해 DADS의 타이어 모델을 이용하지 않고 DADS의 사용자 정의 코드를 이용하였다.

알고리즘의 타당성 검증을 위하여 본 연구와 구간이 같은 QR 알고리즘과 구속조건의 위배정도, 적분간격의 변화추이를 비교하였다. Fig. 4와 Fig. 5에 최대 적분간격의 변화에 따른 구속조건의 위배량을 표시하였다. 구속조건의 위배량은 거의 유사한 수준이나 적분간격이 클수록 본 알고리즘의 위

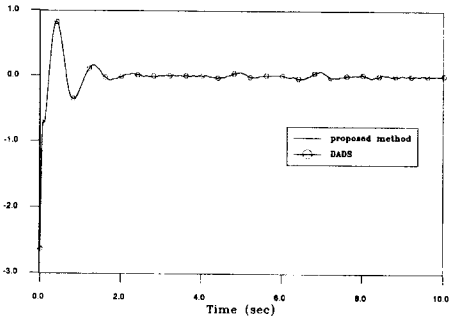


Fig. 9 Vertical acceleration of the chassis.

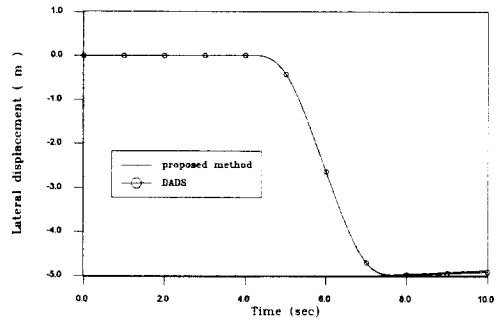


Fig. 11 Lateral displacement of the chassis.

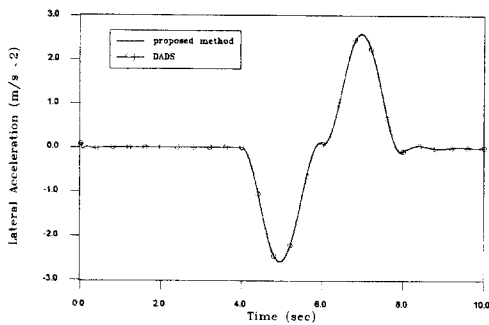


Fig. 10 Lateral acceleration of the chassis.

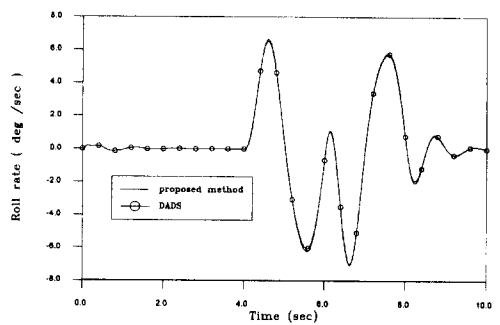


Fig. 12 Roll rate of the chassis.

배정도가 상대적으로 적을 것으로 판단된다. 이는 매 순간마다 구속식의 접평면을 개선하는 효과 일 것으로 사료된다. 적분간격의 변화추이를 보면, 접 평면 개선으로 일반질량행렬 및 일반력벡터의 변화가 심한 본 알고리즘에서는 적분간격의 변화가 QR 법에 비해 다소 많이 발생하는 것을 알 수 있다. Fig. 9에서는 수직방향의 가속도를 나타내었다. 4 초까지 평형상태에 도달하고 조향입력이 부가되면서 다소 가속도의 변화가 관찰되었고, 두 결과는 일치하였다.

Fig. 10에서는 횡방향의 가속도, Fig. 11에서는 횡방향의 변위를 각각 나타내었다. 조향입력이 시작되는 4초에서 8초사이에 입력에 대한 선형근사치 계산이 DADS의 계산법과 일치하지 않으므로 미소한 차이가 발생하였으나 전체적인 가속도, 변위의 크기는 두 방법에서 같은 결과를 보여주주고 있다.

Fig. 12, Fig. 13에서는 롤각변화율(roll rate), 요 각변화율(yaw rate)을 각각 나타내었다. DADS 모델과 본 연구에서 사용한 방법이 롤각변화율에서 약간의 오차를 보인 것은 앞에서 언급한 선형근사치 계산의 차이에 기인한 것으로 사료되나, 차이가 미미하다.

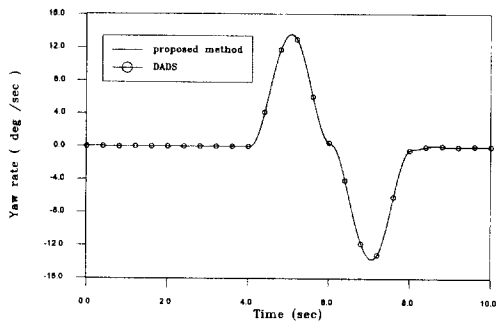


Fig. 13 Yaw rate of the chassis.

Table 1 Comparison of the CPU time.

	CPU time(sec)
Proposed algorithm	22.76
DADS	74.46

또한, Table 1에는 시뮬레이션 도중의 CPU 사용시간을 본 연구에서 제안한 방법과 DADS의 결과를 비교하였다. 투영행렬법이 기존의 범용 프로그램에 비해 효율성이 보장되는 것을 알 수 있다.

7. 결 론

구속다물체계의 해석을 위하여 새로운 영공간 개선법을 도입하고 구속력을 제거한 새로운 미분방정식 형태로 운동방정식을 유도하였다. 또한 개선된 알고리즘으로 차량모델의 예제를 사용하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 좌표분할법을 도입하지 않고 영공간을 쉽게 개선할 수 있는 방안을 제안하였다.

(2) 투영행렬을 사용하면 영공간 개선에 필요한 여러 제약조건이 필요하지 않다.

(3) 차량 예제를 통하여 해석결과가 범용 프로그램과 잘 일치하였으므로, 본 연구에서 제안한 알고리즘의 타당성을 확인할 수 있었으며, 범용프로그램에 비해 효율성이 있음을 보였다.

참고문헌

- (1) Wahage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 104, pp. 247~255.
- (2) Mani, N. K., Haug, E. J. and K. E. Atkinson, "Application of Singular Value Decomposition for Mechanical System Dynamics," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 107, pp. 82~87.
- (3) Liang, C. G. and Lance, G. M., 1987, "A Differentiable Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 109, pp. 405~411.
- (4) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "QR Decomposition for State Space Representation of constrained Mechanical Dynamic Systems," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 108, pp. 183~188.
- (5) Blajier, W., Bestle, D. and Schiehlen W., 1994, "An Orthogonal Complement Matrix Formulation for constrained multibody systems," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 116, pp. 423~428.
- (6) Vlase, S., 1987, "A Method of Eliminating

Lagrangian Multipliers from the Equation of Interconnected Mechanical Systems," *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 235~237.

- (7) Blajier, W., 1992, "A Projection Method Approach to Constrained Dynamic Analysis" *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 643~649.
- (8) 이동찬, 이상호, 한창수, 1997 "구속된 다물체 시스템에 대한 운동방정식의 미분방정식화 및 동역학해석," 한국자동차공학회논문집, 제5권, 제1호, pp. 154~161.
- (9) Strang, G., 1988, *Linear Algebraic and Its Application*, 3rd Edition, Harcourt Brace & Company, Florida
- (10) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *J. Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~128.

부 록

일반적인 형태의 속도 방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\dot{q} = [I_R, P_T] \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (A1)$$

여기서, \dot{e} , \dot{z} 는 각각 구속표면의 법선 및 접선 성분의 벡터이다.

$\Phi_q \dot{q} = b$ 이므로

$$\Phi_q [I_R, P_T] \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = b \text{ 이다. 따라서}$$

$$\dot{e} = (\Phi_q I_R)^{-1} (b - \Phi_q P_T \dot{z}) \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [I_R, P_T] \begin{bmatrix} (\Phi_q I_R)^{-1} (b - \Phi_q P_T \dot{z}) \\ \dot{z} \end{bmatrix} \\ &= I_R (\Phi_q I_R)^{-1} b - I_R (\Phi_q I_R)^{-1} \Phi_q P_T \dot{z} + P_T \dot{z} \\ &= [I_R (\Phi_q I_R)^{-1}, P_T - I_R (\Phi_q I_R)^{-1} \Phi_q P_T] \begin{bmatrix} b \\ \dot{z} \end{bmatrix} \\ &= [I_R, P_{NT}] \begin{bmatrix} b \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (A3) \end{aligned}$$

여기서, $P_{NT} = P_N P_T$ 이다.