

## 고무패드 변형의 3차원 유한요소해석 (1)

신수정\* · 이태수\*\* · 오수익\*\*\*

(1997년 5월 6일 접수)

### Three-dimensional Finite Element Analysis of Rubber Pad Deformation

#### — Part I: Development of Implicit and Explicit Methods —

S. J. Shin, T. S. Lee and S. I. Oh

**Key Words :** Rubber Pad Forming(고무패드성형법), Explicit and Implicit Finite Element Method(외연적, 내연적 유한요소해석), Hyper-elastic Material(초탄성체), Mooney-Rivlin Model(무니-리브린 모델)

#### Abstract

This paper is the first one of two-parted research efforts focusing on the modeling of rubber pad forming process. The rubber pad, driven by the pressurized fluid during the forming process, pushes the sheet metal to solid tool half and forms a part to final shape. In this part of the paper, a numerical procedure for the FE analysis of the rubber pad deformation is presented. The developed three-dimensional FE model is based on the total Lagrangian description of rubber material characterized by nearly incompressible hyper-elastic behavior under a large deformation assumption. Validity of the model as well as effects of different algorithms corresponding to incompressibility constraints and time integration methods on numerical solution responses are also demonstrated.

#### 1. 서 론

고무패드성형법은 Fig. 1과 같이 판재의 한쪽 면에는 금형을, 다른 한쪽 면에는 고무패드를 사용하여 고무패드에 가해지는 압력으로 성형하는 방법을 말한다. 고무패드성형법은 일반적으로 다른 판재성형법에 비하여 금형이 한쪽만 필요하므로 금형제작 비용이 저렴한 점, 공구비가 적게 들고 장치의 설치시간이 짧으므로 다품종 소량 생산이 가능한 점, 공구 흔적이 생기지 않고 완제품의 표면상태가 좋은 점 등으로 인하여 항공기 부품과 같은 고무부가

치 소량생산에 효과적으로 쓰인다.<sup>(1)</sup> 또한 성형에 필요한 압력이 판재에 고무 분포되기 때문에 성형하기 힘든 자동차 부품의 생산에 적용되기도 한다.

판재성형은 유체에 가해지는 압력이 고무패드부를 통하여 모재에 전달됨으로써 이루어지고, 따라서 성형과정에 있어서 고무패드부의 변형양상이 가장 중요한 사항임은 자명하다. 그러나 이러한 고무패드부의 거동을 예측하기 위한 시도는 국내외적으로 흔치 않다. 또한 고무 재질에 대한 기계적 변형에 관한 연구도 변형 압력이 비교적 낮은 엔진 마운트, 타이어 등을 대상으로 진행되어 왔고, 고무패드 성형시 발생하는 것과 같이 높은 압력하의 고무의 변형에 관한 연구는 상대적으로 드문 편이다. 최근 고무패드성형법의 2차원 유한요소 모델링 연구가 저자들에 의해서 진행되어 왔고<sup>(2-4)</sup> 본 연구

\*회원, 서울대학교 대학원 기계설계학과

\*\*회원, 서강대학교 기계공학과

\*\*\*회원, 서울대학교 기계설계학과

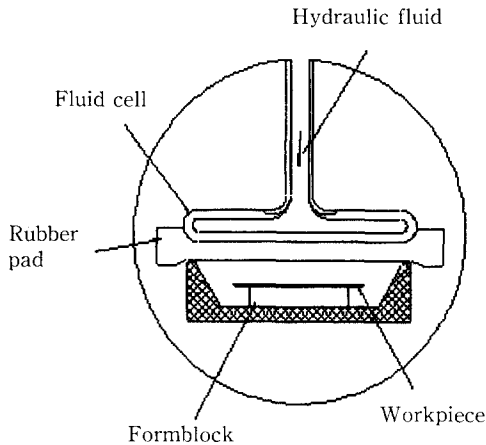


Fig. 1 Schematic diagram of rubber pad forming.

는 이를 토대로 고무패드부의 3차원 유한요소법을 개발하여 일반적인 형상의 부품에 대한 성형과정으로 확장한다.

고무는 초탄성체(hyperelastic material)로서 비선형, 비압축성(또는 약간의 압축성), 대변형의 특성을 가지고 있다. 이러한 특성은 변형률 에너지 함수로 표현되고, 유한 탄성이론에 근거한 비선형 편미분방정식에 지배받는다. 그러므로 단순한 기하학적 경우를 제외하고는 이론해를 얻는 것이 불가능하여 유한요소해석같은 수치적 해법에 주로 의존한다. 특히 고무에 대한 유한요소해석기법은 비압축성(또는 약간의 압축성)을 효과적으로 취급하기 위한 방법으로 많은 연구가 진행되어 왔다. 이러한 노력들은 대표적으로 두 가지 방법으로 나뉘어지는데, 그 중 하나는 혼합공식(mixed formulation)을 사용하는 방법<sup>(5-9)</sup>이다. 이 방법에서는 압력항을 개별적인 변수로 취급하여 라그랑지승수(Lagrange multiplier)등을 사용함으로 포텐셜(potential) 에너지 함수에 비압축성조건을 포함시킨다. 여기에는 Oden and Key,<sup>(5)</sup> Scharnhorst and Pian,<sup>(6)</sup> Jankovich,<sup>(7)</sup> Sussman and Bathe,<sup>(8)</sup> Chang<sup>(9)</sup> 등의 해석이 포함된다. 또 하나의 방법은 페널티(penalty)함수를 사용하는 방법이다.<sup>(10-13)</sup> 이 방법은 변위만을 변수로 취급하여 해석하고 비압축성 조건은 페널티항을 사용하여 처리한다. 통상 페널티 함수를 채용할 경우, 수치적분을 엄밀하게 했을때 나타나는 잠금(locking)현상을 피하기 위해 감차적분(reduced or selective integration technique)을 함께 사용한다. 이 방법은 Haggbland and Sundberg,<sup>(10)</sup> Malkus and Hughes,<sup>(11)</sup> Peeken,<sup>(12)</sup> Gadala<sup>(13)</sup>등에 의해 많

은 검토가 이루어져 왔다.

이와같은 비압축성과 비선형을 고려한 고무해석의 유한요소 해는 지금까지 대부분 내연적 시간적분 기법에 의존하여 구해왔었다. 최근에 들어서 컴퓨터의 계산속도의 비약적인 발전과 더불어 판재부 해석등에 있어서 해를 구하기 위해 외연적 시간적분 기법의 적용이 증가하고 있고,<sup>(14,15)</sup> 이에 따라 몇몇 외연적 범용 상용코드에서는 판재 등의 해석뿐 아니라 고무해석을 위해서도 한두 가지의 고무모델의 부프로그램을 제공하고 있다.<sup>(16,17)</sup> 내연적(implicit) 기법은 시간증분에 대한 안정성에 제약이 없으므로 시간증분량을 크게 할 수 있는 반면 복잡한 3차원 해석에 있어서 큰 행렬식의 계산이 필요하고 수렴성의 문제가 발생한다. 이에 반해 외연적(explicit) 기법은 시간단계당 적은 계산시간과 적은 기억용량, 수렴에 관하여 문제가 없는 점이 내연적 기법에 비해 장점으로 부각된다. 고무패드 성형공정의 해석에서도 고무와 판재의 접촉부위에서 고무의 과도한 변형 등으로 인한 수렴성의 문제, 접촉부 프로그램 작성의 용이성 등으로 인해 판재부 뿐 아니라 고무패드부에도 외연적 유한요소 기법의 적용이 필요하리라 예측된다. 그러나 외연적 기법은 수치적 안정성을 만족시키기 위해서 아주 작은 시간증분이 요구되고, 준정적해석의 경우 가상의 관성력 및 감쇄영향의 도입등으로 인한 해의 신뢰성 문제 등이 발생하게 되므로 그 적용성을 위해서는 이러한 장, 단점들에 대해 내연적 기법의 해석결과와의 비교및 검토가 이루어져야 한다.

따라서 본 논문은 고무패드성형과정 모델링을 위한 노력의 한 부분으로써, 위에서 언급한 서로 다른 시간적분법, 비압축성 제한방식, 변형률에너지 함수형태 등을 비교, 고려하여 고무부 변형에 대한 3차원 유한요소 공식화를 전개하였고 간단한 예제를 통하여 그 적용의 유효성을 토의하였다. 본 논문의 후반에 해당되는 연장은문에서는 이러한 서로 다른 시간적분법, 비압축성 적용방법, 변형률 에너지 함수 등을 패드부 변형해석에 적용한 결과를 비교 검토한다.<sup>(18)</sup> 먼저, 유한요소 정식화는 대변형을 고려하여 total Lagrangian 기술을 채택하고, 비압축성 혹은 약간의 압축성을 고려하기 위해 페널티(penalty)법과 혼합공식의 일종인 평균 제한(average constraint)법을 사용하였다. 고무의 거동은 단순 Mooney-Rivlin 모델을 포함, 확장시킨 고차 전개항을 포함한 형태의 일반화된 Mooney-

Rivlin 모델 (Generalized Mooney-Rivlin model)로 특성화하였다. 또한, 본 연구에서는 일반화된 Mooney-Rivlin 형태의 변형률에너지 함수에 비압축성에 관련된 제한함수의 항을 추가한 형태로 통합된 변형률에너지 함수 형태를 제시하고, 페널티 계수의 영향을 고찰하였으며, 이를 사용하여 효과적인 유한요소 공식화를 도모하였다. 해를 구하기 위한 시간적분법으로는 정적해석에 대한 내연적 시간적분법 및 준정적해석을 위한 외연적 시간적분법을 각각 적용하였다. 본 연구의 대상인 고무패드부에 적용하기 전에 간단한 예를 통하여 비압축성 제한방식 및 변형률에너지함수에 따른 수치해의 정확성 및 그 적용성을 고찰하였다.

## 2. 비선형 고무재료의 정적해석을 위한 내연적 정식화

고무재료는 초탄성체로서 그 거동은 변형률에너지 함수로 표현된다. 일반적인 변형률에너지 함수  $W$ 는 Cauchy-Green 변형텐서의 불변량  $I_1, I_2, I_3$ 의 함수이지만 비압축성 재료의 경우 ( $I_3=1$ )에는  $I_1$ 과  $I_2$ 만의 함수가 된다. 이러한 변형률에너지 함수를 포함하는 초탄성체의 전체 포텐셜은 다음과 같다.

$$\Pi = \int_V W(I_1, I_2) dV - \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{u}$ 는 각각 물체력, 표면력, 변위벡터이며, 아래첨자  $V$ 와  $S$ 는 물체의 체적과 경계면적을 나타낸다. 한편 범함수  $\Pi$ 가 극한값을 가질때의 변위장  $\mathbf{u}$ 는 아래의 비압축성 제약조건을 만족해야 한다.

$$I_3=1 \text{ 혹은 } f(|\mathbf{F}|)=0 \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{F}=\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ 로 정의되는, 초기 위치(변형되지 않은 상태)  $\mathbf{X}$ 와 현재 위치(변형된 상태)  $\mathbf{x}$ 의 관계를 연관짓는 변형구배텐서이다. 결국 해는 식 (2)의 비선형 제약조건을 만족시키면서 식 (1)로 주어지는 전체 포텐셜을 최소화하는 변위장  $\mathbf{u}$ 를 구하는 것이다.

통상적으로 식 (2)와 같은 제약조건이 있는 경우, 페널티법 또는 평균제한법을 사용하여 제약조건을 포함하는 전체 포텐셜을 다음과 같이 다시 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V W(I_1, I_2) dV + \int_V W(I_3)_{incomp} dV \\ & - \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 체적력에 의한 항은 무시되었고,  $W(I_3)_{incomp}$ 는 비압축성 제약조건에 따른 에너지 함수이다. 이 범함수에 대한 변분원리는 Green-Lagrange 변형률텐서  $E_{ij}$ , 2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서  $S_{ij}$ 를 포함한 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\delta\Pi = \int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV - \int_S t_k \delta u_k dS = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - \delta_{ij}) \quad (5)$$

$$G_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (6)$$

$$S_{ij} = S_{ij}^d + S_{ij}^b = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W_{incomp}}{\partial E_{ij}} \quad (7)$$

이고,  $G_{ij}$ 는 Cauchy-Green 변형텐서,  $S_{ij}^d$ ,  $S_{ij}^b$ 는 각각 변형률에너지 함수  $W$ 와 비압축성 제약조건에 의한 에너지 함수  $W_{incomp}$ 로부터 유도되는 응력텐서이다. 식 (4)는  $n+1$ 시간 단계 ( $t+\Delta t$ 의 시간)에서 다음과 같은 운동방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV = R^{ext} \quad (8)$$

이 식은 total Lagrangian 기술에 의한 가상일의 정리와 동일하며, 이때  $R^{ext}$ 는 외부 가상일을 나타낸다.

식 (8)에 의해 주어지는 운동방정식은 비선형이므로 선형화하여 증분형태로 변환하고 이산화면 최종적으로 증분변위벡터  $\Delta\mathbf{u}$ 에 대하여 다음과 같은 매트릭스식이 구해진다.

$$(\mathbf{K}_{tan}) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} \quad (9)$$

여기서,  $\mathbf{f}^{ext}$ 는 외력벡터,  $\mathbf{K}_{tan}$ 과  $\mathbf{f}^{int}$ 는 각각 증분강성매트릭스와 내력벡터로서

$$\mathbf{K}_{tan} = \sum_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[ \int_{V_e} \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W_{incomp}}{\partial \mathbf{E}} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} dV \right] \quad (10a)$$

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_e \int_{V_e} \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W_{incomp}}{\partial \mathbf{E}} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (10b)$$

로 나타내어지고, 여기서 아래첨자  $V_e$ 는 요소의

체적을 나타낸다.

### 3. 비선형 고무재료의 준정적해석을 위한 외연적 정식화

비선형 고무재료의 준정적해석을 위한 외연적 정식화는 고무재료의 동적해석에 대한 변분원리에서 출발한다. 이때 사용되는 동적 운동방정식은 정적 해석에 해당하는 식 (4)의 변분원리에서 관성력항을 포함한 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V \rho_0 a_n \delta u_n dV + \int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV = R^{ext} \quad (11)$$

여기서, 좌변의 첫번째 항은 관성력에 의한 일을 나타내고,  $\rho_0$ 와  $\mathbf{a}$ 는 각각 초기밀도와 물체의 가속도벡터이다. 위의 식을 이산화하고 조합하여 매트릭스형태로 나타내면  $n$ 시간 단계(특정시간  $t$ )에서 다음과 같은 동적 평형식으로 나타내어진다.

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_n + \mathbf{N}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = \mathbf{f}_n^{ext} \quad (12)$$

여기서,  $\mathbf{M}$ 은 질량매트릭스,  $\mathbf{f}_n^{ext}$ 은 식 (9)로 표시된 외력벡터,  $\mathbf{v}$ 는 속도벡터,  $\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 은 속도와 변위벡터의 함수로 표현되는 내력벡터를 나타낸다.

운동방정식 식 (12)을 풀어 가속도벡터를 구하고 속도와 변위벡터에 대해 중앙차분법을 적용하면 가속도, 속도, 변위에 대한 외연적 차분방정식은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{N}_n] \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \Delta t_n \mathbf{a}_n \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2} \quad (15)$$

이 때 아래첨자  $n+1/2$ 는  $t + \frac{1}{2}\Delta t$ 의 시간단계를 의미한다. 또한 시간증분  $\Delta t_n$ 은

$$\Delta t_n = \frac{1}{2}(\Delta t_{n-1/2} + \Delta t_{n+1/2}) \quad (16)$$

로 정의된다. 식 (13)을 풀때 계산의 효율을 위해 질량매트릭스  $\mathbf{M}$ 으로는 “mass lumping”된 대각선 성분만을 가진 매트릭스를 사용하였다.

외연적기법은 일반적으로 동적해석에 적합하지 않지만, 동적완화(dynamic relaxation)기법을 사용하여 인위적인 감쇄항을 적절히 선택함으로써 고무패드 변형과 같은 준정적인 해석에도 적용할 수 있는 것으로 알려져 있다.<sup>(16, 20)</sup> 이 방법에 따라 내력벡

터  $\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 은

$$\mathbf{N}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = \mathbf{C} \mathbf{v}_n + \mathbf{f}_n^{int} \quad (17)$$

로 쓸 수 있다. 여기서,  $\mathbf{C}$ 는 감쇄매트릭스이고,  $\mathbf{f}_n^{int}$ 은 식 (10b)로 표시된 변위벡터에 의한 내력벡터이다. 이때 인위적인 감쇄매트릭스  $\mathbf{C}$ 는

$$\mathbf{C} = 2d_s \mathbf{M} \quad (18)$$

으로 표시되고, 여기서  $d_s$ 는 감쇄계수로서 이 값이  $2\omega_1$ ,  $\omega_1$ 은 시스템의 최소 주파수일 경우 외연적 기법에 의한 준정적해석이 가장 적합한 것으로 보고되고 있다.<sup>(20)</sup>

외연적 시간적분법에서는 해의 안정성을 위한 시간증분 크기의 결정이 중요하다. 시간증분의 크기가 한계값을 넘으면 해의 불안정이 발생하고 너무 작으면 계산시간이 길어지게 된다. 이에 따라 각 시간단계에 있어서의 시간증분 크기는 각 요소의 시간증분량을 계산한 값의 최소값에 비선형해석의 경우의 안정계수  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ )를 곱한 다음과 같은 식으로 결정하였다.<sup>(16)</sup>

$$\Delta t_{n+1} = \beta \min[\Delta t^1, \Delta t^2, \dots, \Delta t^m] \quad (19)$$

여기서, 위첨자  $m$ 은 요소의 개수를 나타낸다. 각각의 요소에서 시간증분값은 아래와 같은 식으로 구해진다.

$$\Delta t^e = \frac{V_e}{[Q + (Q^2 + c^2)^{1/2}] S_{e(\max)}} \quad (20)$$

여기서,  $S_{e(\max)}$ 는 요소의 가장 큰 면의 면적이고  $c$ 는 음속이다. 식 (20)에서  $Q = \frac{z_1 c + z_0 V_e}{S_{e(\max)}} \dot{\epsilon}_{kk}$ 로 정의되며, 여기에서  $z_0, z_1$ 은 bulk viscosity 계수들이고,  $\dot{\epsilon}_{kk}$ 는 주 변형률속도의 합이다.

본 연구에서의 접촉처리는 외연적기법의 사용시 고무와 강체간의 접촉으로 한정하였고 이때 접촉력 계산을 위해서 페널티법을 사용하였다. 페널티법은 다이면에 침입한 성형체의 절점사이에 가상의 스프링력이 작용하는 것으로 해석하는 방법으로서 계산이 단순하다는 장점이 있다. 이 페널티법에 의한 접촉여부의 결정은 강체 다이에 대한 접촉절점의 침투량  $l$ 이 음수일 경우 접촉이 일어난 것으로 하고, 접촉력벡터는 침투량과 페널티계수  $k_e$  및 접촉절점에서 다이면에 수직인 바깥방향 단위벡터  $\mathbf{n}$ 와의 곱으로 다음과 같이 계산된다.<sup>(16)</sup>

$$\mathbf{f}_s = -lk_e \mathbf{n} \quad \text{if } l < 0 \quad (21)$$

이에 따른 접촉을 포함한 유한요소 공식화는 식 (13)으로 나타난 외연적 차분방정식의 우변의 하중 벡터들의 항에 식 (21)의 접촉력벡터를 추가함으로써 이루어진다.

#### 4. 변형률에너지 함수

고무는 그 거동이 변형률에너지 함수로 표시되는데 이러한 고무의 거동의 특성화를 위해 다양한 형태의 변형률에너지 함수가 보고되고 있다. 이러한 변형률에너지 함수형태는 크게 그 함수를 주 불변항으로 표시하는 것과 주 연신율형태로 표시하는 두 가지로 나눌 수 있다. 이중 유한요소해석에 있어서는 그 적용의 편의성으로 인해 주 불변량으로 표시되는 함수의 형태가 선호되고 있으며 특히 Mooney-Rivlin모델에서 두 개의 계수를 가진 단순 Mooney-Rivlin모델이 수학적 단순성과 그 계수값의 물리적 의미로 인해 가장 많이 사용되고 있다. 그러나 단순 Mooney-Rivlin모델은 다양한 종류의 고무에 대한 응력-변형률관계를 정확하게 표현할 수 없고, 특히 연신율이 큰 구간에서는 적용하기가 어렵다는 단점이 있다. 이에 따라 최근들어 고차항을 가진 Mooney-Rivlin모델이 많이 활용되고 있으며, 본 연구에서는 단순모델과 고차전개를 가지는 Mooney-Rivlin모델을 모두 적용하였다. 고차전개를 가지는 일반화된 Mooney-Rivlin모델에 의한 변형률에너지 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s \quad (22)$$

여기서,  $A_{rs}$ 는 재료상수들이고, Cauchy-Green 변형텐서의 주불변량  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ 는 Cauchy-Green 변형텐서  $\mathbf{G}$ 의 함수로서 각각  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{G})$ ,  $I_2 = (\det \mathbf{G}) \{ \text{tr}(\mathbf{G} - \mathbf{I}) \}$ ,  $I_3 = \det \mathbf{G}$ 로 나타내어진다. 널리 사용되는 단순 Mooney-Rivlin모델은 일반화된 식 (22)에서  $I_1$ ,  $I_2$ 의 선형항만을 취한 것으로 아래와 같이 표현된다.

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) \quad (23)$$

이때 연신율이 큰 경우, 식 (22)의 일반화된 Mooney-Rivlin모델의 3차 급수전개의 형태가 일반적으로 좋은 결과를 보이는 것으로 알려졌다.<sup>(21)</sup> 이에 따라 본 프로그램에서는 일반화된 Mooney-

Rivlin모델의 3차 급수까지 사용할 수 있도록 하였다.

식 (7)과 식 (22)로부터 일반화된 Mooney-Rivlin 모델에 대한 응력텐서는

$$\begin{aligned} S_{ij}^d = & \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n 2r A_{rs} (I_1 - 3)^{r-1} (I_2 - 3)^s \right] \delta_{ij} \\ & + \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 2s A_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^{s-1} \right] \\ & \cdot (I_1 \delta_{ij} - G_{ij}) \end{aligned} \quad (24)$$

로 구해진다. 이때 무변형시 식 (24)의 응력  $S_{ij}^d$ 는  $S_{ij}^d = (2A_{10} + 4A_{01}) \delta_{ij}$ 의 값을 가진다. 그러나 실제로 무 변형시 응력이 0인 상태가 되게하기 위해서 식 (22)의  $W$ 를 보정해 줄 필요가 있다. 이러한 보정을 위해 다양한 방법이 제시되어 왔는데 크게 두 가지로 나누면 하나는 보정항을 첨가하는 방법이고 또 하나는  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ 를 수정하는 방법이다. 전자의 방법의 사용하여 식 (22)를 수정한 보정 변형률에너지 함수  $\overline{W}$ 는 다음과 같이 나타내어진다.<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} \overline{W}(I_1, I_2, I_3) = & W(I_1, I_2) \\ & - (2A_{10} + 4A_{01}) H(I_3) \end{aligned} \quad (25)$$

이때  $H(I_3)$ 는  $I_3$ 가 1일때  $H=0$ ,  $dH/dI_3=1/2$ 을 만족하는 관계를 가져야 한다. 본 연구에서는 이러한 조건을 만족하는 아래의 식으로 표현된

$$H(I_3) = \frac{1}{2} \ln(I_3), \quad H(I_3) = \frac{1}{2}(I_3 - 1) \quad (26)$$

두 가지 종류의 함수형태를 사용하였다. 또한 후자의 방법을 적용하면 보정 변형률에너지 함수  $\overline{W}$ 를 새롭게 정의된 주 불변량  $\overline{I}_1$ ,  $\overline{I}_2$ 의 함수로 다음과 같이 나타내거나<sup>(9)</sup>

$$\overline{W}(\overline{I}_1, \overline{I}_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (\overline{I}_1 - 3)^r (\overline{I}_2 - 3)^s \quad (27)$$

또는 다음과 같은

$$\overline{W} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (I_1 - 3I_3^{1/3})^r (I_2 - 3I_3^{2/3})^s \quad (28)$$

수정된 형태를 사용한다.<sup>(19)</sup> 식 (27)에서  $\overline{I}_1 = I_1 / I_3^{1/3}$ ,  $\overline{I}_2 = I_2 / I_3^{2/3}$ ,  $\overline{I}_3 = I_3^{1/3}$ 로 정의된다. 이러한 보정방식은 변형률에너지 함수를 체적에 관련된 부분과 전단변형에 관련된 두 부분으로 나누게 되고 이는 프로그램의 수렴성을 향상시키는 것으로 알려져 있다.<sup>(9)</sup>

## 5. 비압축성 조건

### 5.1 비압축성 제한방식

위의 공식화에서 효과적인 결과를 얻기 위해서는 식 (3)에 나타난 비압축성 제한방식에 대한 적절한 선택이 요구된다. 본 연구에서는 비압축성 제한을 위해 페널티법과 평균제한법을 사용하였다. 페널티법을 사용할 경우, 식 (3)으로 나타난 물체의 포텐셜에서 비압축성 제한에 의한 에너지 함수항은

$$W(I_3)_{incomp} = \frac{1}{2\alpha} U(I_3)^2 \quad (29)$$

으로 쓸수 있다. 여기서,  $\alpha$ 는 페널티계수,  $U(I_3)$ 는 제한함수 또는 페널티함수이다. 이때 페널티법에서는 비압축성 제한으로 인해 종종 발생하는 잠김현상을 피하기 위해 해당항에 대해서 감차적분을 수행하였다.

평균제한법의 경우, 물체내의 정수압력이라는 물리적인 의미를 가지는 라그랑지승수  $p$ 를 사용하여 혼합공식으로 비압축성 제한항을 구성하고 섭동(perturbation)을 도입하면, 식 (3)의 비압축성 제한에 의한 에너지항은 다음과 같이 나타내어진다.

$$W(I_3)_{incomp} = pU(I_3) - \frac{\epsilon}{2} p^2 \quad (30)$$

이때 평균제한법을 사용하여  $p$ 를 요소의 경계에서는 불연속이 되도록 취하면 변분원리의 구성에 있어서 요소단계에서  $p$ 를 소거할 수 있게 되고, 결과적으로 풀어야 할 미지수의 갯수를 줄일 수 있는 잇점을 가지게 된다. 이에 따른 요소별 압력  $p_h$ 는 다음과 같이 평가된다.

$$p_h = \frac{1}{\alpha} U(I_3)_h \quad (31)$$

여기서,  $U_h$ 는 식 (29)의 제한함수  $U$ 를 압력에 대한 기초함수(basis function)에 의해 이루어진 공간상에 요소별로 투영하여 구하여진 약화된(weakened) 제한함수로서 다음과 같이 표현된다.<sup>(10)</sup>

$$U(I_3)_h = U_h(g_i) \phi_i \quad (32)$$

여기서,  $g_i$ 와  $\phi_i$ 는 각각 가우스 점들(Gaussian points)과 가우스 점들로 이루어지는 기초함수들이다. 요소에 걸쳐 압력이 일정한 경우 위의 식은

$$U(I_3)_h = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} U(I_3) dV \quad (33)$$

로 간략화되고 식 (30)의  $U$ 와  $p$ 에 식 (33)의  $U_h$  및 식 (31)의  $p_h$ 를 대입하면 평균제한법의 비압축성 제한에 의한 에너지항은 결과적으로 페널티법을 사용한 경우와 유사한 형태로 유도된다.

$$\begin{aligned} W(I_3)_{incomp} &= \frac{1}{2\alpha} U(I_3)_h^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{1}{V_e} \int_{V_e} U(I_3) dV \right]^2 \end{aligned} \quad (34)$$

비압축성 거동을 나타내는 제한함수에  $U$ 로서는 전통적으로 사용되어 왔던 다음의 식으로 표현된 함수형태와

$$U(I_3) = I_3 - 1 \quad (35a)$$

Haggbland 등<sup>(10)</sup>에 의해 제안된 아래의 식으로 표현된 함수형태를 적용하였다.

$$U(I_3) = \frac{1}{2} \cdot \ln(I_3) \quad (35b)$$

### 5.2 통합 변형률에너지 함수

식 (25), (27), (28)로 제시된 보정방식을 적용한 일반화된 Mooney-Rivlin 변형률에너지 함수와 식 (29), (34)의 비압축성 제한조건에 의한 에너지 함수항을  $W^U = \overline{W} + W_{incomp}$ 과 같이 통합하면 페널티법의 적용시 다음과 같이 통합된 형태의 다섯 가지 변형률에너지 함수가 유도된다.

$$\begin{aligned} W^U(I_1, I_2, I_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s - (2A_{10} \\ &\quad + 4A_{01}) \frac{\ln I_3}{2} + \frac{1}{2\alpha} (\ln I_3)^2 \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} W^U(I_1, I_2, I_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s - (2A_{10} \\ &\quad + 4A_{01}) \frac{I_3 - 1}{2} + \frac{1}{2\alpha} (I_3 - 1)^2 \end{aligned} \quad (36b)$$

$$\begin{aligned} W^U(I_1, I_2, I_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (I_1 - 3I_3^{1/3})^r (I_2 - 3I_3^{2/3})^s \\ &\quad + \frac{(\ln I_3)^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (36c)$$

$$\begin{aligned} W^U(\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (\overline{I}_1 - 3)^r (\overline{I}_2 - 3)^s \\ &\quad - \frac{(\overline{I}_3 - 1)^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (36d)$$

$$\begin{aligned} W^U(\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (\overline{I}_1 - 3)^r (\overline{I}_2 - 3)^s \\ &\quad + \frac{(\ln \overline{I}_3)^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (36e)$$

평균제한법에서도 동일한 방식으로 통합 변형률

에너지 함수가 유도될 수 있다. 본 연구에서는 각 경우의 통합된 변형률 함수에 대해 유한요소해석시의 정확성 및 수렴성을 비교하여 그 적용의 유효성을 확인하였다.

### 5.3 페널티계수

한편 식 (29), (34)에 나타나는 페널티계수값의 적절한 선택을 위해, Peeken<sup>(12)</sup>은 2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서로부터 유도되는 고무의 응력-변형률 텐서와 선형 탄성이론으로부터 유도되는 응력-변형률 텐서를 비교하여 식 (36a)의 에너지 함수 형태에 대해 다음과 같은 푸아송비  $\nu$ 와 페널티계수와의 관계를 제안하였다.

$$\frac{1}{\alpha} = 6(A_{10} + A_{01}) \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - 4(A_{10} + 2A_{01}) \quad (37a)$$

이 식에서 극한 값으로  $\nu$ 가 0.5로 갈때  $\alpha$ 는 0으로 가게된다. 또한 이 식은 푸아송비를 조정함으로써 압축성을 가진 고무의 해석에도 적용할 수 있는 이점이 있다. 이 유도절차를 이용하여 나머지 식 (36b)-(36e)의 통합 변형률에너지 함수에 대한 페널티계수와 푸아송비의 관계를 유도하여 보면 식 (36b)에 대해서는

$$\frac{1}{\alpha} = 6(A_{10} + A_{01}) \frac{(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (37b)$$

식 (36c)~(36e)에 대해서는

$$\frac{1}{\alpha} = 6(A_{10} + A_{01}) \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - 8(A_{10} + 2A_{01})/3 \quad (37c)$$

의 관계가 구하여 진다. 위의 관계들을 도시하여 보면 동일한 페널티계수에 대해 식 (37a), (37c), (37b)의 순서로 큰 푸아송비의 값을 보인다. 이는 식 (36b)의 모델이 동일한 페널티값에 대해 상대적으로 가장 강한 비압축성 조건을 내포하고 있음을 의미한다. 그러므로 같은 페널티계수를 사용할 경우에도 페널티함수의 선정과 적용방식에 따라 그 응답에 차이가 있음을 알 수 있다.

## 6. 비교 예

### 6.1 내압을 받는 두꺼운 원통의 해석

위에서 제시된 정식화를 적용하여 3차원 유한요소 프로그램을 작성하였다. 3차원 해석은 2차원 해

석에 비해 경계조건, 부하조건 및 접촉조건을 복잡성을 수반하고 다양한 형상해석을 위해 전, 후 처리기가 필수적이다. 본 프로그램에서 전, 후 처리기로는 상용 프로그램 I-DEAS<sup>TM</sup>를 사용하였다.

먼저 다른 시간적분법, 비압축성 제한방식, 변형률에너지 함수형태 등에 따른 영향을 비교, 고찰하기 위해 내압을 받는 두꺼운 무한원통에 대한 해석을 하였다. 이 예제에 대한 비압축성 이론해는 참고문헌 (22)에 제시되어 있다. 사용된 원통의 치수들과 Mooney-Rivlin모델 상수는 Oden<sup>(6)</sup>의 예제를 따랐다. 원통의 내경은 17.78 cm (7.0 in.)이고, 외경은 43.3075 cm (19.625 in.)이며, 단순 Mooney-Rivlin상수는  $A_{10}=551.52$  kPa (80 psi),  $A_{01}=137.88$  kPa (20 psi)이다. 고무의 밀도는  $0.68 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>을 사용하였다. 유한요소 모델링을 위해 150개의 8절점 3차원 육면체 요소를 사용했으며, 식 (36a)~(36e)의 다섯모델에 대해서 페널티법을 적용하여 완전적분과 감차적분을 수행하고 식 (36a)의 모델에 대해서는 대표적으로 평균제한법을 적용하여 그 응답을 고찰하였다. 이때 재료의 비압축성을 고려하기 위해 푸아송의 비를 0.49와 0.499로 채택하였다. 내연적 수치해석의 경우  $P=1.034$  MPa (150 psi) 내압까지 시간단계를 15번 사용하여 구하였다. 외연적 수치해석의 경우에는 시간-내압 입력관계를 137.88 psi/sec (20 psi/sec)의 선형관계를 사용하였고 감쇄항은 무시하였다.

먼저 가압에 따른 변형양상에 대한 유한요소 해석 결과를 비압축성 이론해와 비교하였다. 페널티법의 완전적분 수행시, 푸아송비가 0.49인 경우에 각 모델의 적용에 따른 유한요소해의 오차율은 비압축성 이론해에 대해 16~18% 정도였고, 푸아송비가 0.499인 경우에는 잠김현상이 발생하였다. 페널티법의 감차적분 수행시에는 푸아송비가 0.49와 0.499인 경우 오차율은 각각 1.85~3.82%, 0.54~1.15%였다. 이때 수렴성 및 정확성은 (36a), (36c) 모델이 다른 모델에 비해 약간 좋았으나 큰 차이는 없었고 (36b)의 모델의 적용시에는 발산하였다. 식 (36a), (36c)~(36e) 모델에 대해서 감차적분을 수행한 페널티법을, 식 (36a) 모델에 대해서는 평균제한법을 적용한 경우의 가압에 따른 내경 변위에 대한 유한요소해석 결과(푸아송비=0.499)가 이론해와 비교되어 Fig. 2에 도시되었다.

내압이  $P=1.034$  MPa일때 비압축성 이론해에 대한 원통내부 응력분포의 유한요소해의 오차율을

Table 1에 비교하였다. 페널티법을 적용한 다섯 모델과 평균제한법을 적용한 한 모델에 대해서 완전적분(푸아송비 0.49) 및 감차적분(푸아송비 0.49, 0.499)을 적용한 경우를 고려하였다. 이때 각 경우에 대해서는 내연적 및 외연적 시간적분법을 동시에 적용하였다. 이 문제는 정적해석이므로 당연히 내연법에 비해 외연법의 응답의 오차가 크다. 모델의 대부분은 서로 비슷한 오차율을 보였고 그 중 (36d), (36e) 모델이 약간 나은 결과를 보였다. 결론적으로 내압을 받는 원통의 해석의 경우 식 (36b)의 모델을 제외한 나머지 모델의 사용은 전반적으로 유사한 응답특성을 가져오고, 푸아송비가 0.49보다 큰 경우에 페널티법의 사용할 때에는 반드시 감차적분이 필요함을 알 수 있다. Fig.3은 Fig.2에 제시된 모델 및 외연법을 적용한 모델 (36e)에 대한 응력응답을 이론해와 비교하여 도시하였다.

6.2 사각형 고무판의 팽창(Inflation) 해석

두 번째 예로는 20×20×1.25 cm의 사각형 고무판의 1/4 부분을 450개의 8절점 3차원 육면체 요소를 사용하여 모델링하였다. 이때 경계조건으로는 사면을 고정지지하고 아래면에서 압력을 가하였다. 사용된 고무의 재료특성치들은 위의 예에서 사용된 값과 동일하다. 식 (36a)~(36e)의 다섯모델에 대해서 감차적분을 수행한 페널티법을 식 (36a)의 모델에 대해서는 평균제한법을 적용하였고 내연 및 외연 적분법을 사용하여 그 응답을 고찰하였다. 이때 푸아송의 비는 0.49를 사용하였다. 이 예에 대한 이론해는 제시되어 있지 않으므로 각 모델에 따른 수렴성을 중심으로 비교하고 그 응답은 기존의 상용 프로그램의 응답과 비교하였다. 내연법을 적용할 경우 압력이 421.8 kPa까지 가해질 경우에 식 (36b) 및 (36d) 모델의 적용시에는 계산과중증 발산하였고, 그 외의 모델들의 경우에는 지정압력

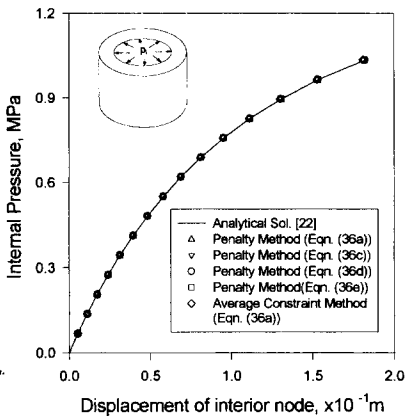


Fig. 2 Pressure-displacement response for thick walled cylinder.

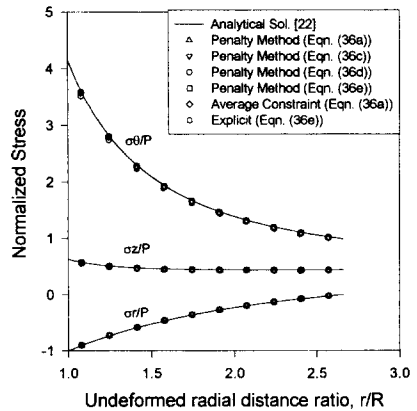


Fig. 3 Various stresses at P=1.034 MPa pressure.

Table 1 Error(%) comparison of FE stress responses according to the application of various models and algorithms. (\* : By using full intergration only)

| Interatiion method               | Model    | Penalty | Average* | Penalty | Penalty | Penalty | Penalty |     |
|----------------------------------|----------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|-----|
|                                  |          | (36a)   | (36a)    | (36b)   | (36c)   | (36d)   | (36e)   |     |
| Full integration, $\nu=0.49$     | Implicit | 6.2     |          |         | 9.2     | 6.4     | 6.2     | 5.3 |
|                                  | Explicit | 8.5     |          |         | Diverge | 8.4     | 7.9     | 7.9 |
| Reduced integration, $\nu=0.49$  | Implicit | 2.2     | 2.1      |         | Diverge | 2.2     | 2.0     | 2.1 |
|                                  | Explicit | 3.3     | 3.1      |         | Diverge | 3.3     | 3.2     | 3.0 |
| Reduced integration, $\nu=0.499$ | Implicit | 1.6     | 1.6      |         | Diverge | 1.8     | 1.5     | 1.5 |
|                                  | Explicit | 2.9     | 2.6      |         | Diverge | 2.8     | 2.6     | 2.6 |



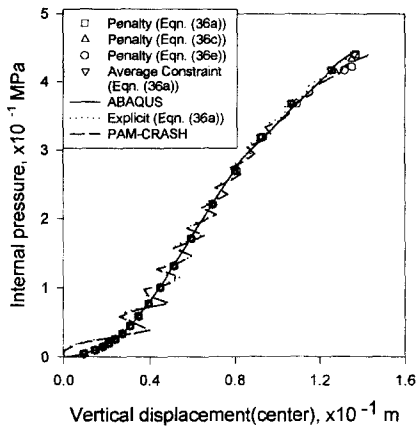


Fig. 4 Response comparisons of various methods for rubber plate inflation.

까지의 전체 반복(iteration) 횟수가 식 (36a), (36a-평균제한법), (36c), (36e)의 적용에 대해 각각 140, 137, 153, 205회로 나타났다. 이때 시간증분 기법은 각 모델에 대해서 동일한 기법을 적용하였다. 외연적 시간적분법의 적용시에도 시간증분횟수의 면에서 그 경향은 일치하였다. 식 (36b) 및 (36d) 모델의 발산의 이유는 페널티 함수의 부적절한 선정에 기인한 것으로 고찰된다. 또한 식 (36c)~(36e)의 모델들은 혼합공식화에 적용할 경우 일반적으로 수렴성을 높이는 것으로 알려져 있지만 페널티법의 적용시에는 수정되지 않은 형태의 주분변량을 사용한 형태의 식에 비해 도리어 수렴성의 저하를 가져오미 관측되었다. 그러므로 첫 번째 비교예와 연결하여 볼때 비슷한 모드의 변형을 가져오는 고무패드 변형해석식 식 (36a-페널티법), (36a-평균제한법)의 적용이 가장 적합함을 알 수 있다. 각 모델에 따른 압력-중심부변위 응답이 내연적 기법에 대해서는 ABAQUS<sup>(23)</sup>와 외연적 기법에 대해서는 PAM-CRASH<sup>TM(17)</sup>의 해석결과와 비교되어 Fig.4에 도시되어 있다. 그 응답은 서로 거의 일치한다.

## 7. 결 론

본 연구는 고무패드성형과정 모델링을 위한 노력의 한 부분으로써, 고무의 변형에 대한 3차원 유한요소 공식화를 전개하였고 비교예를 통하여 통합 변형률에너지 함수에 따른 응답특성을 고찰하였다. 고무패드부의 변형 모델링에서, 내연적 및 외연적

시간적분법의 적용을 위한 적절한 조건의 규명 및 비압축성 조건과 변형률에너지 함수 등의 적용에 따른 효과 및 결과의 비교, 검토 등은 본연구의 후반부 연구결과에서 보인다.<sup>(18)</sup> 유한요소의 정식화는 먼저, 대변형을 고려하여 total Lagrangian 기술을 채택하였다. 비압축성 혹은 약간의 압축성을 고려하기 위해 페널티법을 사용하였으며, 수치결과의 비교를 위해 혼합공식의 일종인 평균제한법도 적용하였다. 제한함수의 형태는 패드부 해석시의 적합성을 검토하기 위해 몇 가지 제시된 형태를 적용하였다.

고무를 특성화하기 위한 변형률에너지 함수는 고차 전개형태의 일반화된 Mooney-Rivlin 모델 (Generalized Mooney-Rivlin model)로 확장하였고, 흔히 사용되는 단순 Mooney-Rivlin 모델과의 비교, 검토를 준비하였다. 본 연구에서는 일반화된 Mooney-Rivlin 형태의 변형률에너지 함수에 비압축성에 관련된 제한함수의 항을 추가한 형태로서 다양한 통합 변형률에너지 함수형태를 제시하고, 페널티계수와 푸아송비간의 연결식을 기존의 아이디어를 이용하여 각 함수형태에 대해 유도하였다.

고무패드성형에서 시간적분법의 효용성을 검토하기 위해 내연적 시간적분법과 중앙차분법에 근거한 외연적 시간적분법을 각각 적용하였으며, 각 방법에서 제한조건들을 검토하였다. 내압을 받는 고무 실린더 및 사각형 고무판의 수치결과를 통하여 변형률에너지 함수들의 정확성 및 수렴성과 적용의 유효성을 고찰하였으며, 이러한 결과는 본 연구의 후반부에서 고무패드 변형해석 중에 서로 다른 시간적분법, 비압축성 적용방법, 변형률에너지 함수 등의 적용에 대한 결과들을 비교 검토하는 목적의 기초 정보로 사용된다.

## 후 기

본 연구의 일부는 한국과학재단(과제번호 93-0200-02-01-3)의 지원을 받아서 수행한 결과이며, 저자들은 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) ASM international, 1988, *Metal Handbook 9th ed. edited by Semiatin, S. I.*, Vol. 14, pp. 605~615.
- (2) 신수정, 이태수, 오수익, 1995, "고무패드성형

- 법에서 패드부 유한요소해석 (1),” 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, A, pp. 331~336.
- (3) Shin, S. J., Oh, S. I. and Lee, T. S., 1996, “Finite Element Investigation of Pad Deformation in Rubber-pad Sheet Metal Forming Process,” *3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 141~146.
- (4) 신수정, 이태수, 오수익, 1997, “고무패드성형법의 유한요소 모델링,” 대한기계학회 춘계학술대회, A, pp. 576~582.
- (5) Oden, J. T. and Key, J. E., 1970, “Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution,” *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 6, pp. 497~518.
- (6) Scharnhorst, T. and Pian, T. H. H., 1978, “Finite Element Analysis of Rubberlike Materials by a Mixed Model,” *J. Numer. Mech. Engng*, Vol. 12, pp. 665~676.
- (7) Jankovich, E., Leblane, F., Dyrand, M. and Bercovier, M., 1981, “A Finite Element for the Analysis of Rubber Parts, Experimental and Analytical Assessment,” *Comput. Struct.*, Vol. 14, pp. 385~391.
- (8) Sussman, T. and Bathe, K. J., 1987, “A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis,” *Computer Struct.*, Vol. 26, pp. 357~409.
- (9) Chang, T. Y. P., Saleeb, A. F. and Li, G., 1991, “Large Strain Analysis of Rubber Like Materials Based on a Perturbed Lagrangian Variational Principle,” *Computational Mechanics*, Vol. 8, pp. 221~233.
- (10) Haggblom, B. and Sundberg, J. A., 1983, “Large Strain Solutions of Rubber Component,” *Comput. Struct.*, Vol. 17, pp. 835~843.
- (11) Malkus, D. S., Hughes, T. J. R., 1978, “Mixed Finite Element Method — Reduced and Selective Integration Techniques: a Unification Concepts,” *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. 15, pp. 63~81.
- (12) Peeken, H., Dopfer, R. and Orschall, B., 1987, “A 3-D Rubber Material Model Verified In a User-supplied Subroutine,” *Comput. Struct.*, Vol. 26, pp. 181~188.
- (13) Gadala, M. S., 1992, “Alternative Methods for the Solution of Hyperelastic Problems with Incompressibility,” *Comput. Struct.*, Vol. 42, pp. 1~10.
- (14) Schweizerhof, Nilsson, K. L. and Hallquist, J. O., 1992, “Crashworthiness Analysis in the automotive industry,” *Int. J. of Computer Applications in Technology*, Vol. 5, pp. 134~156.
- (15) Rebelo, N., Nagtegaal, J. C. and Taylor, L. M., 1992, “Comparison of Implicit and Explicit Finite Element Methods in the Simulation of Metal Forming Process,” *Numiform 92*, pp. 99~108.
- (16) Hallquist, J. O., 1991, *LS-Dyna3D Theoretical Manual*, Livermore Software Technology
- (17) EMI Software Production, 1996, *PAM-CRASH Manual*.
- (18) 신수정, 이태수, 오수익, 1998 “고무패드 변형의 3차원 유한요소해석 (2),” 대한기계학회 논문집 (A), 제22권, 제1호, pp. 121~131.
- (19) Fried, I. and Johnson, A. R., 1988, “A Note on Elastic Energy Density Functions for Largely Deformed Compressible Rubber Solids,” *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. 69, pp. 53~64.
- (20) Zhong, Z., 1993, “Finite Element Procedures for Contact-impact Problems,” Oxford University Press.
- (21) James, A. G., Green, A. and Simpson, G. M., 1975, “Strain Energy Function of Rubber. I. Characterization of Gum Vulcanizates,” *J. Appl. Poly. Sci.*, Vol. 19, pp. 2033~2058.
- (22) Green, A. E., Zerna, W., 1968, “Theoretical Elasticity,” Oxford at the Clarendon Press.
- (23) Habbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., 1995, *ABAQUS Theory Manual*.