

축대칭 원통좌표계에서 수정된 구분종좌법에 의한 복사열전달 해석

김 만 영* · 백 승 욱**

(1997년 8월 11일 접수)

Radiation in Axisymmetric Cylindrical Coordinates with the Modified Discrete-Ordinates Method

Man Young Kim, and Seung Wook Baek

Key Words : Modified Discrete-Ordinates Method (수정된 구분종좌법), Directional Weight (방향가중치), Axisymmetric Coordinates (축대칭 좌표계), Finite-Volume Method (유한체적법)

Abstract

The conventional discrete-ordinates method (DOM) is modified and developed for the analysis of two-dimensional axisymmetric cylindrical enclosure with curved wall. The objective of the present work is to extend the capability of the conventional DOM into a general axisymmetric geometry like nozzle-shaped enclosure, by adopting the arbitrary control angle as was done in the finite-volume method (FVM), while keeping the same two-dimensional solution procedure as in the conventional DOM. The present method is validated by applying it to three different benchmark problems of axisymmetric enclosure containing absorbing, emitting and scattering medium. Results presented in this work not only support the solution accuracy, but also moderate efficiency in the numerical calculation of axisymmetric radiation problem.

기 호 설 명

D_{ci}^{mn}	: 방향가중치, 식 (6)
E_b	: πI_b
I^{mn}	: mn 방향의 복사강도, W/m^2sr
I_b	: 흑체복사강도, W/m^2sr
\vec{n}_w	: 벽면에서의 단위수직 내향 벡터
$P_j(\cos \Psi)$: Legendre 다항식, 식 (16)
r, z	: 원통좌표계
r_c	: 실린더의 반지름, m
\vec{r}	: 위치 벡터
S_R^{mn}	: 생성항, 식 (7)

\vec{s}	: 복사방향 벡터
T	: 온도, K
z_c	: 실린더의 높이, m

그리스문자

$\alpha_{m\pm 1/2}$: 방향 미분항의 계수, 식 (8)
ΔA_i	: 검사체적 경계면의 면적, m^2
ΔV	: 검사체적의 체적, m^3
$\Delta \Omega^{mn}$: 방향의 검사각도, 식 (4), sr
ϵ_w	: 벽면 방사율
θ, ϕ	: 극각 및 방위각, rad
χ_a	: 흡수 계수, m^{-1}
μ, η, ξ	: 방향 여현, 식 (2)

*회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원

**회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

σ	: Stefan-Boltzmann 상수, = $5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$
σ_s	: 산란 계수, m^{-1}
τ_0	: 광학 두께
Φ	: 산란위상함수
Ψ	: 산란각
ω_0	: 산란 알베도, $\sigma_s / (\sigma_a + \sigma_s)$
상첨자	
mn	: 복사 방향
하첨자	
E, W, T, B	: 검사체적 P 주위의 격자점
e, w, t, b	: 검사체적 P 의 경계면
P	: 격자점

1. 서론

흡수, 방사 및 산란하는 매질에 대한 복사열전달의 해석은 보일러나 노, 미분탄 연소기 또는 로켓 추진기관 등 고온의 열발생 장치에 있어서 필수적이며, 이 경우 이들 대부분의 연소기는 실제 응용 차원에서 축대칭 원통좌표계에서의 해석을 필요로 한다. 본 연구는 이러한 축대칭 원통좌표계에서 구분종좌법(DOM) 및 유한체적법(FVM)을 수정하여 보다 효율적이고 적용하기 쉬운 해석 방법의 개발을 목표로 하고 있다.

복사전달 방정식(RTE)의 수학적인 적분/미분 특성으로 인하여 매우 간단한 형상과 조건에 대한 극히 제한된 엄밀해가 존재할 뿐이고, 따라서 주로 수치해석적인 방법을 통한 연구가 주로 이루어져 왔다. 하지만 기존의 많은 해석 방법 중에서 최근 십수년간의 연구들은 유체의 유동과 화학반응, 기타 다른 열전달을 함께 다루어야 하는 연소기의 모사에 있어서 격자 사용의 적합성, 해의 정확도 및 계산시간의 효율성 등으로 인하여 구분종좌법^(1~4, 14, 15)을 선호하고 있는 추세이다. 축대칭 구분종좌법의 자세한 내용은 Carlson과 Lathrop,⁽¹⁾ Fiveland,⁽²⁾ Jamaluddin과 Smith⁽³⁾ 및 Baek 등⁽⁴⁾에서 찾을 수 있다. 하지만, 구분종좌법에서 종좌(ordinate)의 선택은, 물리계 내 물성치의 대칭성과 불변성에도 불구하고 가변적이기는 하지만 일반성을 유지하기 위하여 완전한 대칭성을 이루는 구분구간과 이에 대응하는 가중치를 주로 선택하기 때문에 평행광(collimated beam)을 모사할 때 어려움이 있을 뿐만 아니라, 직선으로 진행되는 광선을 원통이나 구

면좌표계에서 고려할 때 방향미분항의 특별한 처리를 요구한다. 한편, Cheong과 Song⁽⁵⁾이 제안한 구분종좌보간법(DOIM)은 2차원⁽⁵⁾ 및 3차원⁽⁶⁾ 비직교 좌표계 문제를 효율적으로 해석할 수 있으나, 축대칭 원통좌표계의 경우 뒤에 서술하게 될 유한체적법과 같이 계산량이 많은 3차원 해석이 필요하다.

최근에 Raithby와 Chui⁽⁷⁾ 및 Chai 등⁽⁸⁾은 구분종좌법의 한 갈래인 유한체적법을 제시하여 기존의 구분종좌법이 가지고 있는 몇 가지의 단점을 보완하였다. 즉, 비직교 좌표계의 사용을 가능하게 하였을 뿐만 아니라 임의의 검사각도를 사용할 수 있도록 하였다. 한편, Chui 등⁽⁹⁾은 3차원 사상(mapping)을 통하여 2차원 축대칭 복사열전달의 해석을 하였으며, Kim과 Baek⁽¹⁰⁾은 축대칭/비대칭 원통좌표계에서 구분종좌법과 유한체적법의 비교 연구를 수행하였다. 하지만 Chui 등⁽⁹⁾의 3차원 사상은, 비록 구분종좌법과는 달리 방향미분항이 나타나지 않는다는 장점이 있지만, 3차원 계산을 수행해야 하기 때문에 계산순서가 복잡해지고 계산량이 많아진다는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 구분종좌법과 유한체적법의 장점을 결합하여 보다 효율적인 축대칭 해석방법, 즉, 구분종좌법처럼 계산순서가 간단하면서도 유한체적법처럼 임의의 검사각도를 사용할 수 있는 방법(MDOM)을 제안한다. 즉, Baek과 Kim⁽¹¹⁾의 연구를 확장하여 격자 비틀림이나 곡률이 있는 노즐 또는 디퓨저 모양을 갖는 축대칭 용기내의 복사열전달 해석을 수행하고자 한다. 아래에서는 계단차분법과 방향가중치를 이용한 차분방정식을 유도한 후, 축대칭 용기안에 채워진 흡수, 방사 및 산란하는 매질에 대한 세가지 예제를 검토함으로써 해의 정확성 및 해석방법의 효율성을 검증하기로 한다.

2. 이론해석

2.1 수정된 구분종좌법(Modified Discrete-Ordinates Method; MDOM)

임의의 위치, \vec{r} 에서 경로, \vec{s} 를 따라 흡수, 방사 및 산란하는 매질의 복사강도는 다음의 복사전달 방정식을 따른다.⁽¹²⁾

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rI(\vec{r}, \vec{\Omega})] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} [\eta I(\vec{r}, \vec{\Omega})]$$

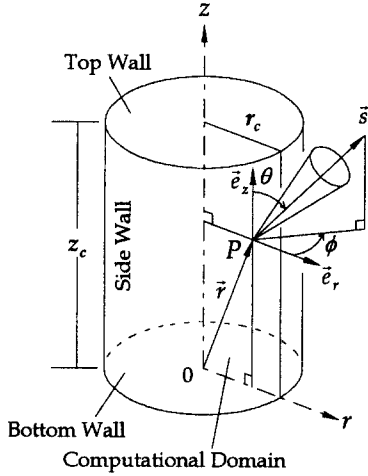


Fig. 1 Schematic of the cylindrical enclosure and its coordinate system.

$$\begin{aligned}
 & + \xi \frac{\partial}{\partial z} [rI(\vec{r}, \vec{\Omega})] \\
 & = -(\chi_a + \sigma_s) I(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \chi_a I_b(\vec{r}) \\
 & + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega'} I(\vec{r}, \vec{\Omega}') \Phi(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega'
 \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서

$$\mu = \sin \theta \cos \phi, \quad \eta = \sin \theta \sin \phi, \quad \xi = \cos \theta \quad (2)$$

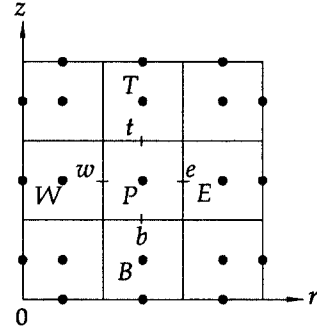
로서 방향 여현이며, θ 는 극각, ϕ 는 방위각을 나타낸다. 식 (1)의 좌변항은 $\vec{s} \cdot \nabla I(\vec{r}, \vec{s})$ 를 원통좌표계로 풀어 쓴 것이며, 이로 인하여 방향미분항(좌변 둘째항)이 나타나고 있음을 알 수 있다. 즉, 이 방향미분항은, 실제로는 직선으로 진행되는 광선을 Fig. 1과 같은 $r-z$ 좌표계에서 고려하기 때문에 나타나는 항으로서, Chui 등⁽⁹⁾은 원통형 문제를 3차원 사상을 이용하여 $x-y-z$ 직각좌표계 문제로 해석함으로써 이 항이 나타나지 않도록 하였지만, 본 연구에서는 2차원 축대칭 $r-z$ 좌표계를 유지하여 Carlson과 Lathrop⁽¹⁾의 직접차분기법을 이용하여 다음과 같이 기존의 구분중좌법처럼 처리한다. 즉,

$$\frac{\partial(\eta_{mn} I^{mn})}{\partial \phi} = \frac{\alpha_{mn+1/2} I^{mn+1/2} - \alpha_{mn-1/2} I^{mn-1/2}}{\Delta \Omega^{mn}} \quad (3)$$

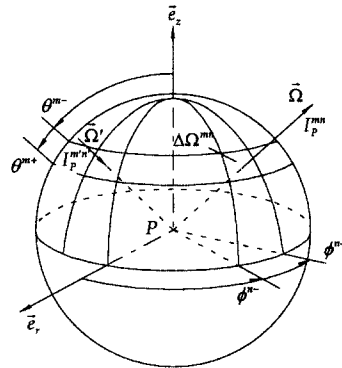
여기에서

$$\Delta \Omega^{mn} = \int_{\phi_n^-}^{\phi_n^+} \int_{\theta_m^-}^{\theta_m^+} \sin \theta d\theta d\phi \quad (4)$$

로서, Fig. 2(b)에 도시된 검사각도를 나타내고,



(a)



(b)

Fig. 2 Spatial control volume and control (solid) angles: (a) control volume, (b) control angle.

$\alpha_{mn\pm 1/2}$ 는 방향미분항의 계수이다. 여기에서, 검사각도의 경우 대칭성으로 인하여 $\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Delta \Omega^{mn} = 2\pi$ steradians 만을 고려하는 것으로 충분하다.

차분방정식을 얻기 위하여 위 식 (3)을 식 (1)에 대입한 후 유한체적법에서와 같이 검사체적과 검사각도에 대하여 적분을 수행하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=e,w,t,p} I_i^{mn} \Delta A_i D_{ci}^{mn} - \frac{\Delta V}{r_p} (\alpha_{mn+1/2} I_p^{mn+1/2} - \alpha_{mn-1/2} I_p^{mn-1/2}) \\
 & + (\chi_a + \sigma_s)_p I_p^{mn} \Delta V \Delta \Omega^{mn} = (S_R^{mn})_p \Delta V \Delta \Omega^{mn} \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기에서

$$D_{ci}^{mn} = \int_{\phi_n^-}^{\phi_n^+} \int_{\theta_m^-}^{\theta_m^+} (\vec{s} \cdot \vec{n}_i) \sin \theta d\theta d\phi \quad (6)$$

$$S_R^{mn} = \chi_a I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^N I^{m'n'} \Phi_{m'n'-mn} \Delta \Omega^{m'n'} \quad (7)$$

윗 식에서 D_{ci}^{mn} 은 방향가중치(directional

weight)로서 구분중좌법의 방향 여현 (즉, μ , η , ξ)과 가중치(weight, w^m)의 곱에 해당하는 것이다. 한편, 방향미분항의 계수 $\alpha_{mn\pm 1/2}$ 는 모든 방향 및 공간에 대하여 복사강도가 균일하고 $(k_a + \sigma_s)_P \Delta I_P^{mn} = S_R^{mn} = S_R^{mn}$ 인 상태를 고려함으로써⁽¹⁾ 다음의 순환식처럼 격자계의 기하학적 변수와 방향가중치의 조합으로 구할 수 있다. 즉,

$$\alpha_{mn-1/2} - \alpha_{mn+1/2} = -\frac{\gamma_P}{\Delta V} \sum_{i=e,w,t,b} \Delta A_i D_{ci}^{mn} \quad (8)$$

이때 초기값으로 $\alpha_{mN+1/2} = 0$ 을 지정한다.

격자점의 복사강도로부터 검사면의 복사강도를 구하기 위해 다음과 같은 계단차분법(step scheme)^(8,11)을 사용하고,

$$I_e^{mn} D_{ce}^{mn} = I_P^{mn} \max(D_{ce}^{mn}, 0) - I_E^{mn} \max(-D_{ce}^{mn}, 0) \quad (9)$$

검사각도의 경계면에 대해서도

$$I_P^{mN-1/2} = I_P^{mn}, \quad m=1, \dots, M, \quad n=1, \dots, N \quad (10)$$

$$I_P^{mN+1/2} = I_P^{mN}, \quad m=1, \dots, M \quad (11)$$

를 사용하면 I_P^{mn} 에 대한 최종적인 차분방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$a_P^{mn} I_P^{mn} = a_E^{mn} I_E^{mn} + a_W^{mn} I_W^{mn} + a_T^{mn} I_T^{mn} + a_B^{mn} I_B^{mn} + b_P^{mn} \quad (12)$$

여기에서

$$a_P^{mn} = \max(-\Delta A_i D_{ci}^{mn}, 0) \quad (13)$$

$$a_B^{mn} = \sum_{i=e,w,t,b} \max(\Delta A_i D_{ci}^{mn}, 0) + (x_a + \sigma_s)_P \Delta V \Delta \Omega^{mn} + \frac{\Delta V}{\gamma_P} \alpha_{mn-1/2} \quad (14)$$

$$b_P^{mn} = (S_R^{mn})_P \Delta V \Delta \Omega^{mn} + \frac{\Delta V}{\gamma_P} \alpha_{mn+1/2} I^{mn+1/2} \quad (15)$$

이때, 식 (13)에서 I 는 E , W , T 및 B 를 나타내고, i 는 각각에 대응하는 e , w , t 및 b 를 나타낸다. 직각 원통 좌표에 대한 최종 차분방정식은 Baek and Kim⁽¹¹⁾에서 찾을 수 있다. 한편, 위 식은 적당한 기하학적 관계식과 함께 $\alpha_{mn\pm 1/2} = 0$ 을 이용하면 2차원 비직교 좌표계에서의 유한체적 최종차분식⁽¹³⁾이 된다.

2.2 검사체적과 검사각도

본 연구에 사용된 검사체적과 검사각도를 Fig. 2

에 도시하였다. 검사체적은 $(N_r \times N_z)$ 개로 나뉘어지고, 검사각도는 $(N_\theta \times N_\phi) = (M \times N)$ 개로 구분되며, 이는 구분중좌법 및 유한체적법의 그것과 서로 같다. 복사강도는 고려하고 있는 r - z 평면에 대하여 서로 대칭이 되므로 2π steradians만을 고려하고 있는 것으로 충분하다. 한편, 복사방향의 개수로 본다면 $(N_\theta \times N_\phi) = (6 \times 4)$ 의 검사각도는 기존의 S_8 구분중좌법에 해당한다.

2.3 보조방정식

산란위상함수는 입사된 복사에너지의 각도에 대한 확률분포를 나타내는 것으로서, 본 연구에서는 다음의 식으로 표현되는 Legendre 다항식 근사⁽¹⁴⁾를 이용한다. 즉,

$$\Phi_{m'n'-mn} = \Phi(\cos \Psi) = \sum_{j=0}^J C_j P_j(\cos \Psi) \quad (16)$$

여기에서 Ψ 는 입사방향, \mathcal{S}' 과 산란방향, \mathcal{S} 사이의 산란각을 나타내며, C_j 는 팽창계수로서 입자의 크기와 굴절지수에 의존한다. 본 연구에서는 Kim⁽¹⁴⁾의 전방산란 (F2, F3), 및 후방산란 (B1, B2) 위상함수를 사용한다.

한편, 확산적으로 방사 및 반사하는 벽면을 떠나는 복사강도는 다음의 식처럼 방사 및 반사된 복사강도의 합으로 표현된다. 즉,

$$I_w^{mn} = \epsilon_w I_{bw} + \frac{1-\epsilon_w}{\pi} \sum_{m'n', D_{cw}^{m'n'} < 0} I_w^{m'n'} |D_{cw}^{m'n'}| \quad \text{for } D_{cw}^{mn} > 0 \quad (17)$$

여기에서 D_{cw}^{mn} 은 벽면에서의 방향가중치로서 복사강도가 벽면에서 내부 매질로 떠날 때 양의 값이 된다. 본 연구에 사용된 수렴조건은

$$\max(|I_P^{mn} - I_P^{mn,old}| / I_P^{mn}) \leq 10^{-6} \quad (18)$$

이며, 수렴된 복사강도가 구해지면 벽면에서의 복사열유속은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$q_w^R = \int_{\Omega=4\pi} I(\vec{r}_w, \vec{s}) (\vec{s} \cdot \vec{n}_w) d\Omega = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_w^{mn} D_{cw}^{mn} \quad (19)$$

3. 결과 및 고찰

수치해의 검증을 위하여 세가지 예제, 즉, (1) 순수 산란 또는 흡수/산란하는 등은 매질의 복사열 전달, (2) 노즐 모양 실린더 내의 복사열전달 및

(3) 디퓨저 모양 실린더 내의 복사열전달 문제를 고려하기로 한다. 한편, 아래에 제시된 모든 예제에 있어서 등각격의 극각 ($\Delta\theta = \theta^{m+} - \theta^{m-} = \pi/M$) 및 방위각 ($\Delta\phi = \phi^{m+} - \phi^{m-} = \pi/N$)을 사용한다.

3.1 순수 산란 또는 흡수/산란하는 등은 매질의 복사열전달 해석

원통의 옆 벽면이 확산적으로 방사하는 뜨거운 벽면 ($E_{bw}=1$)이고 윗 벽면과 아랫벽은 차가운 상태 ($T_w=0$ K)이며, 모든 벽면은 흑체 ($\epsilon_w=1$)이고 원통의 길이와 반경은 각각 $z_c=2$ m와 $r_c=1$ m이다. 용기 안에 채워진 차가운 매질 ($T_g=0$ K)은 순수 산란 ($\omega_0=1$ 일 때) 또는 흡수/산란 ($\omega_0=0.5$ 일 때)을 한다. Jendoubi 등⁽¹⁵⁾의 결과와 비교하기 위하여 등방산란 및 Kim⁽¹⁴⁾의 전방(F2, F3) 및 후방(B1, B2) 산란위상함수를 고려한다.

Figure 3(a)는 순수산란 매질의 경우 산란위상함수의 영향을 고찰한 것으로서 전방산란의 경우가 후방산란의 경우보다 뜨거운 옆벽면에서 차가운 매질로 보다 많은 복사에너지를 전달하고 있는 것을 알 수 있다. 한편 산란알베도가 $\omega_0=0.5$ 이고 F3 산란위상함수일 때 광학두께 $\tau_0 = (\alpha_a + \sigma_s) r_c$ 의 변화에 따른 복사열유속이 Fig. 3(b)에 도시되어 있다. 광학두께가 커질수록 매질에 의해 보다 많은 에너지가 흡수되고 있기 때문에 점점 많은 복사에너지가 매질로 전달되고 있다.

Figure 3에 나와 있는 Jendoubi 등⁽¹⁵⁾의 결과는 구분종좌법을 사용한 것이며, Kim과 Baek⁽¹⁰⁾의 결과는 $(N_r \times N_{\theta_0} \times N_z) \times N_{\theta} = (15 \times 10 \times 30) \times 10$ 의 유한체적법을 사용하였고, 수정된 구분종좌법은 $(N_r \times N_z) \times (N_{\theta} \times N_{\theta_0}) = (15 \times 30) \times (10 \times 10)$ 을 사용한 것으로서, 이 세 가지 방법에 의한 결과들은 서로 잘 일치하고 있다. Table 1은 유한체적법과 수정된 구분종좌법의 계산시간을 비교한 것이다. 후방산란의 경우일수록 점점 많은 계산시간이 소모되고 있으며 수정된 구분종좌법이 유한체적법에 비해 약 1.5배의 시간이 필요함을 보이고 있다.

3.2 노즐 모양 실린더 내의 복사열전달 해석

두번째 예제로서 길이가 $z_c=4$ m인 노즐 모양의 실린더 내의 복사열전달 해석을 수행한다. 높이 z 에 따른 실린더의 반경은

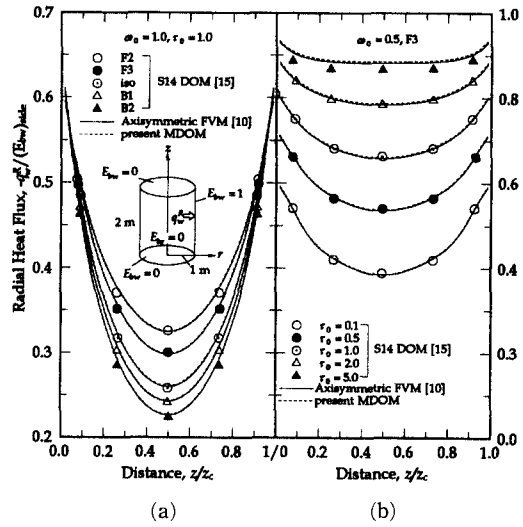


Fig. 3 Effects of anisotropic scattering and optical thickness on the radial radiative heat flux distribution for a right cylindrical enclosure: (a) effect of scattering phase function, (b) effect of optical thickness.

Table 1 Comparisons of the computation time (seconds) and number of iterations (in parenthesis) between the FVM and the MDOM on a HP 712/75 workstation for a right cylindrical enclosure.

ϕ	FVM	MDOM
F2	55.0(18)	88.3(59)
F3	60.5(20)	92.3(61)
iso	67.4(22)	95.8(69)
B1	71.2(23)	111.0(74)
B2	75.9(25)	122.0(78)

$$\frac{r}{z_c} = \frac{1}{4} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2z_c} z\right) \right] \quad (20)$$

으로서 Fig. 4에 도시된 노즐 모양의 형태를 갖는다. 모든 벽면은 차가운 흑체이고, 흡수 및 방사하는 뜨거운 매질의 온도는 100 K로 유지된다. 이 예제의 경우 문헌상에 발표된 비교 데이터가 없기 때문에 본 연구에서는 3차원 유한체적법⁽¹⁶⁾ 및 축대칭 유한체적법⁽¹⁷⁾을 이용하여 비교 데이터를 구하였다. Figure 4는 각 방법에 사용되는 격자계를 나타낸다. MDOM의 경우 2차원 계산으로 충분하

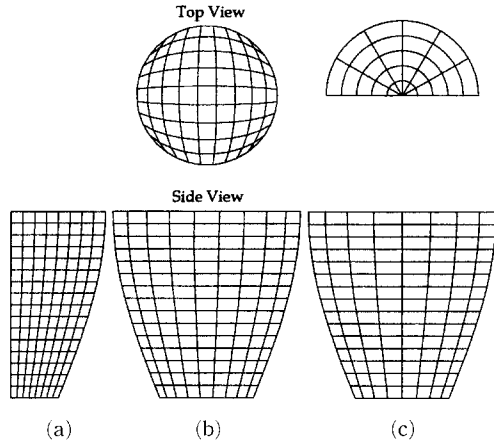


Fig. 4 Top and side views of the spatial grids used in: (a) the MDOM, (b) the three-dimensional FVM, and (c) the axisymmetric FVM.

지만 축대칭 유한체적법의 경우 그림에 보이는 것과 같은 3차원 격자계를 필요로 한다. 한편, 이 예제처럼 벽면이 곡면인 경우, 벽면에 놓인 입체각의 내부에 벽면이 놓이게 되는 입체각 중첩 (control angle overlap) 현상이 나타난다. 이 문제를 해결하는 두 가지 방법^(10, 18, 19) 중 본 연구에서는 bold approximation^(10, 19)을 사용한다. 즉, 내부 검사체적에서와 마찬가지로 방향각중치를 이용하여 벽면으로 들어오고 나가는 복사강도를 구분하는 것이다.

바깥쪽 차가운 벽면에 도달하는 무차원 복사열유속을 Fig. 5에 도시하였다. $\kappa_a = 5.0 \text{ m}^{-1}$ 일 때 광학두께가 커짐으로 인하여 벽면에 도달하는 복사강도는 벽면에 인접한 뜨거운 매질의 직접적인 영향 때문에 무차원 복사열유속의 크기가 1에 근접한다. 하지만 $z/z_c = 0$ 및 1 부분에서는 차가운 윗벽 및 아랫벽으로 인하여 복사열유속이 급격히 감소함을 알 수 있다. 또한, 흡수계수가 감소함에 따라 매질의 방사(emission)와 차가운 윗벽 및 아랫벽의 far-reaching effect에 의해 복사열유속이 감소한다. 한편, Fig. 5에 도시된 검사체적 및 검사각도의 갯수를 변화시켰을 때의 MDOM의 결과를 보면, 검사체적의 갯수보다 검사각도의 영향이 더 크음을 알 수 있다. 즉, 검사체적의 갯수가 감소하더라도 검사각도의 갯수가 증가했을 때 오히려 정확도가 증가하는 것이다. 이를 정량적으로 Table 2에 나타내었는데, 이 때의 오차는

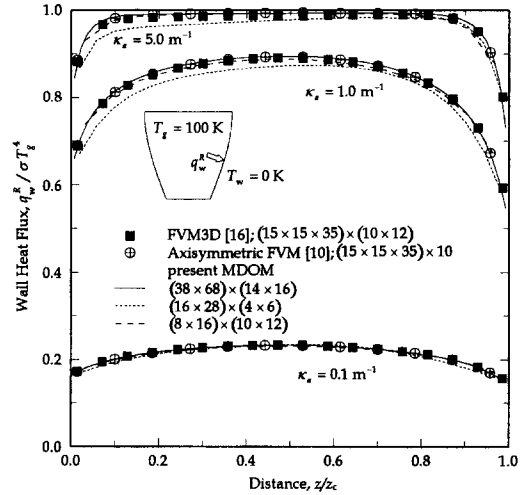


Fig. 5 Comparison of radiative wall heat flux along the side wall of a nozzle-shaped enclosure.

Table 2 Comparison of the relative average error (%) and computation time (seconds) on a HP 712/75 workstation for a nozzle-shaped cylindrical enclosure. The grid systems of $(N_r \times N_z) \times (N_\theta \times N_\phi) = (16 \times 28) \times (4 \times 6)$ and $(8 \times 16) \times (10 \times 12)$ are used.

$\kappa_a (\text{m}^{-1})$	rror (%)	Time (seconds)
0.1	2.38 ^a /0.54 ^b	7.7 ^a /41.7 ^b
1	3.75/0.84	7.7/41.6
5	2.96/0.49	5.1/32.3

^a $(16 \times 28) \times (4 \times 6)$

^b $(8 \times 16) \times (10 \times 12)$

$$\text{Error} = \sum_{\text{node}} \frac{|q_w^R - q_w^{R,dense}|}{N_z} / q_w^{R,dense} \quad (21)$$

로서 평균오차를 나타내며, $q_w^{R,dense}$ 는 가장 조밀한 격자계인 $(N_r \times N_z) \times (N_\theta \times N_\phi) = (38 \times 68) \times (14 \times 16)$ 을 사용했을 때의 열유속이다. 하지만, 검사각도의 증가로 인하여 더욱 많은 계산시간이 소요되고 있음을 알 수 있다.

3.3 디퓨저 모양 실린더 내의 복사열전달 해석

마지막 예제는 $z_c = 2 \text{ m}$ 인 디퓨저 모양의 축대칭 실린더 내의 복사열전달을 해석한다. Figure 6에 형상의 개요가 나와 있다. 옆 벽면은 z -축에 대하여 30° 기울어져 있는 차가운 흑체이다. 아랫벽은

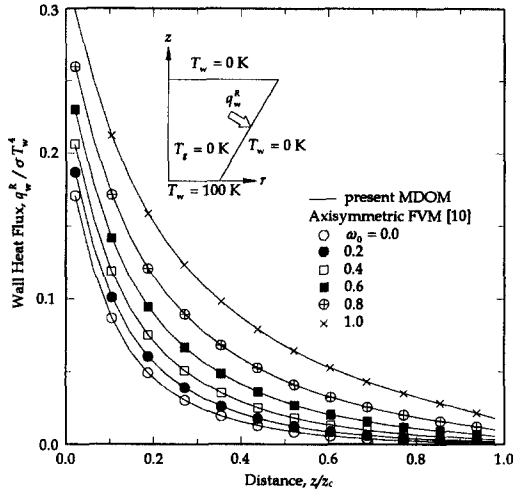


Fig. 6 Comparison of radiative wall heat flux along the side wall of a truncated cone-shaped enclosure.

$r_c=1$ m인 뜨거운 흑체이고, $z_c=2$ m에 있는 윗벽은 $r_c=1+z_c \tan 30^\circ$ m인 차가운 흑체이다. 한편, $\beta_0=1$ m⁻¹인 차가운 매질은 F2 전방산란위상함수를 갖는다. 여기에서 $\omega_0=0$ 이면 순수 흡수, $\omega_0=1$ 이면 순수 산란하는 매질임을 나타낸다. 이 경우 역시 비교 데이터가 없기 때문에 축대칭 유한체적법⁽¹⁷⁾을 이용하여 기준해를 구하였다. 이 예제에서는 유한체적법의 경우 $(N_r \times N_{\theta_0} \times N_z) \times N_\theta = (12 \times 8 \times 24) \times 12$, 그리고 수정된 구분중좌법의 경우 및 $(N_r \times N_z) \times (N_\theta \times N_\phi) = (12 \times 24) \times (12 \times 8)$ 의 격자계를 사용하였다. 여기에서 $N_\theta=12$ 로서 $\Delta\theta=15^\circ$ 이므로 앞의 예제에서와 같은 입체각 중첩 현상이 나타나지 않는다.

Fig. 6에 산란알베도의 변화에 따른 복사열유속을 축대칭 유한체적법의 결과와 함께 도시하였다. 차가운 매질이 순수 흡수체에서 순수 산란체로 바뀌는 동안 뜨거운 아랫 벽면에서 나온 광자가 차가운 옆 벽면 쪽으로 보다 많이 산란되기 때문에 벽면 복사열유속이 전체적으로 증가하고 있다. 축대칭 유한체적법에 의한 결과와 MDOM의 결과는 거의 일치하고 있으며 유한체적법의 결과를 기본데이터로 하였을 때 두 방법에 의한 결과 사이의 최대 평균오차는 0.41%로서 Table 3에 정리되어 있다. 한편, 산란알베도가 증가할수록 생성항으로 인하여 계산시간이 증가하며, MDOM은 축대칭 유한체적법보다 약 1.5배의 계산시간이 필요하다.

Table 3 Comparison of the relative average error (%) and computation time (seconds) on a HP 712/75 workstation for a diffuser-shaped cylindrical enclosure.

ω_0	Error (%)	Time(seconds)
		MDOM / FVM
0.0	0.41	77.0 / 48.7
0.2	0.37	101.5 / 63.7
0.4	0.33	114.9 / 73.4
0.6	0.29	128.5 / 82.2
0.8	0.24	145.7 / 91.9
1.0	0.17	168.4 / 105.8

4. 결 론

본 연구에서는 축대칭 복사열전달 해석을 위한 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법은 구분중좌법과 유한체적법의 장점을 취한 것으로서 일반적인 2차원 계산을 하고 임의의 검사각도를 사용할 수 있다. 최종 차분방정식의 검증을 위하여 세가지 예제를 고려하였다. 다른 해석방법들과 비교하였을 때 충분한 정확도를 가지고 있으며, 계산시간은 유한체적법의 약 1.5 배가 소요되지만 계산순서의 간단함은 이를 상쇄시킨다. 축대칭 해석을 위해 Chui 등⁽⁹⁾의 3차원 사상을 사용하는 유한체적법은 중심축에 수직인 단면만을 사용할 수 있음에 비하여 본 방법은 적당한 기하학적 관계를 고려함으로써 임의의 격자계를 사용할 수 있으며, 이로 인해 구분중좌법 및 유한체적법의 또다른 대안이 될 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Carlson, B. G., and Lathrop, K. D., 1968, "Transport Theory - The Method of Discrete Ordinates," In *Computing Methods in Reactor Physics* (Edited by Greenspan, H., Kelber, C. N., and Okrent, D.) pp.165~266, Gordon and Breach, New York.
- (2) Fiveland, W. A., 1982, "A Discrete-Ordinates Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclosure," *ASME Paper*

- 82-HT-20.
- (3) Jamaluddin, A. S., and Smith, P. J., 1988, "Predicting Radiative Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures Using the Discrete Ordinates Method," *Combust. Sci. Tech.*, Vol. 62, pp. 173~186.
- (4) Baek, S. W., and Kim, T. Y., and Lee, J. S., 1993, "Transient Cooling of a Finite Cylindrical Medium in the Rarefied Cold Environment," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 10, pp. 3949~3956.
- (5) Cheong, K. B., and Song, T. H., 1996, "Interpolation Method for Numerical Solution of the Discrete Ordinates Equations," *Proceedings of the 3rd KSME-JSME Thermal Engineering Conference*, Oct. 20-23, Kyongju, Korea.
- (6) 서석호, 김태국, 한규익, 1996, "유한 구분 전달법에서 비직교 격자계를 이용한 3차원 복사열 전달 해석," 대한기계학회 1996년 추계학술대회 논문집 B, KSME 96F240, pp. 229~234.
- (7) Raithby, G. D., and Chui, E. H., 1990, "A Finite-Volume Method for Predicting a Radiative Heat Transfer in Enclosures with Participating Media," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 415~423.
- (8) Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1994, "Finite-Volume Method for Radiation Heat Transfer," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 8, No. 3, pp. 419~425.
- (9) Chui, E. H., Raithby, G. D., and Hughes, P. M. J., 1992, "Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite-Volume Method," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 6, No. 4, pp. 605~611.
- (10) Kim, M. Y., and Baek, S. W., 1997, "Analysis of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures using the Finite-Volume Method," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 11, No. 2, pp. 246~252.
- (11) Baek, S. W., and Kim, M. Y., 1997, "Modification of the Discrete-Ordinates Method in an Axisymmetric Cylindrical Geometry," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 31, No. 3, pp. 313~326.
- (12) Modest, M. F., 1993, *Radiative Heat Transfer*, Mc-Graw Hill, New York.
- (13) Chai, J. C., Parthasarathy, G., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1995, "Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 9, No. 3, pp. 410~415.
- (14) Kim, T. K., 1990, "Radiation and Combined Mode Heat Transfer Analyses in Absorbing, Emitting, and Mie-Anisotropic Scattering Media Using the S-N Discrete Ordinates Method," Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
- (15) Jendoubi, S., Lee, H. S., and Kim, T. K., 1993, "Discrete-Ordinates Solutions for Radiatively Participating Media in a Cylindrical Enclosure," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 7, No. 2, pp. 213~219.
- (16) 김만영, 백승욱, 1996, "유한체적법에 의한 복잡한 형상을 갖는 3차원 가스터빈 연소기 내의 복사열전달 해석," 대한기계학회논문집 (B), 제 20권, 제8호, pp. 2681~2692.
- (17) Baek, S. W., and Kim, M. Y., 1997, "Analysis of Radiative Heating of a Rocket Plume Base with the Finite-Volume Method," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40, No. 7, pp. 1501~1508.
- (18) Chui, E. H., and Raithby, G. D., 1993, "Computation of Radiant Heat Transfer on a Nonorthogonal Mesh Using the Finite-Volume Method," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 23, pp. 269~288.
- (19) Moder, J. P., Chai, J. C., Parthasarathy, G., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1996, "Nonaxisymmetric Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 30, pp. 437~452.